OPERUM NEWTONI.

TOMUS TERTIUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL.D. R.S.S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

TOM. III.

LONDINI:

EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXXII.

IN HOC TOMO CONTINENTUR

IPSIUS NEWTONI,

EDITORIS,

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

ARGUMENTA CAPITUM

LIBRI TERTII PRINCIPIORUM.

DE
MUNDI SYSTEMATE.
LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur; uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt, ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea, ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur, qui principia priùs evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quàm plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulò legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones, hìc citatas, pro lubitu conſulat.

REGULÆ

PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & veræ ſint, & earum phænomenis explicandis ſufficiant.

DICUNT utique Philoſophi: Natura nihil agit fruſtra; & fruſtra fit per plura, quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt, & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque Effectuum naturalium ejuſdem generis eædem aſſignandæ ſunt Cauſæ, quatenus fieri poteſt.

Uti reſpirationis in Homine & in Beſtiâ; deſcenſûs lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terrâ & in Planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt; ideoque generales ſtatuendæ ſunt, quotquot cum experimentis generaliter

neraliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem ſomnia temerè confingenda non ſunt, nec à Naturæ analogiâ recedendum eſt, cùm ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium; & inde non horum tantùm corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi, & duras eſſe, & impenetrabiles, & mobiles, & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas, & ſibi mutuò contiguas, ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus; & partes diviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe, ex Mathematicâ certum eſt. Utrum verò partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi, & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento, quòd particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quòd non ſolùm partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quòd indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuò, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem in Solem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit, per hanc Regulam, quòd corpora omnia in ſe mutuò

tuò gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de Gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen Gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minimè affirmo. Per vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt. Gravitas, recedendo à Terra, diminuitur.

REGULA IV.

In Philoſophiâ experimentali, Propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accuratè, aut quamproximè, haberi debent, donec alia occurrerint Phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur, aut exceptionibus obnoxiæ.

Hoc fieri debet, ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

(a) Confer Librum poſthumum de Syſtemate Mundi § 6.

PHÆNO-

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

CONSTAT ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronomi; & idem ex Tabulâ ſequente manifeſtum eſt (a).

Satellitum Jovialium tempora periodica.

$1^{d}.18^{h}.27'.34''.$ $3^{d}.13^{h}.13'.42''.$ $7^{d}.3^{h}.42'.36''.$ $16^{d}.16^{h}.32'.9''.$

Diſtantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex obſervationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis.
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	(b)

(b) TEMPORA

Quibus Satellites Jovis converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	I	II	III	IV
	152854"	306822"	618156"	1441929"
Temporum rat.	1	2,007	4,044	9,433
Rat. dupl.	1	4,028	16,353	88,983

DISTANTIÆ

Satellitum à Centro Jovis ex Eclipſibus Satellitum à Caſſino obſervatis.

	I	II	III	IV
	5,666	9	14,383	25,3
Diſtantiarum rat.	1	1,5882	2,5383	4,4646
Rat. Triplicatæ	1	4,006	16,354	88,991

Vides miram planè convenientiam Rationum quæ diſtantiarum ſunt triplicatæ, cum iis quæ ſunt duplicatæ temporum.

5 Elongationes

Elongationes ſatellitum Jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit, ut ſequitur. Elongatio maxima heliocentrica Satellitis quarti à centro Jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit; & prodiit, in mediocri Jovis à Terrâ diſtantiâ, 8′. 16″ circiter. Ea Satellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit; & prodiit, in eâdem Jovis à Terrâ diſtantiâ, 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum Satellitum, in eâdem Jovis à Terrâ diſtantiâ, ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56″. 47‴, & 1′. 51″. 6‴.

Diameter Jovis micrometro in teleſcopio pedes 123 longo ſæpiùs capta fuit; & ad mediocrem Jovis à Sole vel Terrâ diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quàm 40″, nunquam minor quàm 38″, ſæpiùs 39″. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt 40″ vel 41″. Nam lux Jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum Jovis in longioribus & perfectioribus teleſcopiis, quàm in brevioribus & minùs perfectis. Tempora quibus Satellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus Jovis, ab initio ingreſſûs ad initium exitûs, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ diſtantiâ, prodiit, per tranſitum Primi ſatellitis, $37\frac{1}{8}''$; & per tranſitum Tertii, $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam, quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus Jovis obſervatum fuit, & inde diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ diſtantiâ, prodiit 37″ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris Jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpectivè.

P H Æ-

(c) TEMPORA

Quibus Satellites Saturni converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	I	II	III	IV	V
	163107″	236482″	390312″	1377672″	6853620″
Temporum rationes	1	1,450	2,393	8,446	42,02
Rationes dulplicatæ	1	2,102	5,726	71,33	1765,6

DISTANTIÆ

PHÆNOMENON II.

Planetas Circumſaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d.21^h.18'.27''$. $2^d.17^h.41'.22''$. $4^d.12^h.25'.12''$. $15^d.22^h.41'.14''$. $79^d.7^h.48'.00''$.

Daſtantiæ Satellitum à centro Saturni in ſemidiametris Annuli.

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis	1,93.	2,47.	3,45.	8.	23,35. (c)

Quarti ſatellitis elongatio maxima à centro Saturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproximè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro Saturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ Satellitum à centro Saturni in ſemidiametris Annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum Annuli ut 3 ad 7, & diameter Annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719, prodiit 43″. Et inde diameter Annuli, in mediocri Saturni à Terrâ diſtantiâ, eſt 42″; & diameter Saturni, 18″. Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quòd magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilata-

DISTANTIÆ Satellitum à centro Saturni. Caſſini obſervatæ.

	I	II	III	IV	V
	1,95	2,5	3,5	8	24
Diſtantiarum rationes	1	1,2820	1,7950	4,1025	12,307
Rationes triplicatæ	1	2,107	5,783	69,05	1864,0

tionem

De Mundi Systemate

tionem lucis in terminis illorum corporum quàm in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter Saturni haud major quàm 16″.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios, Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum, orbibus ſuis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi, ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem ſiti ſunt; dimidiatâ è regione Solis; falcatâ cis Solem, per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex Martis quoque plenâ facie, prope Solis conjunctionem, & gibboſâ in quadraturis, certum eſt, quòd is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur: hos enim luce à Sole mutuatâ ſplendere, ex umbris ſatellitum in ipſos projectis manifeſtum eſt.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel Solis circa Terram vel Terræ circa Solem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ mediocrium diſtantiarum à Sole.

Hæc à *Keplero* (d) inventa ratio in confeſſo ad apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive Sol circa Terram, ſive Terra circa Solem revolvatur. Ac de menſurâ quidem temporum periodicorum convenit inter Aſtronomos univerſos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent,

(d) Vide Kepleri Harmonicen Mundi, p. 189, et Epitomen Aſtron. Copern. p. 501.

(e) TEMPORA

Quibus Planetæ converſiones ſuas Fixarum ratione abſolvunt.

	☿	♀	☉	♂	♃	♄
	Dies 88 —	224,666	365,25	687, —	4332,5	10759,33
Temporum rationes	1	2,553	4,150	7,807	49,23	122,26
Rationes duplicatæ	1	6,516	17,22	60,941	2423,0	14947,0

DISTANTIÆ

Liber Tertius.

dent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in Tabulâ ſequente videre licet.

Planetarum ac Telluris tempora periodica circa Solem reſpectu Fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac Telluris diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710. (e)

De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole diſputandi non eſt locus, cùm hæ per eorum elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes ſatellitum Jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas deſcribere temporibus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu Terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: at Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celeriùs tamen in Periheliis ac tardiùs in Apheliis, ſic ut arearum æquabi-

DISTANTIÆ

Planetarum à Sole medias ſumendo earum quæ à Keplero et Bullialdo poſitæ ſunt.

	☿	♀	☉	♂	♃	♄
	3869	7240	10000	15235	52108	95260
Diſtantiarum rationes	1	1,8713	2,5846	3,9372	13,468	24,621
Rationes triplicatæ	1	6,551	17,26	61,03	2443	14925

lis

De Mundi Systemate

lis ſit deſcripto. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprimè demonſtratur per Eclipſes ſatellitum; quibus eclipſibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem deſcribere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias in hiſce Phænomenis negligo [f].

[f] Locum hunc de Phænomenis in Libro poſthumo de Mundi Syſtemate eleganter pertractatum habes, § 1—9.

PROPO-

PROPOSITIONES.

SECTIO I.

Liber Tertius.

De Cauſis Syſtematis Mundani.

PROP. I. THEOR. I.

Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

PATET pars prior Propoſitionis per Phænomenon primum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per Phænomenon primum, & Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ ejuſdem libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon ſecundum.

PROP. II. THEOR. II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Phænomenon quintum, & Propoſitionem ſecundam libri primi: & pars poſterior per Phænomenon quartum, & Propoſitionem quartam ejuſdem libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quàm minima à ratione duplicatâ (por Corol. I. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem, efficere deberet.

PROP.

PROP. III. THEOR. III.

Vim, quâ Luna retinetur in orbe suo, respicere Terram, & esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per Phænomenon sextum, & Propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantùm trium & minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) quòd si distantia Lunæ à centro Terræ sit ad semidiametrum terræ ut D ad 1; vis, à quâ motus talis oriatur, sit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id est, reciprocè ut ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quàm duplicata inversè, sed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit. Oritur verò ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hîc negligendus est. Actio Solis quatenus Lunam distrahit à Terrâ, est ut distantia Lunæ à Terrâ quamproximè; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. 1.) est ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ Solis vi tantillâ, vis reliqua, quâ Luna retinetur in orbe, erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam pleniùs constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris, quâ Luna retinetur in orbe, augeatur primò in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ semidiametri Terræ ad mediocrem distantiam centri Lunæ à centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad superficiem Terræ; posito quòd vis illa, descendendo ad superficiem Terræ, perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROP.

(f) Posito utique Lunam, in orbe circulari, cujus diameter bis sexaginta semidiametrorum terrestrium esset, circum Terram in centro ejus circuli immobilem, spatio mensis quem vocant periodici, æquabili cum motu ferri; calculis exquisitè subductis, invenio rectam, quæ diametri ejus circuli arcûsque à Lunâ scrupuli primi spatio conficiendi proportione sit tertia, invenio, inquam, hanc rectam pedum Parisiensium 15,009. Atque hoc est spatium, quod corpus, vi illâ incitatum, quâ Luna in orbe illo circulari retinenda esset, rectâ cadendo, scrupuli primi spatio conficeret.
Prop.

PROP. IV. THEOR. IV.

Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris à Terrâ in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum *Ptolemæum* & plerosque Astronomorum, 59; secundum *Vendelinum* & *Hugenium*, 60; secundum *Copernicum*, $60\frac{1}{3}$; secundum *Streetum*, $60\frac{2}{5}$; & secundum *Tychonem*, $56\frac{1}{2}$. Ast *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quàm Fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecimâ vel decimâ quintâ parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium, ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum in syzygiis; & lunarem periodum respectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti à *Gallis* mensurantibus definitum est: & si Luna motu omni privari fingatur, ac demitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per Corol. Prop. III.) in orbe suo retinetur, descendat in Terram; hæc, spatio minuti unius primi cadendo, describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propositionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propositionis quartæ ejusdem libri, confecto. Nam arcûs illius, quem Luna tempore minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15, dig. 1, & lin. $1\frac{4}{9}$ (g). Unde cùm vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicatâ distantiæ ratione inversâ, ideoque ad superficiem Terræ major sit partibus 60×60 quàm ad Lunam; corpus, vi illâ in re-

(Prop. IV. Cor. 9.) Sed vis, quæ Lunam in orbe illo retineret, cùm differentia sit virium quarum major centrum Terræ, minor centrum Solis respicit, vi illâ centrum Terræ respiciente minor erit: atque eâ ratione minor quâ numerus 17775 minor numero 17675. (Prop. III. Cor.) Augeatur igitur spatium illud pedum parisiensium 15,009 pro hâc ratione; veniet spatium ped. paris. 15,093 = 15 ped. 1 dig. 1 lin. $\frac{7}{17}$.

gionibus

gionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet, ſpatio minuti unius primi, pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi Gravia reverâ deſcendunt in Terram. Nam Penduli, in latitudine Lutetiæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius*. Et altitudo, quam Grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem Penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius)* ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis, quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem Terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos; ideoque (per Reg. I & II.) eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab eâ diverſa eſſet, corpora, viribus utriſque conjunctis Terram petendo, duplo velociùs deſcenderent; & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcriberent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam ([h]).

Calculus hic fundatur in hypotheſi, quòd Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna moveantur circum Solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, diſtantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri poteſt per Prop. LX. Lib. I. ([i])

Scholium.

Demonſtratio Propoſitionis ſic fuſiùs explicari poteſt. Si Lunæ plures circum Terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate Saturni vel Jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem Planetarum à *Keplero* detectam; & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Terræ, per Prop. I. hujus. Et ſi earum infima

([h]) Vid. De Syſt. Mundi § 10.

([i]) Nempe radius orbis circularis, quem Luna circum Terram, in centro orbis immobilem, menſis periodici quem vocant ſpatio, conficeret, is minor eſſet quàm Lunæ, circum centrum gravitatis, quod ipſi cum Terrâ eſt commune, circumactæ, à centro Terræ diſtantia. (Lib. I. Prop. LX.) Hanc ob cauſam Newtonus radium orbis illius circularis 60 ſemidiametrorum terreſtrium poſuit, cùm diſtantia Lunæ, ſi maximæ minimæque ſumatur media, ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium

infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium propè tangeret: hujus vis centripeta, quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè; efficeretque, ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ, quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in Terram; idque eâdem cum velocitate, quâ Gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa, quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à Gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in Terram, more corporum in verticibus montium: eadem lunula, vi utrâque conjunctâ, duplo velociùs deſcenderet. Quare cùm vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum Terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per Reg. I & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, quâ Luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos Gravitatem dicere ſolemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplo velociùs cadat, quàm corpora gravia ſolent cadere.

PROP. V. THEOR. V.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumſaturnios in Saturnum, & Circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri ([k]).

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumſaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumſolarium circa Solem, ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea (per Reg. II.) à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cùm demonſtratum ſit quòd vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Sa-

trium cum ſemiſſe haud minor ſit. Quâ in re non malè ſe conjeciſſe ex eo perſuadere inſtituit, quòd ſi radium illum ſemidiametrorum ſexaginta pro eâ ratione augeas, quâ, manente gravitatis lege, diſtantia Lunæ à Terrâ mobili radium illum ſuperare debet, veniet planè longitudo ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium cum ſemiſſe pro diſtantiâ illâ, qualem ferè eam Aſtronomi conſtituerunt. Vide Opus Poſth. De Syſtem. Mundi §. 11.

([k]) De Syſt. Mundi § 12.

turno & Sole decreſcant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terrâ.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cùm attractio omnis per motûs legem tertiam mutua ſit, Jupiter in ſatellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuò per Corol. 1 & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem, ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares; Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam, quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur, Centripetam appellavimus. Eandem jam Gravitatem eſſe conſtat, & propterea Gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ Luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes Planetas per Reg. I, II & IV.

PROP. VI. THEOR. VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis ([1]).

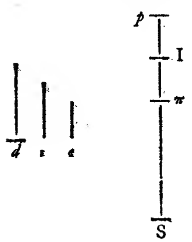
Deſcenſus gravium omnium in Terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aëris perexiguâ reſiſtentiâ oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervârunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arenâ, Sale communi, Ligno, Aquâ, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & Aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unà & redibant diutiſſimè. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1 & 6. Prop. XXIV. Lib. 2.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis Actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem Lunæ, & unà cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; &, per jam antè oſtenſa, certum eſt quòd temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Lunâ, ideoque quòd ſunt ad quantitatem materiæ in Lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus, ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc Terrâ noſtrâ. Et eodem argumento Planetæ circumſolares, ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quàm maximè regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. 1. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quàm cæteri: motus ſatellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. 1.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à Sole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate materiæ ſuæ, quàm Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta d ad e: diſtantia inter centrum Solis & centrum

([1]) De Syſt. Mund. § 18, 19.

trum orbis Satellitis, major ſemper foret quàm diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione ſubduplicatâ quàm proximè; uti calculo quodam inito inveni. Et ſi Satelles minùs gravis eſſet in Solem in ratione illâ *d* ad *e*, diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole minor foret quàm diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illâ ſubduplicatâ (m). Ideoque ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in ſolem, parte tantùm milleſimâ gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole major vel minor quàm diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quintâ diſtantiæ ſatellitis extimi à centro Jovis (n): quæ quidem orbis eccentricitas foret valdè ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia. Aliqua autem ſunt per Corol. 1 & 3. Prop. V.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minùs, quàm pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratiâ corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

(m) NEMPE ut diſtantiarum inæqualitas virium inæqualitatem compenſaret. Sit SI diſtantia Jovis à Sole media. Vis autem acceleratrix illa quæ unum aliquem ex ejus ſatellitibus, puta extimum, ad diſtantiam SI à ſole conſtitutum, verſus centrum Solis impelleret, major ſit vi acceleratrice quæ Jovem ipſum impellit, pro ratione rectæ *d* ad *e*. Duarum *d*, *e* capiatur ι proportione media. Capiatur Sp, ad quam SI rationem habeat eam quam ι ad *d*. Si Satelles extimus in orbe quodam circumagatur, cujus centrum ſit *p*, erit Sp media Satellitis, orbem illum percurrentis, à Sole diſtantia. Vis autem, quâ Satelles in Solem impellitur in *p*, erit ad vim quæ eundem impelleret in I, ut SI^2 ad SP^2, ſive ut ι^2 ad d^2, ſive denique ut *e* ad *d*. Sed vis, quâ Jupiter in Solem impellitur in I, ad vim, quæ Satellitem in I in ſolem impelleret, rationem habet quam *e* ad *d*. Vis igitur acceleratrix, quâ Satelles in Solem impellitur in diſtantiâ Sp, æqualis erit vi quâ Jupiter in Solem impellitur in diſtantiâ SI. In orbe igitur illo, cujus centrum eſſet *p*, Satelles, ad mediam à Sole diſtantiam conſtitutus, pariter cum



pore Lunæ: ſi horum pondera eſſent ad corpora partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quàm ſuprà oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa Terram ſunt, gravia ſunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per Reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si Æther, aut corpus aliud quodcunque, vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minùs gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in Formâ materiæ, poſſet idem per mutationem Formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quàm maximè gravitant; & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quàm probatum eſt in Corollario ſuperiore.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica Fluidi quo regio Aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ Argenti Vivi, vel Auri, vel corporis alterius

cum Jove ipſo pro materiæ ſuæ modo in Solem impelleretur. In ulteriori orbitæ ſuæ ſemicirculo minùs, in citeriori magis. Quamobrem haud multo magis ab hoc orbe aberraret, quàm ab illo cujus centrum corpus ipſum Jovis occuparet, ſi vires æquales in æqualibus à Sole diſtantiis corpus utrumque, Jovis et Satellitis, in Solem urgerent. Quòd ſi vis quæ Satellitem, ad diſtantiam SI conſtitutum, in Solem impelleret, vi Jovem impellente minor eſſet pro ratione rectæ *e* ad *d*, ſimili prorſus argumentatione efficeretur, centrum orbitæ, quam Satelles ſine inſigni aliquâ motûs ſui perturbatione percurrere poſſet, in puncto π conſtituendum; cujus diſtantia à Sole, $S\pi$, ad Jovis à Sole diſtantiam SI, rationem haberet quam *e* ad ι.

(n) Nempe diſtantia Ip, vel $I\pi : SI = 1 : 2000$. Sed SI eſt ad mediam Satellitis extimi à Jove diſtantiam ut 443 ad 1; Aſtronomis ſic definientibus (*De La Caille Leçons Element.* § 673.) Ex æquo perturbatè Ip vel $I\pi$ ad mediam Satellitis extimi à Jove diſtantiam ut 443 ad 2000; major itaque Ip vel $I\pi$ quàm ut habeat ad mediam Satellites extimi à Jove diſtantiam rationem eam quàm 1 ad 5.

cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec Aurum neque aliud quodcunque corpus in Aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in Fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quòd ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, Vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis Gravitatis diverſi eſt generis à vi Magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minùs, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ quàm vis gravitatis, & in receſſu à Magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicatâ, ſed ferè triplicatâ, quantùm ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

PROP. VII. THEOR. VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis (o).

Planetas omnes in ſe mutuò graves eſſe jam antè probavimus, ut & gravitatem in unumquemque, ſeorſim ſpectatum, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde conſequens eſt (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) Gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porro cùm planetæ cujuſvis, A, partes omnes graves ſint in planetam quemvis B, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motûs Legem tertiam) æqualis ſit; planeta B in partes omnes planetæ A viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. Q. E. D.

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus

(o) De Syſt. Mund. § 20—24.

in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in Gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire, & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quòd corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hâc lege gravitare deberent in ſe mutuò, cùm tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: reſpondeo, quòd gravitas in hæc corpora, cùm ſit ad gravitatem in Terram totam ut ſunt hæc corpora ad Terram totam, longè minor eſt, quàm quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra (p).

Poſtquam inveniſſem Gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciprocè proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus: dubitabam, an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compoſitâ, an verò quàm proximè. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accuratè obtineret, prope ſuperficiem Planetæ, ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV & LXXVI. Libri primi & ipſarum Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de quâ hìc agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas (q). Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inverſè; & pondera ad ſuperficies Planetarum, aliaſve quaſvis à centro diſtantias, majora ſunt vel mi-

(p) De Syſt. Mund. § 25, 26. (q) De Syſt. Mund. § 13—17.

De Mundi Systemate

nora (per hanc Propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circum Terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantiâ mediocri Veneris à Sole, & cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis à centro Jovis, 8'. 16". satellitis Hugeniani à centro Saturni 3'. 4". & Lunæ à centro terræ 10'. 33". computum ineundo (r), inveni quòd corporum æqualium, & à centro Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, pondera sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ respectivè; & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium

(r) *Computationis ineundæ hæc est ratio.*

Datur, ex Astronomorum decretis, ratio triplicata ejus quam media Stellæ Veneris à Sole distantia habet ad distantiam Stellæ Jovis à Sole mediam. Sed et distantiæ Jovis à Sole ad Satellitis extimi à Jove distantiam triplicata ratio datur. Dabitur igitur ratio triplicata ejus, quam distantia Satellitis extimi Jovialis à Jove habet ad mediam stellæ Veneris à Sole distantiam. (Dat. 8.) Hæc autem ejus rationis duplicata erit, quam tempus conversionis Satellitis extimi circa Jovem ad tempus habet, quo satelles ille conversionem suam absolveret, si distantia ejus à Jovis centro in eam diduceretur, quæ mediæ Veneris à Sole distantiæ æqualis esset. (Lib. 1. Prop. xv.) Datur autem tempus conversionis Satellitis extimi circa Jovem. Dabitur igitur tempus, quo idem Satelles, ad distantiam à Jovis centro mediæ Stellæ Veneris à Sole distantiæ æqualem evectus, conversionem absolveret. (Dat. 2.) Sed datum est tempus conversionis Veneris circa Solem. Data est igitur horum temporum duplicata ratio. Quare et temporum duplicatæ contraria dabitur. Sed duplicatæ horum temporum contraria est ipsa Virium ratio, quibus Satelles extimus in Jovem, & Venus in Solem impellerentur, in æqualibus utique hujusce à Sole illius à Jove distantiis. Quare et virium illarum ratio data. Q. E. I.

Formulæ computandi Algebraicæ.

Notis ♀, ⊖, ♃, ♄ significentur mediæ stellæ Veneris, Telluris nostræ, Jovis et Saturni à Sole distantiæ. Notis ☽, A, B mediæ Lunæ nostræ, Satellitis extimi Jovialis, et Satellitis Hugeniani à centro Terræ, Jovis, vel Saturni distantiæ. Literâ V significetur tempus conversionis stellæ Veneris in orbe suo: literis l, j, h, tempora quibus Luna nostra, Satelles extimus Jovialis, et Satelles Hugenianus conversiones suas absolvunt: literis S, T, J, Σ significentur vires acceleratrices quibus in æqualibus à centro Solis, Terræ, Jovis vel Saturni distantiis corpora in centra illa singulatim impelluntur.

Jam $\text{♀}^3 : \text{♃}^3 = 6{,}551 : 2443$. (Not. c.)

Et $\text{♃}^3 : A^3 = R^3 : \overline{\text{sin.}\ '8 - ''16}|^3$.

Ex æquo $\text{♀}^3 : A^3 = 6{,}551 \times R^3 : 2443 \times \overline{\text{sin.}\ '8 - ''16}|^3$.

Literâ x significetur tempus, quo Satelles extimus Jovialis conversionem suam absolveret, si ad illam evectus esset à Jovis centro distantiam, quæ distantiæ ♀ à Sole æqualis esset.

Erit igitur $2443 \times \overline{\text{sin.}\ '8 - ''16}|^3 : 6{,}551 \times R^3 \ (= A^3 : \text{♀}^3) = j^2 : x^2$. (Lib. 1. Prop. xv.)

Unde $x^2 = \dfrac{j^2 \times 6{,}551 \times R^3}{2443 \times \overline{\text{sin.}\ '8 - ''16}|^3}$.

Sed

Liber Tertius.

um corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè (s). Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicetur in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris; id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terrâ sunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ respectivè (t). Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quàm 10". 30"', debebit quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pon-

Sed $V^2 : x^2 = J : S$. Quare $S = \dfrac{x^2 \times J}{V^2}$; vel pro J scribendo 1, $S = \dfrac{j^2 \times 6{,}551 \times R^3}{2443 \times \overline{\text{sin.}\ '8 - ''16}|^3 \times V^2} = 1064$: nimirum pro j^2, V^2, positis $\overline{16{,}689}|^2$, $\overline{224{,}666}|^2$. Quare vis Jovialis erit ad vim Solarem ut 1 ad 1064.

Simili modo si pro Σ scribatur 1, efficietur $S = \dfrac{h^2 \times 6{,}551 \times R^3}{14925 \times \overline{\text{sin.}\ '3 - ''4}|^3 \times V^2} = 3114$, nimirum pro V^2 posito, ut antè, $\overline{224{,}666}|^2$; pro h^2, $\overline{15{,}945}|^2$. Quare vis Saturnia erit ad vim Solarem ut 1 ad 3114.

Ad vim Terrestrem inveniendam, statuo parallaxin Solis horizontalem, in mediâ ejus à Tellure distantiâ, ''8,83, sive ''8 — '''50, qualis ea à Cl. Maskelyno definita est. (Mayer. Tab.) Pro mense, quem vocant, periodico, per literam l designato, usurpo brevius quoddam temporis spatium, quod ad tempus illud l rationem habeat ejus, quæ est numeri 17775 ad numerum 17875, subduplicatam. Nam tali tempore Luna conversionem suam absolveret, si cessante vi Solari vim Terrestrem solam et integram perciperet. Hoc tempus literâ λ significetur. Radium denique orbitæ circularis, quam Luna, cessante tum vi Solis, tum propriâ quâ ipsa Terram incitat, circum Terram immobilem tempore λ scriberet; hujus orbitæ radium cum Newtono statuo sexaginta semidiametrorum terrestrium. Et calculis ad priorum exemplum subductis, positâ $T = 1$, veniet $S = \dfrac{\lambda^2 \times 6{,}551 \times R^3}{17{,}26 \times \overline{\text{sin.}\ '8 - ''50}|^3 \times V^2} = 329006$. Quare vis Terrestris erit ad vim Solarem ut 1 ad 329906.

Pondera igitur Corporum æqualium in Solem, Jovem, Saturnum et Terram, in æqualibus à centris eorum distantiis erunt ut 1, $\frac{1}{1064}$, $\frac{1}{3114}$, $\frac{1}{329006}$, sive ut numeri 10000. 9,3972. 3,2108. 0,030394.

(s) Nimirum si Jovis, Saturni et Telluris nostræ semidiametri è Sole visæ, necnon Solis semidiameter è tellure visa, in mediâ utique corporis cujusque à Sole distantiâ, tales essent quales cum sui seculi Astronomis Newtonus eas æstimavit, veras diametrorum rationes numeri à Newtono positi satis exquisitè exhiberent; 10000, 997, 791, 109. Cùm verò semidiametri è Sole visæ, in mediis à Sole distantiis, Jovis quidem sit ''18,5; Saturni, ''8; Terræ, ''8,83 (modò rectè eas Juniores definiant) existente Solis ipsius semidiametro, qualis è Tellure maximam inter minimamque media cernitur, '16 — ''3, veræ semidiametrorum rationes hisce ferè numeris exponendæ erunt

☉ 10000   ♃ 1001,0   ♄ 791   ⊖ 91,69.

Inde verò, et ex virium in æqualibus distantiis rationibus, quas suprà posuimus, venient virium in superficiebus rationes, quales hi numeri præ se ferunt

☉ 10000   ♃ 937,7   ♄ 512,69   ⊖ 361,5.

(t) Verius 1, $\frac{1}{1064}$, $\frac{1}{3114}$, $\frac{1}{329006}$.

2

dera.

De Mundi Systemate

dera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109; & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè; & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400 (u). Denſitas Terræ, quæ prodit ex hoc computo, non pendet à parallaxi Solis, ſed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hîc rectè definitur (x). Eſt igitur Sol paulo denſior quàm Jupiter, & Jupiter quàm Saturnus, & Terrâ quadruplo denſior quàm Sol. Nam per ingentem ſuum calorem Sol rareſcit. Luna verò denſior eſt quàm Terra, ut in ſequentibus patebit.

Corol 4. Denſiores igitur ſunt Planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt Planetæ, cæteris paribus, qui ſunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diverſis utique diſtantiis à Sole collocandi erant Planetæ, ut quilibet, pro gradu denſitatis, calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi Terra locaretur in orbe Saturni, rigeſceret; ſi in orbe Mercurii, in vapores ſtatim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe Mercurii

(u) Quod ſi tales ſint diametrorum inter ſe, & ponderum rationes, quales nos poſuimus; Denſitates horum numerorum inter ſe proportiones gerent 100; 93,67; 64,78; 394,26. Poſtremò ſi omnia cum terrenis conferre placeat, Terræ, Jovis, Saturni et Solis diametri his ferè numeris

	⊕	♃	♄	☉
exponi poſſint;	1	11	8,6	109
Hiſce magnitudines	1	1331	636	1295029
Hiſce, vires abſolutæ ſive corpora	1	309	105+	329006
Hiſce vires ad ſuperficies	1	2,6	1,4	27,66
Hiſce denique denſitates	1	$\frac{10}{42}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{39}$

(x) Significent literæ D, d Solis et Terræ diametros; literæ Δ, δ denſitates, ſignificantibus utique literis S, T, vires Solis Terræque abſolutas. Erit igitur $\Delta : \delta = S \times d^3 : T \times D^3$. Unde $\delta = \frac{T \times D^3 \times \Delta}{S \times d^3}$. Vel pro Δ ſcribendo 1, $\delta = \frac{T \times D^3}{S \times d^3}$. Significet litera s Solis ſemidiametrum è Terrâ viſam, in mediâ utique Solis diſtantiâ; litera π, parallaxin ejus horizontalem mediam. Erit igitur $D^3 : d^3 = \overline{\text{ſin.}\ s}^3 : \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3$. Unde $\frac{D^3}{d^3} = \frac{\overline{\text{ſin.}\ s}^3}{\overline{\text{ſin.}\ \pi}^3}$. Hinc $\delta = \frac{T \times \overline{\text{ſin.}\ s}^3}{S \times \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3}$. Jam vero $\frac{T}{S} =$

27,26 ×

Liber Tertius.

Mercurii quàm apud nos: & Thermometro expertus ſum, quòd ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium verò non eſt, quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cùm materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROP. IX. THEOR. IX.

Gravitatem, pergendo à ſuperficiebus Planetarum deorſum, decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quàm proximè.

Si materia Planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc Propoſitio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROP. X. THEOR. X.

Motus Planetarum in Cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In Scholio Propoſitionis XL. Lib. 2. oſtenſum eſt quòd globus Aquæ congelatæ, in Aëre noſtro liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentiâ Aëris amitteret motûs ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quàm proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum Terræ noſtræ denſiorem eſſe, quàm ſi totus ex Aquâ conſtaret, ſic

$\frac{17,26 \times \overline{\text{ſin.}\ 8' - 50''}^3 \times V^2}{\lambda^2 \times 6,551 \times R^3}$ (per formulam generalem vis Solaris ſuprà traditam (Not. u.) Vel, ſi pro quantitate datâ $\frac{17,26 \times V^2}{\lambda^2 \times 6,551 \times R^3}$ ponatur A, $\frac{T}{S} = A \times \overline{\text{ſin.}\ 8' - 50''}^3$. Vel magis generaliter $\frac{T}{S} = \frac{A \times B^3 . \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3}{d^3}$, ſignificante literâ B radium orbitæ circularis, quam Luna, ceſſante tum Solis vi, tum ipſius propriâ, tempore λ circa Terram immobilem conficeret. Nam $\overline{\text{ſin.}\ 8' - 50''}^3$ illud eſt, quod fit augendo cubum è ſinu parallaxeos ſolis horizontalis pro ratione triplicatâ ejus, quam ſemidiameter Terræ ad radium illius orbitæ Lunaris habet. Hinc autem efficietur $\delta = \frac{A \times B^3 \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3 \times \overline{\text{ſin.}\ s}^3}{d^3 \times \overline{\text{ſin.}\ \pi}^3} = \frac{A \times B^3 \times \overline{\text{ſin.}\ s}^3}{d^3}$. Literâ p ſignificetur parallaxis Lunæ horizontalis, qualem utique ad diſtantiam B ea haberet. Erit $B^3 : d^3 = R^3 : \overline{\text{ſin.}\ p}^3$. Unde $\frac{B^3}{d^3} = \frac{R^3}{\overline{\text{ſin.}\ p}^3}$, et $\delta = \frac{A \times R^3 \times \overline{\text{ſin.}\ s}^3}{\overline{\text{ſin.}\ p}^3}$. Quare δ, Terræ denſitas, è ſinu anguli p definienda eſt, nullâ parallaxeos ſolaris ratione habitâ. Angulus autem ille p ad veram Lunæ parallaxin mediam rationem datam habet; eam utique, quam media Lunæ à Terrâ mobili diſtantia ad diſtantiam B.

colligo.

colligo. Si globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eâque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quàm aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppositâ. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc, si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento, maculæ solares leviores sunt quàm materia lucida solaris, cui supernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materia omnis gravior, quo tempore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cùm terra communis suprema quasi duplo gravior sit quàm aqua, & paulo inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est, quòd copia materiæ totius in Terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit, quàm si tota ex Aquâ constaret; præsertim cùm Terram quasi quadruplo densiorem esse quàm Jovem jam antè ostensum sit. Quare si Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, amitteret, in Medio ejusdem densitatis cum Aëre nostro, motûs sui partem ferè decimam (y). Verùm cùm resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut Aqua, quæ partibus $13\frac{3}{5}$ levior est quàm Argentum Vivum, minùs resistat in eâdem ratione; & Aer, qui partibus 860 levior est quàm Aqua, minùs resistat in eâdem ratione: si ascendatur in cœlos, ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia propè cessabit. Ostendimus utique in Scholio ad Prop. XXII. Lib. 2. quòd

(y) Nimirum si litera D significet diametrum Jovis, litera T tempus quo stella Jovis, cum velocitate illâ quam maximæ minimæque mediam habet, spatium in inani conficeret, quod esset ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas materiæ quæ est in corpore Jovis ad densitatem liquoris ejus, per quem iter ei faciendum est; tempore quovis alio t, globus Jovialis ex liquoris illius renixu partem velocitatis suæ amittet, quæ erit ad eam, quæ initio fuit, ut t ad T + t. (Lib. 2. Prop. XXXV. Cor. 7.) Puta igitur materiam quæ est in Jove pari cum Aquâ nostrâ densitate præditam; globum autem Jovis per liquorem aliquem ferri, qui Aerem nostrum densitate referat. Ita erit densitas materiæ Jovialis ad densitatem liquoris, per quem iter ei faciendum est, ut 860 ad 1. Et cùm Jovis diameter è Sole visa amplitudinem habeat "37, amplitudo arcûs cælestis, qui ad $\frac{8}{3}$ D rationem habeat quam 860 ad 1, ea erit 23°—'36—"16. Talem verò arcum stella Jovis, cum velocitate mediâ, spatio dierum 283 cum semisse ferè absolverit. Atque hoc erit spatium tempore, quod literâ T designavimus, conficiendum. Unde si pro t ponatur spatium dierum 30, erit t ad T + t ut 30 ad 310,5, hoc est ut 1 ad 10 propemodum. Velocitas igitur quam stella Jovis, si per Aerem nostrum ferretur spatio dierum

quòd si ascenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum supra Terram, Aër ibi rarior foret quàm ad superficiem Terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, seu 75000000000000 ad 1 circiter (z). Et hinc stella Jovis in Medio ejusdem densitatis cum aere illo superiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex resistentiâ Medii non amitteret motûs sui partem decimam centesimam millesimam (aa). In spatiis utique Terræ proximis, nihil invenitur, quod resistentiam creet, præter aërem, exhalationes, & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentissimè exhaustis, gravia intra vitrum liberrimè & sine omni resistentiâ sensibili cadunt; ipsum Aurum & Pluma tenuissima simul demissa æquali cum velocitate cadunt, & casu suo describendo altitudinem pedum quatuor, sex, vel octo, simul incidunt in fundum, ut experientiâ compertum est. Et propterea si in cœlos ascendatur, aëre & exhalationibus vacuos, Planetæ & Cometæ, sine omni resistentiâ sensibili, per spatia illa diutissimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum Systematis Mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram, alii Solem in centro systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

PROP. XI. THEOR. XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel pro-

dierum 30 amitteret, pars quasi decima totius esset.

(z) Vide De System. Mundi § 68. & confer Sect. VI. Dissertationis nostræ de Aere et Barometro inter Acta Philosophica Anni 1774 editæ.

(aa) Imo partem hujus decimæ centesimæ millesimæ sexagesimâ haud multo majorem. Cùm enim stella Jovis, si cum velocitate suâ mediâ per inane ferretur, spatio dierum $283\frac{1}{2}$ longitudinem conficeret, quæ esset ad $\frac{8}{3}$ D ut 860 ad 1 (Not. y); omnino longitudinem, quæ esset ad $\frac{8}{3}$ D ut 860 × 75000000000000 ad 1, non nisi spatio dierum $283\frac{1}{2}$ × 75000000000000 conficeret. Si igitur stella Jovis per liquorem feratur eâ densitate præditum, quæ sit ad corporis Jovialis densitatem, ut 1 ad 860 × 75000000000000, pro tempore T, in Corollario 7. Prop. XXXV. Libri secundi, ponendi erunt dies 21625000000000000, sive Anni Ægyptiaci 58200000000000. Unde si pro t ponantur Anni Ægyptiaci 1000000, erit t ad T + t ut 1 ad 58200001; sive numeris quod aiunt rotundis, ut 1 ad 60000000. Pars igitur velocitatis, quæ spatio annorum Ægyptiacorum 1000000 amittitur, ea decimæ centesimæ millesimæ quasi sexagesima erit.

gredietur

De Mundi Systemate

gredietur uniformiter in directum. Sed, centro illo semper progrediente, centrum Mundi quoque movebitur, contra Hypothesin.

PROP. XII. THEOR. XII.

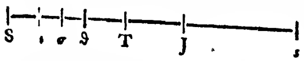
Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cùm (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & distantia Jovis à Sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo supra superficiem solis. Eodem argumento, cùm materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 3021 ad 1, & distantia Saturni à Sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo, si Terra & Planetæ omnes ex unâ solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ solis diametro à centro Solis distaret (bb). Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cùm centrum illud gravitatis perpetuò quiescit, Sol, pro vario Planetarum situ, in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longè recedet (cc).

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cùm Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuò, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motûs perpetuò agitentur: perspicuum est, quòd horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum

esset,

(bb) Puta enim centra Solis, Telluris, Jovis et Saturni ad rectam esse: Solis quidem ad s, Terræ ad T, Jovis ad J, Saturni ad s.



Sit ι locus centri gravitatis quod corporum duorum, Solis Jovisque, est commune. Quod trium, Solis, Jovis, et Saturni, est commune, ejus locus sit σ; quod horum denique trium cum quarto terrestri est commune, ejus locus sit ϑ. Dico rectam sϑ diametro Solis minorem esse. Ponatur semidiameter Solis = 1, ut diameter integra sit 2. Jam cùm amplitudo semidiametri Solaris, qualis media ferè è tellure cernitur, sit 16'—''3, erit sT = 214. Unde cùm distantiæ Planetarum à Sole rationes inter se habeant quales suprà exposuimus (Not. c) erit sJ = 1116,1 et ss = 2040,4.

Jam verò cùm corpus Solis sit ad corpus Jovis ut 1064 ad 1 (Not. r) erit sJ ad sι ut 1065 ad 1. Sed sJ = 1116,1. Ergo sι = 1,048. Sed ss = 2040,4. Quare ιs = 2039,352.

Rursum cùm corpus Solis sit ad corpora Jovis et Saturni ut 10000 ad 9,3972 & 3,2108 (Not. r)

2

erunt

Liber Tertius.

esset, in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cùm autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, à quo centrum solis quàm minimè discedit, & à quo idem adhuc minùs discederet, si modò sol densior esset & major, ut minùs moveretur.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Planetæ moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis; &, radiis ad centrum illud ductis, areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro solis; si Sol quiesceret, & Planetæ reliqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum Elliptici, solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I & XI. & Corol. 1. Prop. XIII. Lib. 1.) Actiones autem Planetarum in se mutuò perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus planetarum in Ellipsibus circa solem mobilem minùs perturbant (per Prop. LXVI. Lib. 1.) quàm si motus isti circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omninò contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni à Jove est ad distantiam Saturni à Sole ferè ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1067, seu 1 ad 211 circiter. Et

erunt corpora Solis Jovis et Saturni ad corpus Saturni ut 10012,6 ad 3,211. Unde ιs ad ισ ut 10012,6 ad 3,211. Sed ιs = 2039,352. Ergo ισ = 0,654.

Rursus cùm corpus Solis sit ad corpus Terræ ut 10000 ad 0,0304 (Not. r) calculis similiter subductis invenietur σϑ = 0,0006.

Hinc sι = 1,048
ισ = 0,654
σϑ = 0,0006

Quare sϑ = 1,703 Sed diameter Solis erat 2. Quare Sϑ minor erit diametro Solari. Martis, Veneris, et Mercurii quanta sint corpora, ignotum est. Haud tamen verisimile est tanta ea esse, ut, centris omnium ad rectam ss positis, distantia centri gravitatis systematis totius distantiâ sϑ eâ ratione major sit, quâ numerus vicenarius numero 17 major est. At eâ ratione augeri oportet rectam sϑ, ut diametro Solari æqualis evadat.

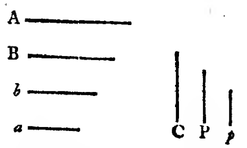
(cc) De System. Mundi § 28.

hinc

hinc oritur perturbatio orbis Saturni, in ſingulis planetæ hujus cum Jove conjunctionibus, adeo ſenſibilis, ut ad eandem Aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur; Aphelium nunc promovetur, nunc fortè retrahitur; & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem, à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari ferè poteſt, conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) Et propterea, ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum, & Jovis in Solem ſunt ferè ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 156609, ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longè minor eſt quàm ea ſaturnii (dd). Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longè minores, præterquam quòd orbis Terræ ſenſibiliter perturbatur à Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, ellipſin circum Solem in umbilico poſitum percurrit; &, radio ad ſolem ducto, areas in eâdem temporibus proportionales deſcribit; Terra verò circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur (ee).

P R O P.

(dd) Vide Tabulas Halleii Fff. 2. paginâ verſâ.
(ee) De Syſtem. Mund. § 29.
(ff) De Syſtem. Mund. § 30.



(gg) Exponatur data quævis recta A; ſit alia a quæ ad illam A rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ terreſtris, qualem dato quovis temporis ſpatio, puta centum annis, vis Jovis effecerit, ad motum angularem habet, quem eodem temporis ſpatio vis Jovis in Aphelio orbitæ Martis effecerit. Motus autem angulares dico, quales è centro Solis, in mediâ corporis cujuſque à Sole diſtantiâ, cernerentur. Dico A ad a rationem habere ſuſquiplicatam ejus, quam diſtantia ſtel-
læ Martis à Sole media ad mediam Telluris ab eodem diſtantiam habet. Capiatur recta B, quæ
habeat ad A rationem eam, quam motus angularis, quem ſpatio converſionis ſtellæ Martis cir-
cum Solem vis Jovis in Aphelio orbitæ ejus ſtellæ effecerit, ad motum angularem ejuſdem Aphelii
â vi Jovis, dato quale poſuimus temporis ſpatio, efficiendum. Capiatur alia b quæ ad illam

B ra-

P R O P. XIV. T H E O R. XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quieſcunt.

Aphelia quieſcunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem libri Prop. I. &, quieſcentibus planis, quieſcunt Nodi. Attamen à planetarum revolventium & cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hîc contemni poſſunt (ff).

Corol. 1. Quieſcunt etiam ſtellæ fixæ, propterea quòd datas ad Aphelia Nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque cùm nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis, ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum, ob immenſam corporum diſtantiam, nullos edent ſenſibiles effectus in regione ſyſtematis noſtri. Quinimo Fixæ, in omnes cœli partes æqualiter diſperſæ, contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

Cùm planetæ ſoli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parùm agant in ſe invicem: horum Aphelia & Nodi quieſcent, niſi quatenus à viribus Jovis, Saturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et inde colligi poteſt, per Theoriam gravitatis, quòd horum Aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu Fixarum, idque in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à Sole (gg). Ut ſi

Aphelium

B rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ Terreſtris unius anni ſpatio à vi Jovis efficiendus, ad motum angularem Aphelii orbitæ Martis, qualem converſionis integræ ſtellæ Martis ſpatio vis Jovis in eo effecerit. Ità b ad a rationem habebit eam, quam motus angularis annuus Aphelii orbitæ Terreſtris, à vi Jovis oriundus, ad motum ejuſdem Aphelii, dato quali poſuimus temporis ſpatio, conficiendum. Sit recta C, quæ ad duas alias, P, p, rationes habeat quas datum temporis ſpatium, quo conficiuntur motus A, a, ad annos, ſi ita loqui liceat, Martialem et Terreſtrem ſingulatim. Jam cùm A et B ſint ut ſpatia motu æquabili, temporibus quæ ſunt ut C, P, conficienda, erit A ad B ut C ad P; vel ut rectangulum C × P ad quadratum ex P. Et cùm B et b ſint ut motus angulares, quos in apheliis Martis et Telluris vis Jovis, annorum Martialis Terreſtriſque ſpatiis, ſingulatim effecerit; et cùm anni illi ſint ut P, p, erit B ad b ut P^2 ad p^2. (Princip. Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 16.) Rurſum cùm b & a ſint ut ſpatia motu æquabili (nam de mediis Apheliorum motibus hîc agitur) temporibus quæ ſunt ut p, C conficienda, erit b ad a ut p ad C, vel ut quadratum ex p ad rectangulum C × p.

Cùm igitur ſit $A : B = C \times P : P^2$; et $B : b = P^2 : p^2$; et $b : a = p^2 : p \times C$; ex æquo erit $A : a = P : p$.

Motus

Aphelium Martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu Fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc Propoſitione.

PROP. XV. PROB. I.

Invenire Orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſeſquiplicatâ temporum periodicorum, per Prop. xv. Lib. 1. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. 1.

PROP. XVI. PROB. II.

Invenire orbium Eccentricitates & Aphelia.

Problema conſit per Prop. XVIII. Lib. 1.

PROP.

Motus igitur angulares, quos in orbitarum Martialis Terreſtriſque apheliis, dato quovis temporis ſpatio, vis Jovis effecerit, ii temporum, quibus Martis Telluriſque globi converſiones ſuas ſingulatim abſolvunt, inter ſe rationem habent. Quæ autem temporibus illis ratio intercedit, ea ſeſquiplicata eſt ejus, quæ orbitarum axibus tranſverſis. (Lib. 1. Prop. xv.) Motus igitur apheliorum angulares, à vi Jovis, rationem inter ſe habent diſtantiarum planetarum à Sole ſeſquiplicatam. Simili argumento concludemus motus angulares, à vi Saturni oriundos, eandem ſequiplicatam diſtantiarum rationem inter ſe ſervare. Quare et motus integri, à viribus illis conjunctis oriundi, eandem inter ſe rationem gerent. Q. E. D.

Ita ni fallor firmiſſimis rationibus geometricis probavimus, quæ de ſequiſplicatâ diſtantiarum ratione inter motus Apheliorum ſervandâ Newtonus pronuntiavit. Num igitur injuriâ dixero deliráſſe planè virum clariſſimum J. Bernouillum, cùm Newtonum dicat “ nullo fundamento merâ-“ que apparentiâ nixum videri in conſtituendâ hâc ratione ſeſquiplicatâ.” (Differt. de Syſtem. Carteſii.)

([hh]) *Ex Inſtitutionibus Aſtronomicis Nicolai Mercatoris, p. 285 & ſeq.*

“ Obſervatum eſt, quod præter motum in longitudinem & latitudinem, qualem Lib. 1. Sect.
“ II. expoſuimus, habeat quoque varias librationes circa ſui centrum, quibus maculæ transfe-
“ runtur à medio orbe in ortum, occaſum, ſeptentrionem & auſtrum; & dum aliæ ex parte il-
“ luminatâ tranſeunt in obſcuram, aliæ contrà emergunt ex obſcurâ, & in lucidam concedunt.
“ Adhibito globo terreſtri, & elevato polo boreo ad ipſum Zenith, elige inſulam quandam ſub
“ æquatore ſitam, v. gr. D. Thomæ, quam ipſi cardini auſtri adjunges, ubi Meridianus Hori-
“ zontem ſecat, & oculum tenebis in rectâ à centro per dictam inſulam continuatâ. Tum co-
“ gitato, hanc inſulam referre maculam Lunarem in ipſo centro diſci poſitam; & voluto globo
“ verſus ſiniſtram, donec Inſula ſeptem circiter gradûs conficiat in Horizonte, videbis omnes re-

“ liquas

PROP. XVII. THEOR. XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motûs Legem 1. & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. 1. Jupiter utique reſpectu fixarum revolvitur horis 9. 56′; Mars horis 24. 39′; Venus horis 23 circiter; Terra horis 23. 56′; Sol diebus 25½, & Luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita ſe habere ex phænomenis manifeſtum eſt. Maculæ in corpore Solis ad eundem ſitum in diſco ſolis redeunt diebus 27½ circiter, reſpectu Terræ; ideoque reſpectu fixarum Sol revolvitur diebus 25½ circiter. Quoniam verò Lunæ, circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt: hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus ſemper reſpiciet quamproximè, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc eſt libratio Lunæ in longitudinem: nam libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine Lunæ & inclinatione axis ejus ad planum Eclipticæ. Hanc librationis lunaris Theoriam D. N. *Mercator*, in Aſtronomiâ ſuâ initio anni 1676 editâ, ex literis meis pleniùs expoſuit ([hh]). Simili motu extimus Saturni ſatelles circa axem ſuum

revolvi

“ liquas partes telluris conſpicuas eodem motu vergere in ortum. Mox reductâ inſulâ ad Meri-
“ dianum, & porro ad dextram ſeptem gradibus, videbuntur omnes partes globi conſpicuæ ver-
“ gere in occaſum. Talis eſt libratio Lunæ in ortum & occaſum; quæ abſolvitur, dum Luna
“ ab Apogeo redit ad Apogeon, perambulans octavam circiter partem diametri Lunaris prope
“ centrum. Rurſus dictam inſulam pone ſub Meridiano; & fixo globo, move polum ultra &
“ citra verticem ad ſeptem vel octo graduum ab eo diſtantiam; tum videbis, & inſulam, & re-
“ liquas partes globi nunc in ſeptentrionem abſcedere, nunc rurſus in auſtrum nutare. Atque
“ hujuſmodi eſt libratio Lunæ in ſeptentrionem & auſtrum, quæ abſolvitur, dum Luna à Nodo
“ aſcendente revertitur ad eundem, & quam non ineptè vocaveris *librationem in latum*, eſtque
“ priori illâ *in longum* aliquantò major. Cæterùm hæ duæ librationes Lunæ ſunt ſolutæ, nulli
“ cum Sole congreſſui alligatæ, quanquam earum prior ab inæqualitate Lunæ menſtruâ nonni-
“ hil angetur in quadraturis. Tertia verò reſpicit partem Lunæ illuminatam & obſcuram, ideó-
“ que partim phaſibus menſtruis, partim verò ſitui nodorum accepta ferenda eſt. Concipietur
“ autem quodammodo, ſi polum utrumque globi terreſtris deponas in Horizonte ligneo, ita ut
“ alteruter eorum referat maculam in centro diſci Lunaris, & oculum teneas in axe continuato;
“ Meridianum verò intelligas referre circulum illuminationis, qui diſcernat hemiſphærium Lunæ
“ obſcurum ab illuminato, & ſit (phantaſiæ juvandæ gratiâ) pars ad lævam luci Solis expoſita,
“ dum altera verſatur in umbrâ; & nequid deſit, pone primum Meridianum terreſtrem ſub Me-
“ ridiano æneo. Jam ſi pauluſum dimoveas Meridianum primum ab æneo verſus lævam, videbis
“ partes ſuperiores globi excedere è tenebris, & in lucem erumpere, dum inferiores è luce in
“ tenebras abſcedunt: factâque reciprocatione, ſi revolvas primum Meridianum ad æneum, &
“ ultrà ad dextram; contrarium evenire. Hæc libratio ſecundum Hevelium 5 circiter gradibus
“ continetur, in limbo Lunæ computandis.

“ Harum tam variarum atque implicitarum Librationum cauſas Hypotheſi elegantiſſimâ ex-

“ plicavit

revolvi videtur, eâdem sui facie saturnum perpetuò respiciens. Nam circum saturnum revolvendo, quoties ad orbis sui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri cessat: id quod evenire potest per maculas quasdam, in eâ corporis parte quæ Terræ tunc obvertitur, ut *Cassinus* notavit. Simili etiam motu satelles extimus jovialis circa axem suum revolvi videtur, propterea quòd in parte corporis Jovi aversâ maculam habeat, quæ tanquam in corpore Jovis cernitur, ubicunque satelles inter Jovem & oculos nostros transit.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Axes planetarum diametris, quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur, minores esse.

Planetæ, sublato omni motu circulari, diurno figuram sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit, ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia, si fluida sit, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit; axem verò, descensu suo ad polos, diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus Astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argumento,

“ plicavit nobis Vir Cl. Isaac Newton, cujus Humanitati hoc & aliis nominibus plurimum debere me lubens profiteor. Hanc igitur hypothesin, Lectori gratificaturus, exponam verbis, ut potero; nam delineationes in plano vix sufficiunt huic negotio, præterquam quòd iis jam abundat hoc enchiridion. Itaque reversus ad globum, cogita nunc illum repræsentare sphæram, in quâ movetur Luna, cujus centrum occupet Tellus. Ipsum verò Lunæ globum credito polis & axe suo instructum, circa quem revolvatur motu æquabili semel mense siderio, dum à Fixâ aliquâ digressa ad eandem revertitur; & æquator Lunaris ad firmamentum continuatus intelligatur congruere plano Horizontis lignei, & polus æquatoris Lunaris in firmamento immineat polo boreo globi ad Zenith elevato. Orbitam verò Lunæ concipito partim supra Horizontem ligneum attolli, partim verò infra eundem deprimi; quemadmodum in hoc situ globi conspicitur Ecliptica (licèt angulus Æquatoris Lunaris & ejus Orbitæ fortè non sit æquè magnus, atque hic, quem globus exhibet). Deinde finge tibi globulos duos æquales; quorum uterque Polis, Æquatore, & Meridiano unico primario insigniatur; & uterque filo suspendatur alterutri polorum alligato. Horum alter referat Lunam fictitiam motu æquabili secundum ductum Horizontis lignei circumlatam, atque eodem tempore circa axem suum revolutam respectu firmamenti; ita ut planum Meridiani primarii Lunaris perpetuò transeat per centrum Terræ. Alter verò globulus, veram Lunam imitatus, in orbitâ suâ feratur motu inæquali, nunc supra Horizontem ligneum emergens, nunc rursus infra eundem descendens; ita ut planum Æquatoris hujus Lunæ veræ semper parallelum maneat plano Horizontis lignei, & planum Meridiani primarii ejusdem Lunæ veræ semper parallelum plano Meridiani primarii Lunæ fictæ. Ita fiet, ut Luna ficta eandem nobis faciem obvertens semper, nulli prorsus librationi sit ob-

“ noxia.

mento, nisi Terra nostra paulo altior esset sub æquatore quàm ad polos, maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

PROP. XIX. PROB. III.

Invenire proportionem Axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & observando differentiam latitudinum 2 *gr.* 28′ collegit mensuram gradûs unius esse pedum Londinensium 367196, id est, hexapedarum Parisiensium 57300 ([kk]).

Picartus mensurando arcum gradûs unius & 22′. 55″ in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradûs unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. *Cassinus* sentior mensuravit distantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Roussilion* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Distantia tota erat hexapedarum $486156\frac{1}{2}$, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & $31'.\ 11\frac{5}{6}''$. Unde arcus gradûs unius prodit hexapedarum Parisiensium 57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus Terræ pedum Parisiensium 123249600,

“ noxia. At Luna vera, dum à Perigeo pergit ad Apogeon, præcedens Lunam fictam, Meridianum suum primarium ostendit in medietate sinistrâ sui disci, tot gradibus abeuntem à medio, quot sunt inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. Ab Apogeo verò ad Perigeon descendens Luna vera sequitur fictam, atque tum Meridianus primus veræ Lunæ recedit ab ejus medio ad dextram; hoc est, maculæ omnes vergunt in occasum. Et cùm differentia inter mediam & veram Lunæ longitudinem in quadraturis evadat major, propter evectionem Systematis Lunaris à centro Telluris; hinc est, quòd in quadraturis librationes in longum cernuntur majores. Similiter intelligitur causa librationis in latum, quando Luna superato nodo ascendente (sive sectione Horizontis lignei & Orbitæ suæ) tendit ad limitem boreum; tum enim nobis, in centro Sphæræ positis, polus Lunæ boreus, & quæ sint circa eum maculæ, absconduntur; & polus australis cum suis maculis in conspectum venit: unde maculæ omnes conspicuæ in boream tendere videntur. Contrarium accidit, Lunâ ad limitem australem accedente. Ab iisdem causis procedit macularum ex parte lucidâ in obscuram transitus, & vicissim. Nam in limite australi polus Lunæ boreus à Sole illustratur, & quicquid est Zonæ frigidæ Arctico Lunari inclusum; dum frigida australis in tenebris versatur. Quòd si igitur Solem concipias in eadem plagâ cum limite australi, & Lunam post conjunctionem inde procedere ad nodum ascendentem; tum maculæ superiores, apud polum boreum sitæ, paulatim unà cum suo polo à luce in tenebras concedunt, dum inferiores maculæ cum nodo australi ex tenebris in lucem prorepunt. Contrarium eveniet semestri pòst, cum Sol accessit ad limitem Lunæ boreum.” Confer Lib. De Syst. Mund. § 36.

([kk]) Veriùs 57424.

&

& femidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothefi quòd Terra fit fphærica.

In latitudine *Lutetiæ Parifiorum* corpus grave tempore minuti unius fecundi cadendo defcribit pedes Parifienfes 15 dig. 1 lin. $1\frac{7}{9}$ ut fuprà, id eft, lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus pondus amiffum effe partem undecimam millefimam ponderis totius, & corpus illud grave, cadendo in Vacuo, defcribet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius fecundi.

Corpus in circulo, ad diftantiam pedum 19615800 à centro, fingulis diebus fidereis horarum 23. 56'. 4" uniformiter revolvens, tempore minuti unius fecundi defcribet arcum pedum 1433,46 (ll), cujus finus verfus eft pedum 0,0523656, feu linearum 7,54064 (mm). Ideoque vis, quâ gravia defcendunt in latitudine *Lutetiæ*, eft ad vim centrifugam corporum in æquatore, à Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064 (nn).

Vis centrifuga corporum in æquatore Terræ eft ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à Terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50'. 10", in duplicatâ ratione radii ad finum complementi latitudinis illius, id eft, ut 7,54064 ad 3,267 (oo). Addatur hæc vis ad vim quâ gravia defcendunt in latitudine illâ *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ, vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius fecundi defcribet lineas 2177,267 (pp), feu pedes

(ll) Verius ni fallor 1430,4.
(mm) Veriùs pedum 0,0519151, feu linearum 7,47577.
(nn) Ut 2174 ad 7,47577.
(oo) Ut 7,47577 ad 3,23885.
(pp) 2177,239, feu pedes Parifienfes 15, dig. 1, lin. 5,239.
(qq) Ut 2177,239 ad 7,47577.
(rr) 291,2 ad 1. Si igitur numeris quod aiunt rotundis rationem vis totius gravitatis Lutetiæ ad vim centrifugam corporum fub æquatore eam ftatueris, quam numerus 290 ad unitatem habet, haud multum à vero ut opinor aberraveris.

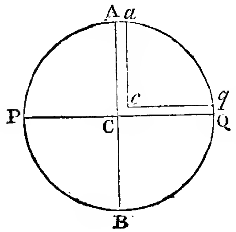
(ss) Ad vires æftimandas quibus Terra corpufculum in polo Q pofitum verfus centrum fui, C, trahat, intelligatur punctum P, in figurâ Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I. evanefcente rectâ PA, cum ipfo A conjungi. Ita fient PS, AS æquales; & vires, quibus fphærois ACBG corpufculum in A vel P pofitum in centrum fui trahat, ad vires quibus fphæra, diametro AB fcripta, idem corpufculum incitaret, rationem habebunt quam $\frac{AS \times CS^2 - AS \times \overline{KMRK}}{CS^2}$ ad $\frac{1}{3}AS$, five eam quam $CS^2 - KMRK$ ad $\frac{1}{3}CS^2$. Dato igitur quadrato ex CS, ad virium æftimationem opus erit definire aream KMRK, five AMA, fig. p. 38. Hunc in finem fectio conica, ARM fpecie et magnitudine definienda erit.

Jam verò (in fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I.) fi fphæroideos axis AB diametro ejus CG fit minor, fectio conica KRM Ellipfis erit. Sit Z centrum ejus (fig. p. 38). Erit ZA femiaxis ejus tranfverfus. Ponatur Zr femiaxis fecundus. E naturâ Ellipfeos erit $ZA^2 - ZB^2 : ZA^2 - ZS^2 = BM^2 : ST^2$.

Convertendo

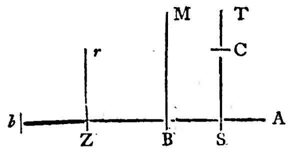
pedes Parifienfes 15 dig. 1 & lin. 5,267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2177,267 ad 7,54064 (qq) feu 289 ad 1 (rr).

Unde fi APBQ figuram Terræ defignet jam non amplius fphæricam, fed revolutione ellipfeos circum axem minorem PQ genitam, fitque ACQ*qca* canalis aquæ plena, à polo Q*q* ad centrum C*c*, & inde ad æquatorem A*a* pergens: debebit pondus aquæ, in canalis crure AC*ca*, effe ad pondus aquæ in crure altero QC*cq* ut 289 ad 288; eo quòd vis centrifuga, ex circulari motu orta, partem unam è ponderis partibus 289 fuftinebit ac detrahet, & pondus



288 in altero crure fuftinebit reliquas. Porro (ex Propofitionis XCI. Corol. 2. Lib. I.) computationem ineundo, invenio quòd fi Terra conftaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, & effet ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram foret ad gravitatem in eodem loco Q in fphæram, centro C, radio PC vel QC defcriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in fphæroidem, convolutione ellipfeos APBQ circa axem AB defcriptam, eft ad gravitatem in eodem loco A in fphæram centro C radio AC defcriptam, ut 125 ad 126 (ss). Eft autem gravitas in loco A in Terram media proportionalis inter gravitates in dictam fphæroidem

Convertendo & invertendo $ZS^2 - ZB^2 : ZA^2 - ZB^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Hoc eft, fi capiatur $Zb = ZB$, $bS \times BS : bA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.



Invertendo $bA \times AB$, five $2bA \times SB : bS \times SB = BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Sive $2bA : bS = BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Quare $bA : bS = \frac{1}{2}BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Dividendo $AS : Sb = ST^2 - \frac{1}{2}BM^2 : BM^2 - ST^2$.
Sed punctis P, A (in fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I.) coeuntibus, erunt illæ BM, ST ipfis AB, AC æquales.
Quare $AS : Sb = AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 : AB^2 - AC^2$.
Sed $AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 = AS^2 + SC^2 - 2AS^2 = SC^2 - AS^2$.

Quare $AS : Sb = SC^2 - AS^2 : AB^2 - AC^2$.

Quare $Sb = \frac{AB^2 - AC^2}{SC^2 - AS^2} AS$.

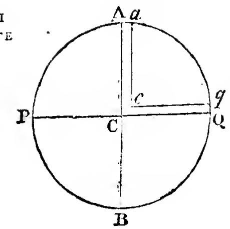
Ponatur $AB^2 - AC^2 = p$, & $SC^2 - AS^2 = q$.

Erit igitur $Sb = \frac{p}{q} AS$: et $Bb = \frac{p}{q} AS - AS$. Quare $ZB = \frac{p}{2q} AS - \frac{1}{2} AS$.

Quare $ZA = \frac{p}{2q} AS + \frac{3}{2} AS = \frac{p + 3q}{2q} AS$.

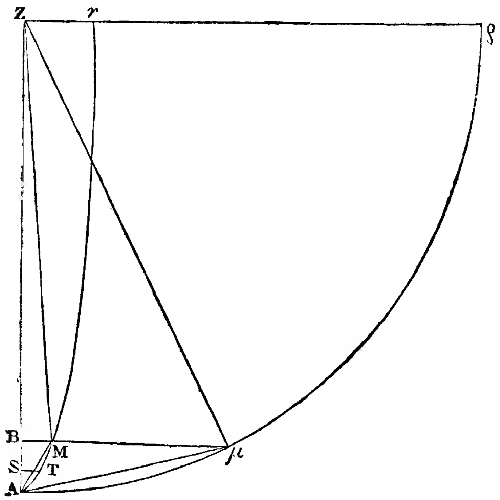
Vel, pofito $p + 3q = r$, $ZA = \frac{r}{2q} AS$. Unde datis AS, SC dabitur ZA.

Jam



ſphæroidem & ſphæram: propterea quòd ſphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura, diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in A, in caſu utroque,

Jam $ZA^2 : zr^2 = ZA^2 - ZB^2 : BM^2$ vel AB^2.
Permutando $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = zr^2 : AB^2$.
Sed $ZA^2 : ZB^2 = r^2 : p^2 - 2pq + q^2$.
Quare $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = r^2 : r^2 - p^2 + 2pq - q^2$.
Sed $r^2 = p^2 + 6pq + 9q^2$.
Quare $r^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 8pq + 8q^2$.
Quare $ZA^2 : ZA^2 - ZB^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$.
Hinc $zr^2 : AB^2$ vel $4AS^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$. Quare $zr^2 : AS^2 = r^2 : 2pq + 2q^2$.
Sed $AS^2 : ZA^2 = 4q^2 : r^2$.
Ex æquo perturbatè $zr^2 : ZA^2 = 2q : p + q$.
Unde $zr : ZA = \sqrt{2}\sqrt{q} : \sqrt{p+q} = \sqrt{2}\sqrt{SC^2 - AS^2} : \sqrt{2AS^2}$.
Invertendo $ZA : zr = AS : \sqrt{SC^2 - AS^2}$.



Datis igitur AS, SC, propter ZA jam antè inventam, dabitur etiam zr.

Centro Z, radio ZA, ſcribatur circulus; qui rectis zr, BM in punctis ϱ, μ occurrat: et jungatur $A\mu$.

Jam datis ZA, ZB, dabitur ſector circularis $ZA\mu$, necnon triangulum $Z\mu A$. Dabitur igitur ſegmentum circuli $A\mu A$, quo triangulum illud à ſectore abeſt. Dato autem ſegmento circulari $A\mu A$, dabitur Ellipticum AMA, quod ad circulare datam rationem habet, quam zr ad ZA.

Ponatur jam $AS = 100$, $SC = 101$; ut ſphærois ACBG (fig. Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I.) figuram induat, quam Newtonus Terræ poſuit.

Ita erit $p = 3 \times \overline{100}|^2 - \overline{101}|^2$

$q = \overline{101}|^2 - \overline{100}|^2 = 201$

$3q = 3 \times \overline{101}|^2 - 3 \times \overline{100}|^2$

$r = p + 3q = 2 \times \overline{101}|^2$

$\frac{r}{2q} = \frac{\overline{101}|^2}{201}$

Quare $ZA = 5075,12$.

Rurſum

que, diminuitur in eâdem ratione quàm proximè. Eſt igitur gravitas in A in ſphæram, centro C radio AC deſcriptam, ad gravitatem

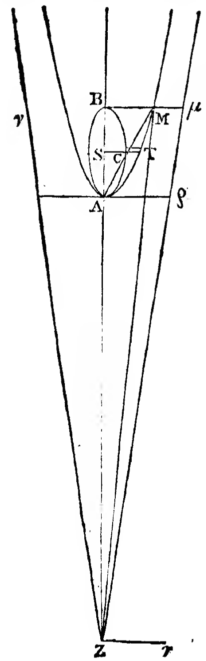
Rurſum cùm ſit $ZA : zr = AS : \sqrt{SC^2 - AS^2} = 100 : \sqrt{201} =$ erit $zr = 719,523$.
Rurſum $ZB = ZA - AB = 5075,1 - 200 = 4875,1$.

Hinc arcus $A\mu$, cujus eſt coſinus ZB pro radio ZA, $= 16^{\circ} - 8' - 20''$.
Quare ſector circularis $ZA\mu = 3627522$.
Sed $B\mu$, ſinus arcûs $A\mu$ pro radio ZA, $= 1410,7$
Quare triangulum $Z\mu A = 3579744$.
Hinc ſegmentum circulare $A\mu A = 47778$.
Et ſegmentum Ellipſeos AMA, cùm ad ſegmentum circulare rationem habeat quam zr ad ZA, hoc eſt eam quam 719,5 ad 5075,1; idcirco $AMA = 6773,7$.

Jam verò $CS^2 = 10201$.
Quare $CS^2 - AMA = 3427,3$.
Sed $\frac{CS^2}{3} = 3400,3$.
Quare $CS^2 - AMA : \frac{CS^2}{3} = 3427,3 : 3400,3 = 125,99 + : 125 = 126 : 125$ quam proximè.

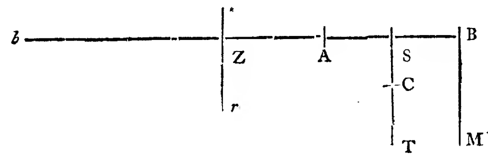
Vires igitur, quibus Terra corpuſculum in Polo poſitum verſus centrum incitaret, ſi talis ejus figura eſſet, qualem ad computationem faciliùs ineundam Newtonus poſuit, eæ ad vires quibus polleret ſphæra, quæ ipſum axem diametrum haberet, rationem eam, quæ à Newtono allegata eſt, ſatis exquiſitè ſervarent.

Vires autem, quibus ſphærois converſione meridiani terreſtris circa diametrum æquatoris generata corpuſculum, in diametri illius extremitate poſitum, in centrum urgeret, ad vires ſphæræ, quæ æquatorem terreſtrem circulum in ſuis maximum haberet, rationem modò allegatæ contrariam gerere, calculis ſimiliter ſubductis oſtendemus.



Nempe in figurâ Cor. 2. Prop. XCI. Lib. I. ſi axis ſphæroideos AB diametro ejus CG ſit major, ſectio conica KRM ſeu ARM Hyperbola erit. Sit Z centrum ejus, ut ſit ZA ſemiaxis tranſverſus, & ponatur zr ſemiaxis ſecundus. Sint rectæ $z\mu$, $z\nu$ ejuſdem aſymptotæ; quarum alteri occurrat BM in μ. Eidem in ϱ occurrat recta $A\varrho$, quæ hyperbolam in vertice A contingat. Jungatur ZM.

Jam è naturâ Hyperbolæ $ZB^2 - ZA^2 : ZS^2 - ZA^2 = BM^2 : ST^2$.
Convertendo & invertendo $ZB^2 - ZS^2 : ZB^2 - ZA^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$.



Hoc eſt poſitis ZB, zb æqualibus, $bS \times SB : bA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Id eſt $bS \times SB : 2bA \times SB = BM^2 - ST^2 : BM^2$.
Quare $bS : 2bA = BM^2 - ST^2 : BM^2$. Et $bS : bA = BM^2 - ST^2 : \frac{1}{2}BM^2$.
Convertendo et invertendo $AS : Sb = \frac{1}{2}BM^2 - ST^2 : BM^2 - ST^2$.
Id eſt $AS : Sb = \frac{1}{2}AB^2 - AC^2 : AB^2 - AC^2 = AS^2 - SC^2 : AB^2 - AC^2$.
Hinc $Sb = \frac{AB^2 - AC^2}{AS^2 - SC^2} AS$.
Ponatur $AB^2 - AC^2 = p$. Et $AS^2 - SC^2 = q$.
Tum $Sb = \frac{p}{q} AS$. Et $Bb = \frac{p}{q} AS + AS$.

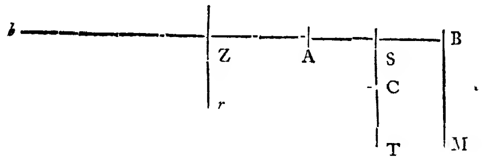
Quare

DE MUNDI SYSTEMATE

vitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$; & gravitas in loco Q in ſphæram, centro C radio QC deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco A in ſphæram, centro C radio AC deſcriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id eſt, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500 (tt).

Jam cùm (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis ACca, vel QCcq, ſit ut diſtantia locorum à centro Terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure ACca ad pondera partium totidem in crure altero

Quare $ZB = \frac{p}{2q}AS + \frac{1}{2}AS$. Et $ZA = ZB - AB = ZB - 2AS = \frac{p}{2q}AS - \frac{3}{2}AS = \frac{p-3q}{2q}AS$. Vel poſito $p - 3q = r$, $ZA = \frac{r}{2q}AS$.



Unde datis AS, SC dabitur ZA.

Jam $ZA^2 : Zr^2 = ZB^2 - ZA^2 : BM^2$ vel $4AS^2$. Permutando $ZA^2 : ZB^2 - ZA^2 = Zr^2 : 4AS^2$.
Sed $ZA^2 : ZB^2 = r^2 : p^2 + 2pq + q^2$.
Quare $ZA^2 : ZB^2 - ZA^2 = r^2 : p^2 + 2pq + q^2 - r^2$.
Sed $r^2 = p^2 - 6pq + 9q^2$. Quare $p^2 + 2pq + q^2 - r^2 = 8pq - 8q^2$.
Quare $ZA^2 : ZB^2 - ZA^2$, ſive $Zr^2 : 4AS^2$, $= r^2 : 8pq - 8q^2$.
Quare rurſum $Zr^2 : AS^2 = r^2 : 2pq - 2q^2$.
Sed $AS^2 : ZA^2 = 4q^2 : r^2$.
Ex æquo perturbatè $Zr^2 : ZA^2 = 2q : p - q$.
Invertendo $ZA^2 : Zr^2 = p - q : 2q = 2AS^2 : 2AS^2 - 2SC^2$.
Quare $ZA : Zr = AS : \sqrt{AS^2 - SC^2}$.
Datis igitur AS, SC, propter ZA jam ſuprà inventam, dabitur etiam Zr.

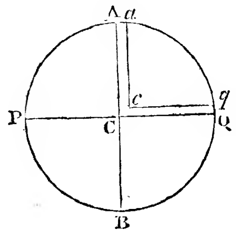
Jam datarum ZA, ZB ratio dabitur. (Dat. 1.) Quare et illarum $A\varrho$, $B\mu$ (fig. p. 39) ratio data. Sed $A\varrho$ magnitudine data eſt, nempe datæ Zr æqualis. Quare $B\mu$ magnitudine dabitur (Dat. 2.) Sed BM magnitudine data eſt, quippe datæ AB æqualis. Quare μM magnitudine data. Datarum igitur μM, $A\varrho$ ratio data. (Dat. 1.) Sed hujus rationis ſector hyperbolicus AZM eſt logarithmus, pro modulo utique triangulari $ZA\varrho$. Sed datis ZA, $A\varrho$, triangulum $ZA\varrho$ magnitudine datum. Quare ſector hyperbolicus ZAM magnitudine datus. Sed triangulum ZAM magnitudine datum, propter datas ZA, BM. Segmentum igitur hyperbolicum AM, quo ſector hyperbolicus à triangulo abeſt, magnitudine datum.

Ponatur jam $AS = 101$
$SC = 100$;
nempe ut ſphærois ACBG ejus ſphæroideos figuram induat, quam meridianus terreſtris, eâ figurâ præditus quam Newtonus poſuit, circum axem ſuum tranſverſum convertendo generaverit.

2 Ita

LIBER TERTIUS.

altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501.



Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure ACca, ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea Fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verùm vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289; hoc eſt, vis centrifuga, quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$, eſt tantùm pars $\frac{1}{289}$. Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quòd ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure ACca ſuperet altitudinem aquæ in crure QCcq parte centeſimâ

Ita erit $p = 3 \times \overline{101}|^2 - \overline{100}|^2$
$q = \overline{101}|^2 - \overline{100}|^2 = 201$
$3q = 3 \times \overline{101}|^2 - 3 \times \overline{100}|^2$
$r = p - 3q = 2 \times \overline{100}|^2$
$\frac{r}{2q} = \frac{\overline{100}|^2}{201} = 49{,}751$

$ZA = \frac{r}{2q}AS = 49{,}751 \times 101 = 5024{,}851$.

Rurſum $ZA : Zr = AS : \sqrt{AS^2 - SC^2} = 101 : \sqrt{\overline{101}|^2 - 100^2} = 101 : \sqrt{201}$.
Quare $Zr = 705{,}34$
Jam cùm $ZA = 5024{,}851$
et $AB = 202$,
Erit $ZB = 5226{,}851$
Sed $ZA : ZB = A\varrho$ vel $Zr : B\mu$.
Quare $B\mu = 733{,}697$
Et $BM = 202$
Quare $\mu M = 531{,}697$
Triangulum $ZA\varrho = ZA \times \frac{1}{2}Zr$ $= 177212$
Quare ſector hyperbolicus ZAM $= 500816{,}4$
Triangulum $ZAM = ZA \times \frac{1}{2}BM = 5024{,}851 \times 101$ $= 507509{,}9$
Quare ſegmentum hyperbolicum AMA $= 6693{,}5$
Sed CS^2 $= 10000$
Quare $CS^2 - AMA$ $= 3306{,}5$
Sed $\frac{1}{3}CS^2$ $= 3333{,}3$

Quare vires, quibus ſphærois BCAG trahit corpuſculum in A poſitum, ad vires ſphæræ, cujus diameter AB, rationem habent quam 3306,5 ad 3333,3. Sed $3306{,}5 . 3333{,}3 = 125 : 126{,}014 = 125 : 126$ propemodum.

(tt) NIMIRUM cùm gravitas in Terram in loco Q ſit ad gravitatem in ſphæram, cujus radius QC, ut 126 ad 125; et gravitas in hanc ſphæram in loco Q ad gravitatem in ſphæram alteram, cujus radius AC in loco A, ut 100 ad 101; et gravitas in hanc alteram ſphæram ad gravitatem in Terram in loco A ut 126 ad $125\frac{1}{2}$; ex æquo Gravitas in Terram in loco Q erit ad gravitatem in Terram in loco A ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$; ſive ut $126 \times 126 \times 4$ ad $5 \times 125\frac{1}{2} \times 101$; ſive ut 63504 ad 63377,5. Sed 63377,5 ad 63504 ut 500 ad 500,998+, ſive ut 500 ad 501 propemodum. Quare Gravitas in Terram in loco Q ad gravitatem in Terram in loco A ut 501 ad 500.

 totius

De Mundi Systemate

totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure ACca sit altitudinis in crure altero QCcq pars tantùm $\frac{1}{229}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cùm Terræ semidiameter mediocris, juxta mensuram *Picarti*, sit pedum Parisiensium 19615800, seu milliarium 3923,16 (posito quòd milliare sit mensura pedum 5000) Terra altior erit ad æquatorem quam ad polos excessu pedum 85472, seu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si Planeta major sit vel minor quàm Terra, manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem; & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione; & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ, vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cùm Terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & revolventium densitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè (uu). Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cùm ejus diameter major sit 37″, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33″. 25‴. Pro luce erraticâ addantur 3″ circiter; & hujus planetæ diametri apparentes evadent 40″ & 36″. 25‴: quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita se habet ex hypothesi quòd corpus Jovis sit uniformiter densum. At si corpus ejus sit densius versus planum æquatoris quàm versus polos, diametri ejus possunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel fortè 14 ad 13. Et

Cassinus

(uu) Veriùs ut 1 ad 9,4; modò in corporibus Terræ Jovisque ea sit densitatum ratio quam nos

suprà

Liber Tertius.

Cassinus quidem anno 1691 observavit, quòd Jovis diameter, ab oriente in occidentem porrecta, diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ. *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros Jovis, anno 1719, mensuravit ut sequitur.

Tempora.			Diam. max.	Diam. min.	Diametri ad invicem.	
	dies	hor.	part.	part.		
Jan.	28	6	13,40	12,28	ut 12	ad 11
Mar.	6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
Mar.	9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr.	9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur Theoria cum phænomenis. Nam Planetæ magis incalescunt ad lucem Solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quàm versus polos.

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam Terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo Terram ibi altiùs surgere quàm ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta Pendulorum, quæ recensentur in Propositione sequente.

PROP. XX. PROB. IV.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in Terræ hujus regionibus diversis.

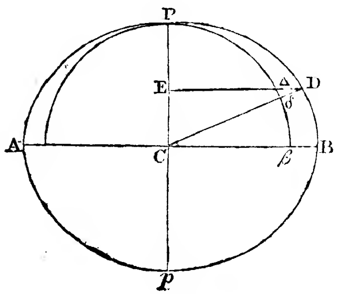
Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aquæ ACQqca æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut distantiæ corporum à centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ, consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut distantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciprocè ut distantiæ

suprà constituimus; ut densitas Jovis sit ad densitatem Terræ ut 10 ad 42. Vide suprà Not. v.

locorum

locorum à centro; & propterea, ex hypothesi quòd Terra sphæ-rois sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema; quòd incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ; vel quod perinde est, ut quadratum sinûs recti latitudinis. Et in eâdem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano (xx). Ideoque cùm latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit $48^{gr}. 50'$, ea locorum sub æquatore $00^{gr}. 00'$, & ea locorum ad polos 90^{gr}. & duplorum sinus versi sint 11334,00000 & 20000, existente radio 10000; & gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad polum



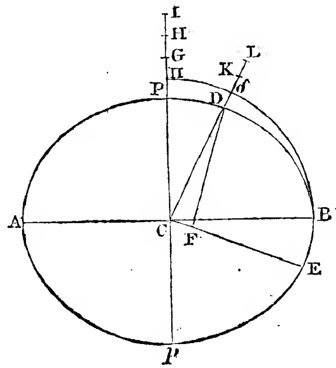
(x) ELLIPSIS cujus centrum C, axis transversus AB, secundus Pp, meridianum aliquem è terrestribus referat: ut sint P, p poli telluris, B, locus aliquis in æquatore. Sit D locus aliquis in meridiano $PBpA$, inter polum & æquatorem, & jungatur CD. In locis B, D, P collocari puta corpora tria inter se æqualia ex materiâ simili. Jam cùm pondera horum corporum rationem inter se gerant distantiarum eorum à centro C contrariam; distantiarum autem maxima sit CB, minima CP, maximæ minimæque intermedia quædam CD; et eo minor cùm sit CD quo minor distantia loci D à polo: hæc cùm ita sint, corporis quod in B situm est pondus minimum erit; ejus quod in P, maximum; ejus quod in D, majus quidem pondere corporis quod in B, minus autem quàm ejus quod in P; eo autem majus quo minor loci D à polo distantia. Dicit Newtonus, illud quo pondus corporis in D exsuperat pondus corporis in B esse ut quadratum ex sinu latitudinis loci; id est, illud quo pondus corporis in polo P exsuperat pondus ejus quod in B, ad illud quo pondus corporis in D exsuperat pondus ejus quod in B, rationem habere quam quadratum radii ad quadratum ex sinu latitudinis loci D; sive ad quadratum ex sinu anguli BCD. Nam cùm Ellipsis $BPAp$ parum admodum à Circulo recedat, angulus BCD angulo latitudinis loci D tantùm non æqualis erit.

A puncto D in axem Ellipseos secundum, AB, ad perpendiculum deducatur DE. Centro C, radio CP, scribatur circulus; qui rectis CD, ED, CB in punctis δ, Δ, β occurrat. Jam cùm pondus corporis quod in P positum est ad pondus ejus quod in B rationem habeat quam CB ad CP; id est, eam quam CB ad Cβ: dividendo, illud quo pondus illius in P pondus hujus in B exsuperat ad pondus ipsum corporis in B rationem habebit quam Bβ ad Cβ. Simili argumento efficietur, pondus corporis in B ad illud, quo abest à pondere ejus quod in D, rationem habere quam Cδ vel Cβ ad δD. Ex æquo, illud quo pondus corporis in P exsuperat ejus quod in B, ad illud quo pondus corporis in D pondus corporis in B exsuperat, rationem habebit quam Bβ ad δD. Ratio autem rectæ Bβ ad δD composita est è rationibus rectæ Bβ ad ΔD, rectæque ΔD ad Dδ. Sed propter Ellipsin, Bβ crit ad ΔD ut CB ad DE. Et cùm Ellipsis à circulo parum admodum recedat, figura DΔδ à triangulo DCE specie parum differt, et ratio rectæ ΔD ad Dδ ejus, quam CD habet ad DE, haud multùm absimilis erit. Quare ratio rectæ βB ad Dδ haud multum ab eâ aberit, quæ componitur è rationibus rectæ CB ad DE rectæque CD ad DE, sive eam quæ est rectanguli CB × CD ad quadratum ex DE. Sed, propter CB, CD tantùm non æquales, rectangulum CB × CD quadrato ex CD tantùm non æquale. Ratio igitur rectæ Bβ ad Dδ eam, quæ est quadrati ex CD ad quadratum ex DE, proximè referet. Et CD ad DE (propter figuram Ellipseos $BPAp$ à circulari parùm abhorrentem) rationem habebit ab eâ, quæ est radii ad sinum latitudinis loci D, parùm diversam. Est igitur Bβ ad Dd, sive illud quo pondus corporis in polo pondus ejus quod in æquatore exsuperat, ad illud quo pondus corporis in loco D pondus ejus quod in æquatore exsuperat, ut quadratum radii

polum ad gravitatem sub æquatore ut 1 ad 229: erit excessus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cùm longitudines Pendulorum, æqualibus temporibus oscillantium, sint ut gravitates; & in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo Penduli, singulis minutis secundis oscillantis, sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius, ob pondus Aëris, $8\frac{5}{9}$: longitudo Penduli sub æquatore superabitur à longitudine synchroni Penduli Parisiensis, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo consit Tabula sequens.

radii ad quadratum ex sinu latitudinis loci D. Q. E. D.

SED dicit etiam Newtonus, incrementis Graduum in meridiano eandem ferè rationem intercedere. Id nos etiam sic ostendimus.



Ellipsis $BPAp$ ut priùs referat meridianum terrestrem; ut sint P, p poli, B locus aliquis in æquatore. Sit D, locus aliquis in meridiano $BPAp$ inter polum et æquatorem. Jungatur CD, & ducatur Ellipseos semidiameter CE illius CD conjugata; et à puncto D in CE ad perpendiculum deducatur DF. Circulus, centro C, radio CB scriptus, rectis CP, CD in punctis Π, δ occurrat. Capiatur CG ad quam CΠ, et CH ad quam CG, et CI ad quam CH rationem habeat quam CP ad CΠ, vel CD. Rursum capiatur CK ad quam Cδ, et CL ad quam CK rationem habeat quam ED ad Cδ.

Longitudinem gradûs meridiani sub ipso P ad longitudinem gradûs circa B rationem habere triplicatam ejus quam CB vel CΠ ad CP, sive eam quam CH ad CP, ex Conicis notissimum est. Necnon longitudinem gradûs meridiani circa B ad longitudinem ejus qui circa D, rationem habere rectæ CP ad CE triplicatam. Quare et dividendo, longitudo illa quâ gradus circa B abest à gradu circa D ad longitudinem ipsam gradûs circa B rationem habebit quam $CE^3 - CP^3$ ad CP^3.

Sed è naturâ Ellipseos rectangula $CP \times CB$, $DF \times CE$ inter se sunt æqualia. Quare $CP^3 : CE^3 = DF^3 : CB^3$. Sed (propter figuram Ellipseos $BPAa$ à circulari parùm abhorrentem) recta DF semidiametro CD tantùm non æqualis est. Quare et cubi ex illis DF, CD tantùm non æquales. Quare ratio CP^3 ad CE^3 à ratione ipsius CD^3 ad CB^3 vel $C\delta^3$, sive ab eâ quæ est rectæ CD ad CL, parùm aberit. Ac proinde parùm aberit, quin $CE^3 - CP^3$ ad CP^3 rationem habeat quam LD ad CD. Longitudo igitur, quâ gradus circa B abest à gradu circa D, ad longitudinem ipsam gradûs circa B rationem habebit ab eâ quæ est LD ad DC parùm diversam.

Jam verò cùm longitudo gradûs sub polo P sit ad gradum circa B ut CH ad CP, hoc est ut CI ad CΠ; dividendo, longitudo quâ gradûs sub polo P exsuperat gradum circa B erit ad gradum ipsum circa B ut IΠ ad CΠ. Et ostensum est gradum circa B ad longitudinem illam, quâ abest à gradu circa D, rationem habere ab eâ quæ est CD ad DL parum diversam. Quare longitudo quâ gradus sub ipso polo exsuperat gradum circa B ad illam, quâ gradus circa D eundem circa B exsuperat, rationem habebit ab eâ, quæ est rectanguli IΠ × CD ad rectangulum CΠ × DL, sive rectæ IΠ ad LD, parùm diversam. Parùm igitur diversam ab eâ quæ est ΠP ad Dδ. Namque propter CΠ, CP; Cδ, CD tantùm non æquales, erit IΠ = 3ΠP, & LD = 3Dδ. Ratio autem illius ΠP ad Dδ à duplicatâ ejus, quæ est radii ad sinum latitudinis loci D, parùm recedere ostensa est. Constat igitur Propositum.

Constat:

De Mundi Systemate

Latitudo loci.	Longitudo penduli.		Menfura gradûs unius in meridiano.
grad.	ped.	lin.	hexapedæ.
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Conftat autem per hanc Tabulam quòd graduum inæqualitas tam parva fit, ut in rebus geographicis figura Terræ pro fphæricâ haberi poffit: præfertim fi Terra paulo denfior fit verfus planum æquatoris quàm verfus polos.

Jam verò Aftronomi aliqui in longinquas regiones ad obfervationes aftronomicas faciendas miffi, obfervârunt quòd horologia ofcillatoria tardiùs moverentur prope Æquatorem quàm in regionibus noftris. Et primò quidem D. *Richer* hoc obfervavit, anno 1672 in infulâ *Cayennæ*. Nam dum obfervaret tranfitum Fixarum per meridianum menfe *Augufto*, reperit horologium fuum tardiùs moveri quàm pro medio motu Solis, exiftente differentiâ 2′. 28″ fingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum fimplex ad minuta fingula fecunda, per horologium optimum menfurata, ofcillaret, notavit longitudinem Penduli fimplicis; & hoc fecit

3 fæpiùs

Liber Tertius.

fæpiùs fingulis feptimanis per menfes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli Parifienfis, (quæ erat trium pedum Parifienfium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem effe, exiftente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Poftea *Halleius* nofter, circa annum 1677 ad infulam *Sanctæ Hellenæ* navigans, reperit horologium fuum ofcillatorium ibi tardiùs moveri quàm *Londini*, fed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plufquam octavâ parte digiti, feu lineâ unâ cum femiffe. Et ad hoc efficiendum, cùm longitudo cochleæ in imo parte Penduli non fufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpofuit.

Deinde anno 1682 D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli, fingulis minutis fecundis ofcillantis, in Obfervatorio Regio Parifienfi effe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in infulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem Penduli fynchroni invenerunt effe ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, exiftente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad infulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli fynchroni in his infulis effe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Pofthac D. *Couplet* filius, anno 1697, menfe *Julio*, horologium fuum ofcillatorium ad motum Solis medium in Obfervatorio Regio Parifienfi fic aptavit, ut tempore fatis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyffipponem* navigans invenit, quòd menfe *Novembri* proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, exiftente differentiâ 2′. 13″ in horis 24. Et menfe *Martio* fequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium fuum tardiùs ire quàm *Parifiis*, exiftente differentiâ 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat Pendulum, ad minuta fecunda ofcillans, brevius fuiffe *Ulyffipponi* lineis $2\frac{1}{2}$, & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quàm *Parifiis*. Rectiùs potuiffet differentias effe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4. 12 refpondent. Craffioribus hujus obfervationibus minùs fidendum eft.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes*, ad *Americam* denuò navigans, determinavit quòd in infulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli, ad minuta fecunda ofcillantis, effet paulo minor quàm ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quódque in infulâ *S. Chriftophori* longitudo

illa

De Mundi Systemate

illa esset ped. 3. lin. $6\frac{1}{4}$, & quòd in insulâ *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem Penduli, ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantùm $5\frac{7}{12}$; id est, tribus ferè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante observatione. Nam deinde ab insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli isochroni esse pedum tantùm trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est $6^{gr}. 38'$ ad austrum, & ea *Porto-beli* $9^{gr}. 33'$ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè $4^{gr}. 55'$, $14^{gr}. 40'$, $14^{gr}. 00'$, $14^{gr}. 44'$. $12^{gr}. 6'$, $17^{gr}. 19'$, & $19^{gr}. 48'$ ad boream. Et excessus longitudinis Penduli Parisiensis, supra longitudines Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quàm pro Tabulâ longitudinum Penduli superiùs computata. Et propterea Terra aliquanto altior (yy) est sub Æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem, nisi fortè calores in zonâ torridâ longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Observavit utique D. *Picartus* quòd virga ferrea, quæ tempore hyberno, ubi gelabant frigora, erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quartâ parte lineæ. Deinde D. *de la Hire* observavit, quòd virga ferrea, quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi soli æstivo exponebatur, evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quàm in posteriore, in hoc verò major fuit quàm calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad solem æstivum valdè incalescunt. At virga Penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quàm hyberno, sed excessu quartam partem lineæ unius vix

(yy) Imo humilior si hisce experimentis fidendum est. Nempe si Pendulum polare æquatoreum magis exsuperet quàm si sphærois homogenea esset, diameter æquatoris minus exsuperabit axem, &

Liber Tertius.

vix superante. Proinde differentia tota longitudinis Pendulorum, quæ in diversis regionibus isochrona sunt, diverso calori attribui non potest. Sed neque erroribus Astronomorum, è *Galliâ* missorum, tribuenda est hæc differentia. Nam quamvis eorum observationes non perfectè congruant inter se, tamen errores sunt adeo parvi, ut contemni possint. Et in hoc concordant omnes, quòd isochrona Pendula sunt breviora sub Æquatore quàm in Observatorio Regio Parisiensi, existente differentiâ non minore quàm lineæ unius cum quadrante, non majore quàm linearum $2\frac{2}{3}$. Per observationes D. *Richeri*, in *Cayennâ* factas, differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum semisse, vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minùs accuratas prodiit eadem quasi duarum linearum. Et hæc discrepantia partim ab erroribus observationum, partim à dissimilitudine partium internarum Terræ & altitudine montium, & partim à diversis Aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior est quàm tempore æstivo, sextâ parte lineæ unius, quantum sentio. Ob calores sub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante, à *Richero* observatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum lineâ $1\frac{87}{1000}$, per Theoriam jam antè collectâ, probè congruit. *Richerus* autem observationes, in *Cayennâ* factas, singulis septimanis per menses decem iteravit; & longitudines Penduli, in virgâ ferreâ ibi notatas, cum longitudinibus ejus in *Galliâ* similiter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis observatoribus defuisse videtur. Si hujus observationibus fidendum est, Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium septendecim circiter, ut suprà per Theoriam prodiit.

PROP. XXI. THEOR. XVII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & Axem terræ, singulis revolutionibus annuis nutando, bis inclinari in Eclipticam, & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. 1. Motus tamen iste nutandi perexiguus esset debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis (zz).

& viciffim: ut certiffimis argumentis evicerunt Clairaultius & Simsonus nostras.

(zz) Vide De Syst. Mund. § 37.

De Mundi Systemate

PROP. XXII. THEOR. XVIII.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in Ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficientur inæqualitatibus, quæ in Lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4 & 5. Prop. LXVI.) velociùs movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minùs curvum, atque ideo propiùs accedit ad Terram, in syzygiis quàm in quadraturis; nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior, in syzygiis quàm in quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8. Prop. LXVI.) velociùs progreditur in syzygiis suis, tardiùs regreditur in quadraturis; & excessu progressûs supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 2. Prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis, & velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius Aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ (α).

Sunt etiam aliæ quædam, à prioribus Astronomis non observatæ, inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint.

Velocitates

(α) Vid. De Syst. Mund. § 31.
(β) De Syst. Mund. § 32.
(γ) Litera N significet motum medium nodorum Lunæ, spatio mensis quem vocant periodici. Litera n motum medium nodorum Satellitis extimi è Jovialibus, eodem temporis spatio. Litera V motum medium nodorum Satellitis ejusdem, propriæ conversionis circum Jovem spatio. Literæ

T,

Liber Tertius.

Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et Variatio præterea augetur vel minuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quàm proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prosthaphæresin lunæ referri solet, & cum eâ confundi (β).

PROP. XXIII. PROB. V.

Motus inæquales satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi Jovialis, est ad motum medium nodorum lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (γ) (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) ideoque annis centum conficit nodus iste $8^{gr}. 24'$, in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hîc exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum et Augis satellitis cujusque ferè sunt ad æquationes maximas nodorum & augis Lunæ respectivè, ut motus nodorum &

T, J significent spatia conversionum Terræ & Jovis circum Solem. Literæ, l, s spatia conversionum Lunæ & Satellitis extimi Jovialis, illius circum Terram, hujus circum Jovem. Jam (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) $N : V = J^2 : T^2 + l : s^2 = J^2 \times l^2 : T^2 \times s^2$.
Sed $V : n = s : l$ (nempe cùm motus medii sint æquabiles) $= T^2 \times s^2 : T^2 \times sl$.
Ex æquo $N : n = J^2 \times l^2 : T^2 \times sl = J^2 \times l : T^2 \times s$.
Et invertendo $n : N = T^2 \times s : J^2 \times l$. Q. E. D.

augis

augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio satellitis è Jove spectati, est ad variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum, temporibus quibus satelles & luna ad solem revolvuntur, per idem Corollarium; ideoque in Satellite extimo non superat 5''. 12''' (ᵟ).

PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus, tam lunaribus quàm solaribus, bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi; ut fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei*, ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit; nisi ubi motus ab oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam quintam, sextam, septimam, aut ultrà, retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quàm supra; & per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad meridianum loci revertitur. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu, & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit; id quod fiet spatio horæ unius duarumve; sed sæpiùs ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium, si mare sit vadosum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus, qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius est; ideoque in transitu Lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem, in transitu Lunæ à quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardiùs ad ἀκμὴν venient.

(ᵟ) De Syst. Mund. § 34.

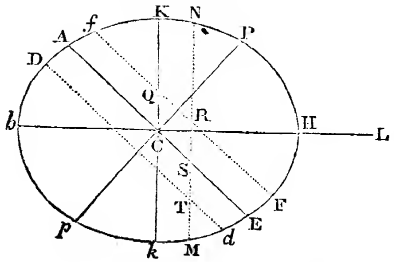
Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis à Terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis paulo majores sint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in syzygiis continuis se mutuò non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione, seu distantiâ ab Æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione & remissione, ideoque nullam motûs reciprocationem cieret. Igitur luminaria, recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent; & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eo quòd Lunæ, jam in æquatore constitutæ, effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias, & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in

4

in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant æquinoctium vernum quàm ſequantur, & ſæpiùs ſequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum Latitudine. Deſignet A*p*EP Tellurem aquis profundis undique coopertam; C, centrum ejus; P, *p*, polos; AE, æquatorem; F, locum quemvis extra æquatorem; F*f*, parallelum loci; D*d*, parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; L, locum, quem Luna tribus antè horis occupabat; H, locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h*, locum huic oppoſitum; K, *k*, loca inde gradibus 90 diſtantia; CH, C*h*, maris altitudines maximas menſuratas à centro telluris; & CK, C*k*, altitudines minimas. Et ſi axibus H*h*, K*k* deſcribatur Ellipſis; deinde, ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem H*h*, deſcribatur ſphærois HPK*hpk*: deſignabit hæc figuram maris quàm proximè; & erunt CF, C*f*, CD, C*d* altitudines maris in locis F, *f*, D, *d*. Quinetiam ſi in præfatâ ellipſeos revolutione punctum quodvis N deſcribat circulum MN, ſecantem parallelos, F*f*, D*d*, in locis quibuſvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo maris in locis omnibus R, S, T, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; poſtea defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt occaſum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* horâ tertiâ poſt appulſum Lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimò defluxus maximus in Q, horâ tertiâ poſt ortum Lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in F. Diſtinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemiſphæricos; unum, in hemiſphærio KH*k*, ad boream vergentem; alterum, in hemiſphærio oppoſito K*hk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet. Hi fluctus, ſemper ſibi mutuò oppoſiti, veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum



lunarium duodecim. Cúmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad meridianum ſupra horizontem; &, Lunâ declinationem mutante, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quòd æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos, & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motûs impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit, ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius, vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citiùs tranſeat per aliqua freta quàm per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad meridianum portûs. Si Luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient, ut aqua tranquillè ſtagnet.

Si Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum; & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantùm perveniet ad maximam altitudinem, & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel tricesimam ab appulſu Lunæ ad meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batſham*, ſub latitudine boreali $20^{gr}. 50'$, *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua, die tranſitum Lunæ per æquatorem ſequente, ſtagnat; dein Lunâ ad boream declinante, incipit fluere & defluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cùm Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum; dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet; alter ab oceano *Sinenſi*, inter continentem & inſulam *Luconiam*; alter à mari *Indico*, inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus, ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi*, per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo (ᵗ).

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

(ᵗ) De Syſt. Mund. § 38—47.

SECTIO

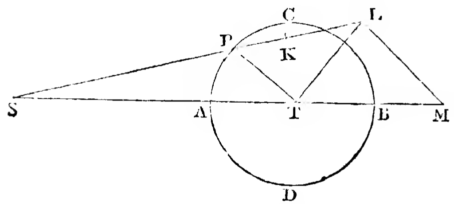
SECTIO II.

De quantitate Errorum Lunarium.

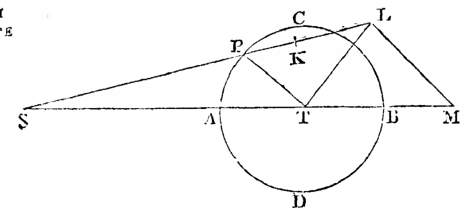
PROP. XXV. PROB. VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet S Solem, T Terram, P Lunam, CADB orbem Lunæ.



In SP capiatur SK æqualis ST; ſitque SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM: & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam ST, vel SK; erit SL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipſius SM pars TM, perturbat motum Lunæ, ut in Libri Primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud à viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas, TM & ML, deſignare. Vis ML, in mediocri ſuâ quantitate, eſt ad vim centripetam, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT, revolvi poſſet, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc eſt, in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 23. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in Propoſitione quartâ quòd, ſi Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium terræ quamproximè. Et vis quâ luna in orbe circa terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris



ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæ ſunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q.E.I.

PROP. XXVI. PROB. VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe circulari deſcribit.

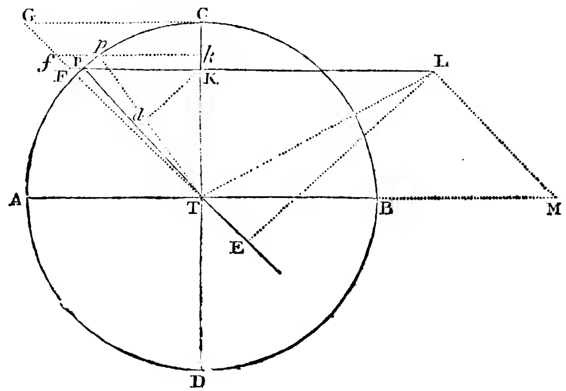
Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hîc inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, eâ ſolâ exceptâ, de quâ hîc agitur. Ob ingentem verò Solis diſtantiam, ponamus etiam lineas SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis LM reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem 3PK ([a]). Hæ vires (per legum Corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE, EL; quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL, agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantùm accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius à quadraturâ

([a]) Vid. Lib. 1. Sect. II. Not. f.

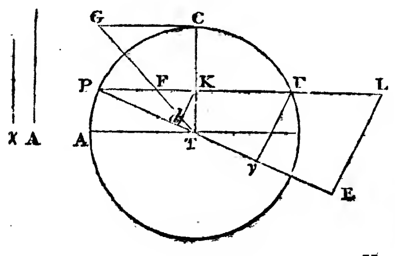
([b]) Nimirum propter angulus ad K & E rectos, angulumque LPE triangulis duobus LPE, TPK communem, triangula illa ſunt inter ſe ſimilia ſed contrariè poſita. Quapropter recta PL erit ad rectam LE, ac proinde vis PL ſeu 3PK ad vim LE, ut recta PT ad rectam TK. Quare $EL \times TP = 3PK \times TK$, ſive $EL = 3PK \times \frac{TK}{TP}$.

([c]) Nimirum hæc eſt argumentatio Newtoni. Poſitis TC, CG æqualibus, ductâque TG, quæ rectæ KP in F occurrat, erit fluxio rectæ CK ad fluxionem arcûs CP ut KP ad TP. (Introduct. ad

quadraturâ C ad conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$ ([b]). Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (quod eodem



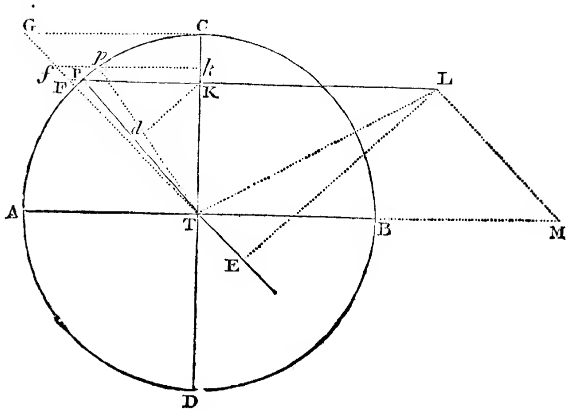
ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipſi CT æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ Temporis exponi poſſint, ductâque *pk* perpendiculari ad CT, jungatur TG ipſis KP, *kp* productis occurrens in F & *f*; & erit FK æqualis TK, & K*k* erit ad PK ut P*p* ad T*p*, hoc eſt in datâ ratione; ideoque $FK \times Kk$, ſeu area FK*kf*, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut EL; & compoſitè, area tota GCKF ut ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in Lunam; atque ideo etiam ut velocitas hâc ſummâ genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CTP, ſeu incrementum momenti ([c]). Vis quâ Luna



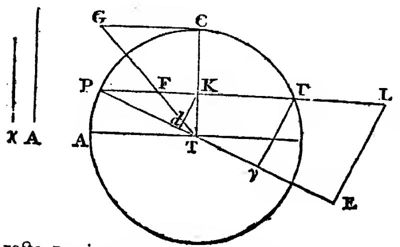
ad Quad. Curv. § 4.) Sint χ, A rectæ quædam, eâ lege ſive altera ſive utræque mutabiles, ut velocitatum creſcendi rectæ CK arcûſque CP rationes ſemper referant; ſecundum doctrinam Def. v. Geometriæ noſtræ Fluxionum. Erit igitur χ ad A ut KP ad TP. Permutando χ erit ad KP ut A ad TP. Jam verò propter æquabilem Lunæ motum (talis enim ponitur) quo arcus CP ſcribitur, fixa manet rectæ A longitudo. (Geometr. Flux. Def. v.) Sed data etiam TP. Quare datarum A, TP ratio data. Data igitur ratio rectæ χ ad PK. Quare,

DE MUNDI SYSTEMATE

Luna circa Terram quiescentem ad distantiam TP, tempore suo periodico CADB dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}$CT, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, quâ Luna in orbe suo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I ([d]). Cùm autem perpendiculum K*d*, in TP demissum, sit ipsius EL pars



tertia, & ipsius TP, seu ML, in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, ubi maxima est ([e]), superabit vim ML in ratione 3 ad 2; ideoque erit ad vim illam, quâ Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$, seu 11915; & tempore CT velocitatem generare deberet, quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris; tempore autem CPA, velocitatem majorem generaret, in ratione CA ad CT seu TP. Exponatur vis maxima



Quare, propter FK, TK inter se æquales, rectanguli $\chi \times$ FK ad rectangulum PK $\times$ TK ratio data. Quare rectanguli $\chi \times$ FK ad rectangulum 3PK $\times$ TK ratio data; sive ad rectangulum TP $\times$ EL, quod rectangulo 3PK $\times$ TK ostensum est æquale. (Not. [b].) Verùm rectangulum $\chi \times$ FK fluxio est trapezii GCKF (De Quad. Curv. Prop. I.) Fluxio igitur trapezii GCKF rectanguli TP $\times$ EL rationem semper servat. Sed, propter rectam TP magnitudine datam, rectangulum illud TP $\times$ EL rectæ EL, & recta EL vis EL rationem semper servat. Denique vis EL est semper ut fluxio velocitatis quam in Lunâ generaverit. Hinc fluxio trapezii GCKF est semper ut fluxio velocitatis, quam vis EL in Lunâ generaverit. Quare cùm trapezium illud GCKF, & velocitas, quam vis EL in Lunâ generaverit, simul à nihilo generari inceperint, Lunâ utique in puncto C positâ, trapezium GCKF velocitatis

2

LIBER TERTIUS.

maxima EL in octantibus per aream FK $\times$ K*k*, rectangulo $\frac{1}{2}$TP $\times$ P*p* æqualem ([f]). Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}$TP $\times$ CP ad aream KCGF: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}$TP $\times$ CA & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. 5. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915+50 seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in syzygiâ A, ac differentia 11915−50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ, temporibus æqualibus in syzygiis & quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut trapezium FKCG ad triangulum TCG (vel quod perinde est, ut quadratum sinûs PK ad quadratum radii TP, id est, ut P*d* ad TP) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quòd Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cùm autem periodus synodica lunaris verè sit dierum 29. hor. 12. & min. 44, augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hac pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$

tatis illius rationem semper servabit. (Geometr. Flux. Prop. IV.)

([d]) Vid. Lib. 1. Sect. II. Not. [l], Cor. H. 1 & 2.

([e]) VIM EL tunc maximam esse, quando Luna octantem teneat, eo patet quòd vis illa EL rectanguli 3PK $\times$ TK rationem semper servet. Maxima igitur erit, quando rectangulum illud maximum; id est quando PK $\times$ TK, rectangulum sub sinu & cosinu arcûs CP, maximum. Hoc autem ita maximum erit, si arcus CP quadrantis semissis sit.

([f]) NEMPE vim EL fluxionis trapezii GFKC, sive rectanguli $\chi \times$ FK, rationem servare suprà ostendimus. (Not. [c].) Sed si punctum P arcum CA medium dividat, ut maxima sit vis EL, punctum F cum ipso P congruet, et PK, FK erunt inter se æquales. Quapropter cùm sit semper $\chi : A = PK : TP$, ac proinde $\chi \times FK : A \times TP = FK \times PK : TP^2$; erit in tali situ puncti P, $\chi \times FK$ ad $A \times TP$, sive fluxio trapezii GKFC ad fluxionem rectanguli $CP \times TP$, ut PK^2 ad TP^2, id est ut 1 ad 2. Id est fluxio trapezii GFKC, fluxioni dimidii rectanguli $CP \times TP$, in tali situ puncti P æqualis erit. Quare vis EL, quæ per fluxionem trapezii GFKC semper exponi potest, ea, quando maxima est, per fluxionem dimidii rectanguli $CP \times TP$ exponenda erit.

momenti

De Mundi Systemate

momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in ſyzygiâ ut $11023-50$ ad $11023+50$, ſeu 10973 ad 11073; & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P verſatur, ut 10973 ad $10973+Pd$, exiſtente videlicet TP æquali 100.

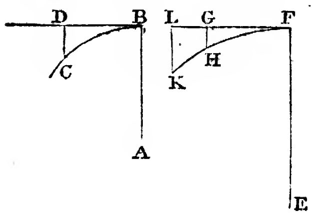
Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proxime ut ſumma numeri $219,46$ & ſinûs verſi duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius eſt unitas (g). Hæc ita ſe habent ubi Variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione.

PROP. XXVII. PROB. VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam à Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis momentis deſcribit, eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ à Terrâ conjunctim; & propterea diſtantia Lunæ à Terra

(g) Nimirum incrementum areæ eſt ut $109,73+Pd$, ſi circuli radius TP ſit unitas; hoc eſt ut $2\times109,73+2Pd$; id eſt ut $219,46+2Pd$. Sed $2Pd$ æqualis eſt ſinui verſo duplæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ. Occurrat enim PK circulo iterum in Γ (vid. fig. Not. c), & ducatur Γν cum illâ Pd parallela, quæ rectæ TP in ν occurrat. Jam arcûs CP quo, Luna à quadraturâ diſtat, hujus duplus eſt arcûs PCΓ: et hujus PCΓ ſinus verſus eſt recta Pν, quæ dupla eſt illius Pd.



(h) Sint Curvæ BC, FH, quas circuli, centris A, E, radiis AB, EF ſcripti, in punctis B, F oſculentur; rectæ verò BD, FG in punctis eiſdem B, F Curvas contingant. Jam ſi in Curvis inſcribantur æquales rectæ BC, FH, & à punctis H, C in tangentes FG, BD deducantur ad perpendiculum CD, HG; vel ſi in tangentibus ſumantur æquales BD, FG, et à punctis D, G, educantur ad perpendiculum DC, GH, quæ Curvis in punctis C, H occurrant: erunt DC, GH ſinus angulorum contactûs, ad B & F, pro radiis æqualibus BC, FH; vel tangentes eorundem pro radiis æqualibus BD, FG. Jam verò quæ, arcubus BC, FH infinitè imminutis, rectarum DC, GH evaneſcentium ultima eſt ratio, eam curvaturis in locis B, F intereſſe Newtonus poſuit. Nec ineptè ſanè: cùm evaneſcentium illarum ratio ultima radiorum AB, EF contraria ſit. Namque arcubus BC, FH infinitè imminutis, puncta C, H quæ ſemper ſunt ad Curvas, ea ultimò ad circulos etiam erunt radiis AB, EF ſcribendos. Et ex naturâ circuli, rectangula $AB\times CD$, $EF\times GH$, erunt ultimò inter ſe ut quadrata ex BD, FG. Sed quadrata ex BD, FG ultimò ſaltem inter ſe æqualia, nimirum cùm ipſæ BD, FG, ultimò ſaltem, inter ſe æquales. Rectangula igitur $AB\times CD$, $EF\times GH$ ultimò inter ſe æqualia. Ac proinde $CD : GH$ ultimò $= EF : AB$. Quæ igitur radiorum AB, EF inter ipſos eſt ratio, ea, contrariè ſumpta, evaneſcentium DC, GH ultima erit. Sed quæ radiis circulorum oſculantium eſt ratio, ejus contraria curvaturæ ratio eſt. (Geometr.

Liber Tertius.

Terra eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione areæ directè & ſubduplicatâ ratione motûs horarii inverſè. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciprocè ut ipſius diſtantia à Terrâ. Tentent aſtronomi quàm probè hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri poteſt.

PROP. XXVIII. PROB. IX.

Invenire diametros orbis in quo Luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inverſè. Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultimâ proportione ſinuum vel tangentium, angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur (h). Attractio autem Lunæ in Terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra vim ſolarem 2PK (vide *fig. pag.* 428) quâ gravitas acceleratrix Lunæ in Solem

Analyt. C. VII. § 1.) Curvaturæ igitur in locis B, F rationem eam, quæ eſt ultima evaneſcentium DC, GH, Newtonus rectè poſuit.

Sed intelligantur Curvæ BC, FH, motu corporum quorundam generari, quæ è locis B, F, ſecundum rectas BD, FG, cum certâ unumquodque velocitate emiſſa, viribus incitentur, quæ, initio ſaltem, ſecundum rectas BA, FE agant. Dicit Newtonus curvaturam in B ad curvaturam in F rationem habere ex duabus compoſitam; quarum altera virium in locis B, F eſt ratio, altera duplicatæ velocitatum, quibuſcum corpora è locis illis emittuntur, contraria. Id verò ſic oſtendimus. Sint BC, FK arcus quilibet Curvarum BC, FH, quos corpora ſimul confecerint; et à punctis C, K in tangentes BD, FG deducantur ad perpendiculum CD, KL. Intelligantur arcus BC, FK infinitè minui, eâ tamen lege, ut, ſenſim evaneſcendo, tales ſemper ſint quos corpora ſimul confecerint. Jam rectangula $2.AB\times CD$, $2EF\times KL$, quadratis ex BD, FL, ac proinde quadratis ex BC, FK ultimò fiunt æqualia. Quare $AB\times CD : EF\times KL$ ultimò $= BC^2 : FK^2$ Sed $EF\times KL : EF\times CD = KL : CD$. Quare $AB : EF = BC^2 : FK^2$ ultimò $+ KL : CD$ ultimò. Invertendo $EF : AB = FK^2 : BC^2$ ultimò $+ CD : KL$ ultimò.

Habet igitur EF ad AB rationem è duabus compoſitam; quarum altera evaneſcentium CD, KL eſt ultima, altera ejus quæ longitudinum BC, FK ultimò duplicata eſt, contraria. Sed propter arcus BC, FK ſimul confectos, rectæ CD, KL erunt ultimò inter ſe ut ſpatia, quæ corpora à viribus, quales in locis B, F vigeant, incitata, caſu recto ſimul conficerent; hoc eſt, ut vires illæ. Et quæ longitudinum BC, FK ultimò duplicata eſt ratio, ea velocitatum, quibuſcum corpora è locis B, F emittuntur duplicata erit. Habet igitur EF ad AB rationem è duabus compoſitam; quarum altera virium in locis B, F, eſt ratio, altera duplicatæ velocitatum, quibuſcum corpora è locis illis emittuntur, contraria. Jam verò curvaturæ in B ad curvaturam in F eadem quæ rectæ EF ad rectam AB erit ratio: ac proinde ex eiſdem rationibus componetur. Curvaturæ igitur in B ad curvaturam in F ea erit ratio, quam Newtonus allegavit.

ſuperat

DE MUNDI SYSTEMATE ſuperat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem, vel ab eâ ſuperatur. In quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis Lunæ in Terram & vis ſolaris KT, quâ Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{ATq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quàm proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK, & Lunam trahit in Terram; erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit 3000; de quâ, ſi vis mediocris ML ſubducatur, manebit vis 2000, quâ Luna in ſyzygiis diſtrahitur à Terrâ, quamque jam antè nominavi 2PK (i). Velocitas autem lunæ in ſyzygiis A & B eſt ad ipſius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, deſcribit in ſyzygiis ad momentum ejuſdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut 11073 CT ad 10973 AT. Sumatur hæc ratio bis inverſè & ratio prior ſemel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i.e. ut * $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT\,cub.$ ad † $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT\,cub.$

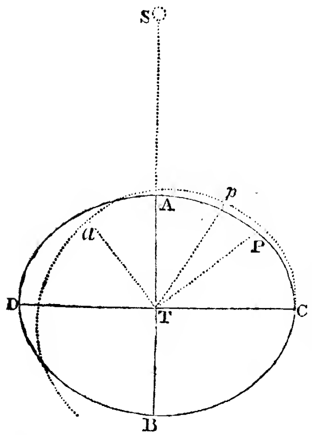
Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice aſſumamus Ellipſin DBCA, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major DC quadraturis, minor AB ſyzygiis interjaceat. Cùm autem planum Ellipſeos hujus motu angulari circa Terram revolvatur,

(i) JAM verò cùm vis terreſtris, quâ Luna urgetur in diſtantiâ N, ſit 178725, vis terreſtris in diſtantiâ AT erit $\frac{178725 \times N^2}{AT^2}$. Et cùm vis ſolaris, quæ in coitu Lunæ vi terreſtri obluctetur, quando Luna intervallo N à terrâ diſtet, ſit 2000; et in aliis Lunæ à terrâ diſtantiis diſtantiæ rationem conſtanter ſervet: ea in coitu Lunæ erit $\frac{2000 \times AT}{N}$. Unde vis tota è terreſtri et ſolari compoſita, quâ Luna in coitu urgetur in centrum Terræ, erit $\frac{178725 \times N^2}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N}$. Simili modo oſtendetur vim totam è terreſtri & ſolari compoſitam, quæ dimidiatam Lunam in Terram urgeat, eam eſſe $\frac{178725 \times N^2}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N}$.

Quare vis prior ad poſteriorem ut $\frac{178725 \times N^2}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N}$ ad $\frac{178725 \times N^2}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N}$.

Sive

LIBER TERTIUS. tur, & trajectoria, cujus curvaturam conſideramus, deſcribi debet in plano quod omni motu angulari omninò deſtituitur: conſideranda erit figura quam Luna, in ellipſi illâ revolvendo, deſcribit in hoc plano, hoc eſt figura Cpa; cujus puncta ſingula, p, inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipſi, quod locum Lunæ repræſentet, & ducendo Tp æqualem TP, eâ lege, ut angulus PTp æqualis ſit motui apparenti ſolis à tempore quadraturæ C confecto; vel (quod eodem ferè recidit) ut angulus CTp ſit ad angulum CTP ut tempus revolutionis ſynodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ, ſeu 29d. 12h. 44′, ad 27d. 7h. 43′ (k). Capiatur igitur angulus CTa in eâdem ratione ad angulum rectum CTA, & ſit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a Apſis ima, & C Apſis ſumma, orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo, invenio quòd differentia inter curvaturam orbis Cpa in vertice a, & curvaturam Circuli centro T intervallo TA deſcripti, ſit ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp; & quòd curvatura Ellipſeos in A ſit ad curvaturam Circuli illius, in duplicatâ ratione TA ad TC; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC deſcripti, ut TC ad TA; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipſeos in C, in duplicatâ ratione TA ad TC; & differentia inter curvaturam Ellipſeos



Sive ut $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000 \times AT}{N \times N^2}$ ad $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000 \times CT}{N \times N^2}$.

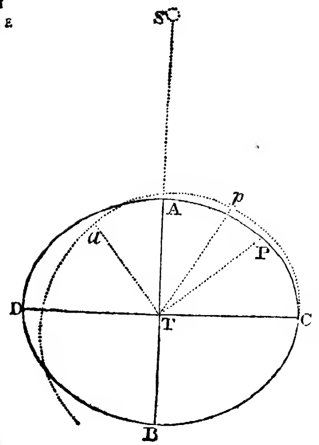
Verùm cùm perexigua ſit duarum AT, CT differentia, rectæ N, quæ duarum AT, CT arithmeticâ ratione media eſt, huic ea, quæ geometricâ ratione earundum eſt media, tantùm non æqualis erit. Unde in hoc negotio ponere licet $N^2 = AT \times CT$. Ita verò ratio vis, quæ Lunam in coitu vel plenam in terram urget, ad vim quæ dimidiatam urget, erit ut $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{N \times CT}$ ad $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{N \times AT}$; prorſus ut Newtonus conſtituit. *(Le Sœur & Jacquier ad locum.)*

* Veriùs ni fallor 2151974.

† Veriùs ni fallor 2191365.

(k) Lib. I. Prop. XLIII.

in



in vertice c & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ T*pa* in vertice c & curvaturam ejuſdem Circuli, in duplicatâ ratione anguli CT*p* ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactûs ac differentiarum angulorum facilè colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura figuræ c*pa* in *a* ad ipſius curvaturam in c, ut AT *cub.* + $\frac{16824}{100000}$ CT*q* × AT ad CT *cub.* + $\frac{16824}{100000}$ AT*q* × CT (l). Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CT*p* applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^d.\ 7^h.\ 43'$, & $29^d.\ 12^h.$ 44′,

(l) Litera *t* menſem quem vocant periodicum, litera *s* ſynodicum ſignificet. Erit igitur angulus CTP ad angulum CT*p* ut *t* ad *s*. Quare vis centralis in orbe mobili in loco *a* erit ad vim centralem in Ellipſi CAD in loco A, ut $\dfrac{\dfrac{t^2.TA}{CT^3} + \dfrac{TA^2}{TC}s^2 - \dfrac{TA^2}{TC}t^2}{TA^3}$ ad $\dfrac{t^2 \times TA}{TC^3}$. Id enim efficietur ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. ſi in formulâ generali illius Corollarii t^2 ſcribatur pro FF, TA pro A, TC^3 pro T cub, $\frac{TA^2}{TC}$ pro R, & s^2 pro GG. Ducendo omnia in $CT^3 \times TA$, efficietur vis centralis in ellipſi mobili in loco *a* ad vim centralem in ellipſi CAD in loco A, ut $t^2 \times TA^2 + CT^2 s^2 - CT^2 t^2$ ad $t^2 \times TA^2$.

Jam verò velocitas in Ellipſi mobili in loco *a* ad velocitatem in Ellipſi ſtabili CAD in loco A ut *s* ad *t*. Velocitatum igitur in locis illis duplicata ratio ea erit, quæ s^2 ad t^2, ſive $s^2 \times TA^2$ ad $t^2 \times TA^2$. Ratio igitur quæ componitur è ratione virium cum contrariâ ejus quæ duplicata eſt velocitatum, ea erit quæ quantitatis $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad quantitatem $s^2 \times TA^2$. Atque hæc erit ratio curvaturæ orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam ellipſeos CAD in A. Radius circuli, qui Ellipſin in A oſculatur, ſemiaxium TA, TC proportione tertius eſt. Quapropter radius ejus circuli ad ſemiaxem TA rationem habet quam TC^2 ad TA^2. Ac proinde Curvatura Ellipſeos in A ad curvaturam circuli cujus radius TA rationem habet, quam TA^2 ad TC^2; ſive eam quam $s^2 \times TA^2$, $s^2 \times TC^2$.

Jam cùm curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos CAD in loco A rationem habeat quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times TA^2$; cùm præterea curvatura Ellipſeos in loco A ad curvaturam Circuli, cujus radius TA, rationem habeat quam $s^2 \times TA^2$ ad $s^2 \times TC^2$: ex æquo Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam circuli, cujus radius TA, rationem habebit quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times CT^2$. Curvatura autem circuli cujus radius TA ad curvaturam circuli cujus radius TC rationem habet quam TC ad TA; ſive eam, quam TC × TA ad TA^2. Et hujus circuli curvatura ad curvaturam Ellipſeos in loco c rationem habet quam TA^2 ad TC^2. Nempe cùm radius circuli, qui Ellipſin in c oſculetur, ſemiaxium TC, TA proportione ſit tertius. Ex æquo Curvatura circuli cujus radius TA ad curvaturam Ellipſeos in loco c rationem habet, quam TC × TA ad TC^2; ſive eam, quam TA ad TC. Cùm igitur Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Circuli, cujus radius TA, rationem habeat quam $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2}\, CT^2$ ad $s^2 \times TC^2$, curvatura autem circuli

44′, applicatam ad quadratum temporis $27^d.\ 7^h.\ 43'$.

Igitur cùm *a* deſignet ſyzygiam Lunæ, & c ipſius quadraturam; proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis Lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſuprà invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad AT × CT applicati, fiunt 2062,79 CT*qq* − 2151969 N × CT *cub.* + 368676 N × AT × CT*q* + 36342 AT*q* × CT*q* − 362047 N × AT*q* × CT + 2191371 N × AT *cub.* + 4051,4 AT*qq* = 0. Hîc pro terminorum AT & CT ſemiſummâ N ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentiâ ponendo *x*, fit CT = 1 + *x*, & AT = 1 − *x*: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur *x* æqualis 0,00719: & inde ſemidiameter CT fit 1,00719; & ſemidiameter AT, 0,99281: qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quàm proximè (m). Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terrâ in ſyzygiis ad ipſius

circuli cujus radius TA ad curvaturam Ellipſeos in loco c eam, quam TA ad TC; Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos CAD in loco c rationem habebit, quæ componitur è rationibus quantitatis $t^2 \times TA^2 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2$ ad $s^2 \times TC^2$, rectæque TA ad rectam TC; ſive eam quam quantitas $t^2 \times TA^3 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $s^2 \times TC^3$.

Rurſum vis centralis, quâ corpus in Ellipſi CAD retinendum eſſet, in loco c, ad vim centralem in eodem loco in orbe c*pa* rationem habet quam $t^2 \times CT^2$ ad $t^2 \times CT^2 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2$. Id quod efficitur ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. ſi in Corollarii illius formulâ generali, pro FF, GG, R, & T cub. ſcribantur, ſicut antè, t^2, s^2, $\frac{TA^2}{TC}$, TC^3, & TC pro A.

Velocitas autem corporis, per Ellipſin illam CAD delati, ad velocitatem corporis orbem c*pa* ſcribentis, in loco communi c, rationem habet quam *t* ad *s*. Quare duplicata velocitatum ratio ea erit quam t^2 habet ad s^2, vel $t^2 \times CT^2$ ad $s^2 \times CT^2$. Quæ igitur ex virium ratione cum duplicatæ velocitatum contrariâ compoſita eſt ratio, ea erit quam $s^2 \times CT^2$ habet ad $t^2 \times CT^2 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2$, ſive $s^2 \times CT^3$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$. Atque hæc eſt ratio curvaturæ Ellipſeos in loco c ad curvaturam orbitæ c*pa* in eodem loco.

Jam verò cùm curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam Ellipſeos in c rationem habeat quam $t^2 \times TA^3 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $s^2 \times TC^3$; cùm præterea curvatura Ellipſeos in loco c ad curvaturam orbitæ c*pa* in eodem loco rationem habeat quam $s^2 \times CT^3$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$; ex æquo, Curvatura orbitæ c*pa* in loco *a* ad curvaturam ejuſdem in loco c rationem habebit quam $t^2 \times TA^3 + \overline{s^2 - t^2} \times CT^2 \times TA$ ad $t^2 \times CT^3 + \overline{s^2 - t^2} \times TA^2 \times CT$; ſive eam, quam $TA^3 + \frac{s^2 - t^2}{t^2} CT^2.TA$ ad $CT^3 + \frac{s^2 - t^2}{t^2} TA^2.CT$.

Sed $t^2 : s^2 = 100000 : 116823,4$.

Quare $\frac{s^2 - t^2}{t^2} = \frac{16824}{100000}$.

Quare curvatura figuræ c*pa* in loco *a* erit ad ejuſdem curvaturam in c, ut $TA^3 + \frac{16824}{100000} CT^2.TA$ ad $CT^3 + \frac{16824}{100000} TA^2.CT$.

(m) Majoris evidentiæ gratiâ calculos ſubduco.

Cùm

ipsius distantiam in quadraturis (sepositâ scilicet eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

PROP. XXIX. PROB. X.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ Ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna, radio ad Terram ducto, describit. Si Luna P in ellipsi DBCA [*fig. p.* 66] circa Terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, & radio TP ad terram ducto describeret aream CTP tempori proportionalem; esset

Cùm sit $2151974\,AT \times CT \times N - 24081\,AT^3$ ad $2191365\,AT \times CT \times N + 12261\,CT^3$ ut $AT^3 + \frac{s^2-t^2}{t^2} CT^2 \times AT$ ad $CT^3 + \frac{s^2-t^2}{t^2} AT^2 \times CT$; ponatur $2151974 = a$. $2191365 = b$. $24081 = c$. $12261 = d$. $s^2 - t^2 = e$.

Ita erit $a.AT \times CT \times N - c.AT^3 : b.AT \times CT \times N + d.CT^3 = AT^3 + \frac{e}{t^2} CT^2 \times AT : CT^3 + \frac{e}{t^2} AT^2 \times CT$.

Et permutando $a \times CT \times N - c.AT^2 : AT^2 + \frac{e}{t^2} CT^2 = b \times AT \times N + d.CT^2 : CT^2 + \frac{e}{t^2} AT^2$.

Ponatur $N = 1$. $CT = 1 + x$. $AT = 1 - x$.

Unde $a \times \overline{1+x} - c \times \overline{1-x}^2 : \frac{t^2.\overline{1-x}^2 + e.\overline{1+x}^2}{t^2} = b \times 1 - x + d \times \overline{1+x}^2 : \frac{t^2.\overline{1+x}^2 + e.\overline{1-x}^2}{t^2}$.

Et permutando $a \times \overline{1+x} - c \times \overline{1-x}^2 : b \times 1 - x + d \times \overline{1+x}^2 = t^2.\overline{1-x}^2 + e.\overline{1+x}^2 . t^2.\overline{1+x}^2 + e.\overline{1-x}^2$.

Hoc est cùm x perexigua sit, ut quadratum ejus negligi possit, $a + ax - c + 2cx : b - bx + d + 2dx = s^2 - 2t^2x + e + 2ex : t^2 + 2t^2x + c - 2ex$.

Id est $\overline{a-c} + \overline{a+2c}\,x : \overline{b+d} + \overline{2d-b}.x = s^2 + \overline{2e-2t^2}\,x : s^2 + \overline{2t^2-2e}.x$.

Ponatur $a - c = \alpha$. $a + 2c = \beta$. $b + d = \gamma$. $2d - b = \delta$. $2e - 2t^2 = -\epsilon$. $2t^2 - 2e = \epsilon$.

Ita erit $\alpha + \beta x : \gamma + \delta x = s^2 - \epsilon x : s^2 + \epsilon x$.

Quare $\overline{\alpha + \beta x} \times \overline{s^2 + \epsilon x} = \overline{\gamma + \delta x} \times \overline{s^2 - \epsilon x}$.

Id est $s^2\alpha + s^2\beta x + \alpha\epsilon x = s^2\gamma + s^2\delta x - \gamma\epsilon x$.

Quare $s^2.\overline{\beta - \delta}\,x + \overline{\alpha + \gamma}.\epsilon x = s^2 \times \overline{\gamma - \alpha}$.

Hinc $x = \frac{\overline{\gamma - \alpha} \times s^2}{\overline{\alpha + \gamma} \times \epsilon + \overline{\beta - \delta} \times s^2} = \frac{\overline{b+c+d-a} \times s^2}{\overline{a+b+d-c} \times \overline{4t^2 - 2s^2} + \overline{a+2c-2d+b}\,s^2}$.

Sive $x = \frac{\overline{b+c+d-a} \times s^2}{\overline{4t^2 - s^2}\,\overline{a+b} + \overline{c-d} \times 4e}$.

Jam vero $b + c + d - a = 75733$. $a + b = 4343339$. $4t^2 - s^2 = 283176$. Quare $\overline{a+b} \times \overline{4t^2 - s^2} = 1229929000000$. $c - d = 11820$. Et $4e = 4 \times 16824$. Quare $\overline{c-d} \times 4e = 795438720$. Quare $\overline{4t^2 - s^2}\,\overline{a+b} + \overline{c-d}.\,4e = 1230724438720$.

Quare $x = \frac{75733 \times 116824}{1230724438720} = \frac{75733}{10534859} = 0,007188+$.

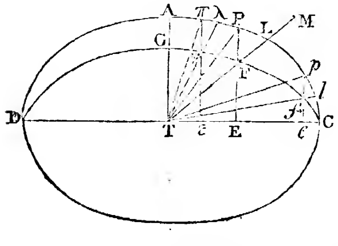
Erit igitur $CT = 1,00719$.
$AT = 0,99281$.

Sed

esset autem ellipseos semidiameter maxima CT ad semidiametrum minimam TA ut 70 ad 69: foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motûs medii, à quadraturâ C computati, ut ellipseos semidiameter TA ad ejusdem semidiametrum TC, seu 69 ad 70. Debet autem descriptio areæ CTP, in progressu Lunæ à quadraturâ ad syzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in syzygiâ Lunæ sit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti, in loco quovis intermedio P, supra momentum in quadraturâ, sit ut quadratum sinûs anguli CTP (n). Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli CTP diminuatur in subduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69 (°). Quo pacto tangens

Sed $1,00719 : 0,99281 = 7,05033 : 6,94967 = 70\frac{1}{2} : 69\frac{1}{2}$ propemodum.

(n) Prop. XXVI. hujus Libri.



(°) Ellipsis CAD, cujus semiaxes, TC, TA, inter se rationem habeant quam numerus 70 ad numerum 69, orbem Lunæ referat; eâ utique figurâ præditum, quam ex circulari vis Solis efficeret. Hujus centrum, T, terra teneat. Axis transversi vertex, C, Lunæ dimidiatæ locus erit; secundi, A, plenæ vel novæ. Capiatur TG, ad quam TA rationem habeat ejus quam 11073 ad 10973 subduplicatam. Centro T, semiaxibus TC, TG, scribatur Ellipsis alia CGD. Ellipseos CAD capiatur sector CTP, ad quem area integra ellipseos rationem habeat, quam tempus conversionis Lunæ in orbe elliptico CAD ad minus quodvis tempus t. A puncto P in axem transversum DC ad perpendiculum deducatur PE, quæ Ellipsi CGD in F occurrat. Juncta TF orbitæ Lunari in L occurrat. Erit punctum L verus Lunæ locus, quo tempore punctum P appelleret, si vis Solis, orbitâ circulari in ellipticam CAD mutatâ, æquabilem arearum in hâc orbitâ circa centrum T confectionem nihil perturbaret: saltem à loco vero illud L perpaululum aberraverit. Id quod ita perspicuum erit, si ostenderimus fluxionem areæ CTL in puncto C ad fluxionem ejus in puncto A rationem habere quam 10973 ad 11073, & in alio quovis loco fluxionem areæ CTL fluxionem ejus minimam, in loco C, tali quantitate exsuperare, quæ ad illam, quâ fluxio maxima in A eandem minimam in C exsuperat, rationem habeat ejus quam sinus anguli CTL ad radium duplicatam: quin præterea aream CTL, in ipso loco C nascentem, ejus primùm quidem æqualem esse, quam primam ibi loci Luna vero suo motu simul scribat.

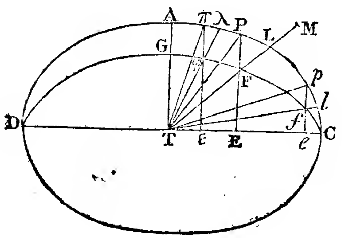
Transferatur punctum P, primum quidem in locum quendam p puncti C vicinum, tum in locum π, tali distantiâ à puncto A dissitum, ut sectores CTp, ATπ inter se æquales sint. Et à punctis p, π, in axem transversum DC demissis ad perpendiculum pe, $\pi\epsilon$, quæ ellipsi interiori CGD in punctis f, ϕ occurrant, jungatur Tf, Tϕ; quæ productæ orbitæ Lunari in punctis l, λ occurrant. Erunt l, λ loca puncti L, puncto P in locum p vel π translato.

Jam verò evanescentibus angulis CTl, ATλ, ratio ultima evanescentis areæ CTl ad evanescentem CTp ea erit, quam ef habet ad ep, sive eam quam TG ad TA, vel TG^2 ad TG × TA. Sed evanescentis ATπ, vel CTp ad evanescentem ATλ ratio ultima, ea arcûs quoque Aπ ad arcum Aλ ultima erit: sive ultima rectæ AT − $\pi\phi$ ad AT, sive eadem quæ est TG ad TA, vel TG × TA ad TA^2. Cùm igitur sit area CTl ad aream CTp ultimò ut TG^2 ad TG × TA; et area CTp ad aream ATλ ultimò ut TG × TA ad TA^2: ex æquo, ratio ultima evanescentis CTl ad evanescentem ATλ ea erit.

De Mundi Systemate

gens anguli CTP jam erit ad tangentem motûs medii ut 68,6877 ad 70, & angulus CTP in octantibus, ubi motus medius eft 45^{gr}. invenietur $44^{gr}. 27'. 28''$. [p] qui fubductus de angulo motûs medii 45^{gr}. relinquit Variationem maximam $32'. 32''$. [q] Hæc ita fe haberent fi Luna, pergendo à quadraturâ ad fyzygiam, defcriberet angulum CTA graduum tantùm nonaginta. Verùm ob motum Terræ, quo Sol in confequentia motu apparente transfertur; Luna, priufquam folem affequitur, defcribit angulum CTa angulo recto majorem, in ratione temporis revolutionis lunaris fynodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id eft, in ratione $29^d. 12^h. 44'$. ad $27^d. 7^h. 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eâdem ratione, & Variatio maxima, quæ fecus effet $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$. [r].

Hæc eft ejus magnitudo in mediocri diftantiâ Solis à Terrâ, neglectis



erit quam TG^2 habet ad TA^2, five ea quam 10973 ad 11073. Quod primò demonftrandum erat.

Rurfum in loco quovis P, locorum C, A intermedio, erit $\dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTL}} = TF^2 : TL^2$. Id eft, fi capiatur TM, duarum TF, TL proportione tertia, erit $\dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTL}} = TF : TM$. Invertendo et dividendo $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTF}} = MF : TF$. Sed cùm illæ TF, TL tantùm non æquales fint, erunt FL, LM tantùm non æquales, & MF duplâ LF vix major. Ponatur igitur $MF = 2LF$. Erit igitur $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}} : \dot{\overline{CTF}} = 2LF : TF$.

Jam verò, cùm è naturâ Ellipfeon quarum axis eft communis, fit $\dot{\overline{CTP}}$ ad $\dot{\overline{CTF}}$ ut PE ad FE, cùm præterea rectarum PE, FE fit ratio data, idcirco fluxionum $\dot{\overline{CTP}}$, $\dot{\overline{CTF}}$ ratio data eft. Sed fluxio $\dot{\overline{CTP}}$ data, propter fluxum areæ CTP æquabilem. Quare fluxio $\dot{\overline{CTF}}$ data. Id eft areæ CTF fluxus eft æquabilis. Quare $\dot{\overline{CTF}} = \dot{\overline{CTf}}$. Sed evanefcente angulo CTl, areæ CTf, CTl, necnon earum fluxiones, in ipfo puncto C, fiunt inter fe æquales. Quare fi fluxio areæ CTl, qualis eft in ipfo puncto C, fignificetur hâc notâ, $\dot{c}$; erit in omni fitu puncti L, $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}} = \dot{\overline{CTL}} - \dot{c}$. Et cùm oftenfum fit illam $\dot{\overline{CTL}} - \dot{\overline{CTF}}$ ad $\dot{\overline{CTF}}$ rationem habere quam 2LF ad TF, erit utique $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c} : \dot{\overline{CTF}} = 2LF$ ad TF. Ponatur recta $N = \frac{CT + TG}{2}$. Et fit $TF = N \pm x$. Erit igitur $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c} : \dot{\overline{CTF}} = 2LF : N \pm x$. Sed propter perexiguam duarum CT, TG differentiam, fieri nequit quin x perexigua fit. Ratio igitur rectæ 2LF ad $N \pm x$ vix alia erit, ac ea quam eadem 2LF ad datam N habet. Ratio igitur illius $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c}$ ad datam $\dot{\overline{CTF}}$ vix alia erit, ac ea quam 2LF habet ad datam N. Quare fi per datam N exponatur fluxio data $\dot{\overline{CTF}}$, illa $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c}$ per rectam quandam mutabilem exponenda erit, quæ, in omni fitu puncti L, rectæ mutabilis 2LF tantùm non æqualis erit. (Geometr. Flux. Def. v.) Quare ponere licet $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c} = 2LF$. Puncto igitur L in A

Liber Tertius.

neglectis differentiis, quæ à curvaturâ orbis magni, majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quàm in gibbofam & plenam, oriri poffint. In aliis diftantiis Solis à Terrâ, Variatio maxima eft in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis fynodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione diftantiæ Solis à Terrâ inverfè. Ideoque in apogæo folis, Variatio maxima eft $33'. 14''$, & in ejus perigæo $37'. 11''$, fi modo eccentricitas folis fit ad orbis magni femidiametrum tranfverfam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000 [s].

Hactenus Variationem inveftigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique Luna in octantibus fuis femper eft in mediocri fuâ diftantiâ à Terrâ. Si Luna propter eccentricitatem fuam, magis vel minus diftat à Terrâ quàm fi locaretur in hoc orbe, Variatio paulo major effe poteft vel paulo minor quàm pro regulâ hîc allatâ: fed

tranflato, fi fluxio areæ ATL in ipfo puncto A fignificetur hâc notâ $\dot{a}$, erit $\dot{a} - \dot{c} = 2AG$. Quare $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c} : \dot{a} - \dot{c} = LF : AG$.

Jam verò ratio LF ad AG compofita eft è rationibus rectæ LF ad PF rectæque PF ad AG. Sed, propter exiguam femiaxium ellipfeos CAD differentiam, angulus FLP tantùm non rectus erit. Quare $LF : PF = EF : FT$ propemodum. Et è naturâ Ellipfeos, $PF : AG = FE : TG$. Ratio igitur rectæ LF ad AG componitur è rationibus rectæ EF ad FT rectæque EF ad TG. Ea igitur erit, quam quadratum ex EF habet ad rectangulum $FT \times TG$. Sed, propter TG, TF tantùm non æquales, erit rectangulum $TF \times TG$ quadrato ex TF tantùm non æquale. Haud multum igitur aberit quin LF fit ad AG ut EF^2 ad TF^2. Quare et $\dot{\overline{CTL}} - \dot{c}$ ad $\dot{a} - \dot{c}$ rationem habet ab eâ quam EF^2 ad TF^2, five ab eâ quam finus anguli CTL ad radium habet duplicatâ, haud multum abhorrentem.

Ex hifce verò conftat fluxum areæ CTL legibus eifdem, vel parum faltem diverfis, attemperari, atque illius quam Luna, vi Solis obnoxia, in orbe fuo CAD circum centrum T fcribit. Sed et aream nafcentem CTL, in ipfo loco C, ejus primum quidem æqualem effe, quam Luna, ipfo motûs initio, primam fimul fcripferit, ex eo patet quod fuprà probavimus; aream utique nafcentem CTl ad aream motûs medii CTp fimul nafcentem rationem habere quam TG ad TA; id eft eam, quam numerus 10973 and numerum 11023; five eam, quam velocitas Lunæ vera in orbe CAD in loco C ad mediam cujus in eodem orbe velocitatem. Sed quæ veræ velocitatis Lunæ ad velocitatem ejus mediam ratio, eadem et areæ, quam vero motu fcribat, ad aream motûs medii, nafcentis ad nafcentem, prima erit. Area igitur CTL areæ illius quam Luna, vi folis obnoxia, in orbe fuo CAD fimul fcripferit, nafcens nafcentis, in ipfo loco C primùm quidem æqualis erit. Areæ autem legibus eifdem generatæ, fi nafcendi initio æquales fuerint, manebunt femper inter fe æquales, & punctum L, modo quo præfcripfimus definitum, verum Lunæ locum in orbe fuo CAD fatis exquifitè femper referet. Q. E. D.

[p] $44^{\circ} - '27 - 30,7$.

[q] $'32 - ''29,3$.

[r] Veriùs $'35 - ''7$.

[s] Motus horarius medius Lunæ à fole, exfiftente Terrâ in Aphelio, vel in Perihelio, vel in medio orbis fui loco, erit $'36 - '05$, vel $'35 - ''55$, vel $''36 - 00$, prout motus medios ab Halleio in Tabulis fuis æftimari video. Hinc fpatia menfis quem vocant fynodici, quando Terra Aphelium, Perihelium, vel medium orbis fui locum teneat, erunt ut $'35 - ''55$, $'36 - ''05$, $'36 - 0$. Sive ut numeri 2155, 2165, 2160. Sumptis igitur telluris à Sole diftantiis, quales à Newtono conftitutæ funt, pofitâque Variatione maximâ, in mediâ telluris à Sole diftantiâ, $'35 - ''7$, invenio Variationem maximam in apogæo Solis $'33 - ''27$; in ejus perigæo $'36 - ''51$.

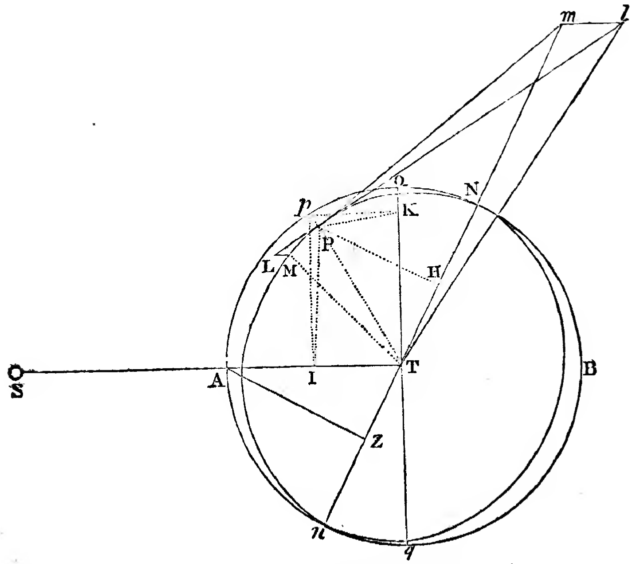
exceffum

DE MUNDI SYSTEMATE excessum vel defectum ab Astronomis per phænomena determinandum relinquo.

PROP. XXX. PROB. XI.

Invenire motum horarium Nodorum lunæ in orbe circulari.

Designet S solem, T terram, P lunam, NP*n* orbem Lunæ, N*pn* vestigium orbis in plano Eclipticæ; N, *n* nodos, *n*TN*m* lineam nodorum infinitè productam; PI, PK perpendicula demissa in li-



neas ST, Q*q*; P*p* perpendiculum demissum in planum Eclipticæ; A, B syzygias Lunæ in plano Eclipticæ; AZ perpendiculum in lineam Nodorum N*n*; Q, *q* quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & *p*K perpendiculum in lineam Q*q* quadraturis interjacentem.

Vis

(t) —*& ML lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ* 3IT, *eodem tempore describere posset.*] Vitiosa sunt hæc. Reponenda, quæ in Editione Primâ & Secundâ Newtonus dederat.— *& ML lineolam quam Luna, impellente vi præfatâ* 3IT, *eodem tempore describere posset.* EMERSONUS. Assentior Emersono.

(u) —*quâ dimidium lineolæ* LM.] Editio Prima & Secunda, *quâ lineola* LM. Rectè. Inducenda sunt etiam quæ uncis inclusimus, quæ in editione Primâ & Secundâ aberant. Quòd verò vis solaris efficaciam eo modo considerari jubet, quasi *tota simul & semel in loco* P *impressa esset*, id non

Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. XXV.) duplex est; altera lineæ LM in schemate Propositionis illius, altera lineæ MT proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, posteriore in Solem secundum lineam rectæ ST, à Terrâ ad Solem ductæ, parallelam trahitur. Vis prior LM agit secundum planum orbis lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior MT, quâ planum orbis lunaris perturbatur, eadem est cum vi 3PK, vel 3IT. Et hæc vis (per Prop. XXV.) est ad vim, quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut 3IT ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterùm in hoc calculo, & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à Lunâ ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ, quæ à Terrâ ad Solem ducitur; propterea quòd inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

LIBER TERTIUS.

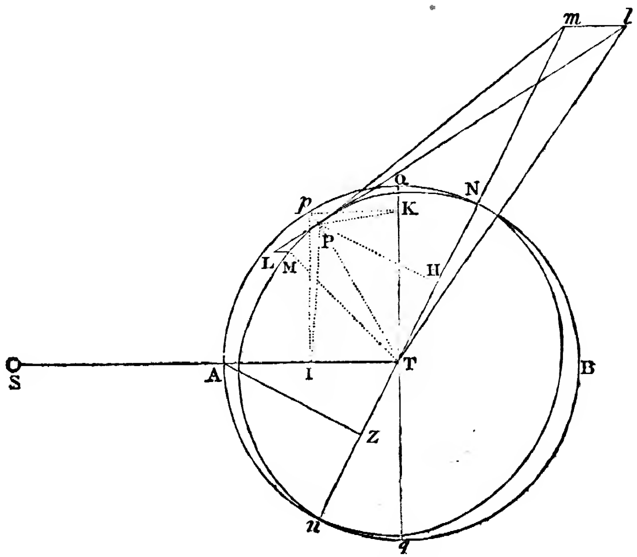
Designet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quàm minimo describit; & ML lineolam, cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ 3IT, eodem tempore describere posset (t). Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi secent planum Eclipticæ; inque T*m* demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela est plano Eclipticæ, ideoque cum rectâ *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi LMP*ml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula LMP, *lm*P. Jam cùm MP*m* sit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum *m* in lineam N*n* per orbis illius nodos, N, *n*, ductam. Et quoniam vis, quâ dimidium lineolæ LM (u) generatur, si tota simul

&

non aliter accipio, ac si dixisset, cogitari oportere arcum PM infinitè minui, & velocitatem motûs Nodi, in loco P, ex illâ ratione æstimandam, quàm angulus nascens *m*TL ad alium quendam, motu æquabili nascentem, primam habeat. Quod ipsum si dixisset, clariùs multo, me judice, locutus fuisset. Nempe recta LM sensim generata est, non ictu subito, sed lentâ quâdam et perpetuâ virium usque renascentium efficaciâ; quæ Lunam, totum illud tempus quod arcui PM conficiendo ea impenderit, secundum rectas cum rectâ TS parallelas incitârunt. Amplior fiat arcus PM: plures fuerint vires, quæ ad rectam LM generandam, suo quæque ordine & loco, operas contulerint. Contrahatur arcus PM; fuerint illæ pauciores: & quo magis ille usque contrahatur, eo illæ usque pauciores. Unde si arcus ille evanescat, & coeuntibus punctis PM in nihilum tandem abeat,

De Mundi Systemate

& ſemel in loco P impreſſa eſſet, [generaret lineam illam totam; &] efficeret, ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet LP, atque ideo transferret lunam de plano MP*m*T in planum LP*l*T;



motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo *m*T*l*. Eſt autem *ml* ad *m*P ut ML ad MP; ideoque cùm MP, ob datum tempus, data ſit, eſt *ml* ut rectangulum ML × *m*P, id eſt, ut rectangulum IT × *m*P. Et angulus *m*T*l*, ſi modò angulus T*ml* rectus

abeat, vires omnes rectæ LM genitrices in ſimplicem, ſi ita dicam, ictum vis illius 3IT in loco P ultimò abierint; id eſt in vim, quæ tota ſimul & ſemel in loco P impreſſa fuerit. Qui igitur eo ſermone uſus eſt, "*vim quâ lineâ* LM *generatur totam ſimul & ſemel in loco* P *imprimi*," is ſcilicet arcum PM infinitè imminui intellexit, & vim illam ſimplicem & primam cogitavit, quæ rectæ LM naſcendi quaſi initia ſuppeditat.

(x) Nempe in hanc ſententiam Newtonus diſputat. Vis terreſtris, quæ, extinctâ vi ſolari, Lunam in orbe circulari retineret, ea, quo tempore Luna per arcum PM ferretur, id utique efficeret, ut Luna curſum rectum, quem, è loco P egreſſa, vi inſitâ tenuiſſet, ſi vis omnis centralis ibi loci extincta eſſet, eum in M delata cum alio mutaret, qui ad priorem illum angulo ipſius MTP æquali inclinatus eſſet. Nam curſus rectus, qui Lunæ, per orbem circularem in locum P vel M delatæ, deinceps ob vim inſitam tenendus eſſet, ſi in utrovis loco vis centralis ſubito deficeret, is quidem orbem ipſum ibi loci contingeret. Quæ verò circulum eundem, in locis diverſis, lineæ rectæ contingunt, eæ angulum inclinationis mutuæ ejus æqualem faciunt, qui, ad centrum circuli conſtitutus, arcum ipſum contactûs punctis interceptum, baſin habet. Rectæ igitur quæ orbem Lunæ circularem, NP*q*, in punctis P, M contingunt, mutuæ inclinationis angulum ipſius MTP æqualem habent. Et talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis illa quâ in orbe NP*q* retinenda eſſet, tempore, quo per arcum PM ferretur, ceſſante vi ſolari, ſola efficeret.

Liber Tertius.

rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{TP}$, id eſt (ob proportionales T*m* & *m*P, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideoque ob datam TP, ut IT × PH. Quòd ſi angulus T*ml*, ſeu STN, obliquus ſit, erit angulus *m*T*l* adhuc minor, in ratione ſinûs anguli STN ad radium, ſeu AZ ad AT. Eſt igitur velocitas nodorum ut IT × PH × AZ, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis, & Lunâ in ſyzygiâ exiſtentibus, recti ſint, lineola *ml* abibit in infinitum, & angulus *m*T*l* evadet angulo *m*P*l* æqualis. Hoc autem in caſu, angulus *m*P*l* eſt ad angulum PTM, quem Luna eodem tempore motu ſuo apparente circa Terram deſcribit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus *m*P*l* æqualis eſt angulo LPM; id eſt, angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem ſola vis præfata ſolaris 3IT, ſi tum ceſſaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare poſſet; & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis ſolaris 3IT, eodem tempore generaret (x). Et hæ vires, ut ſuprà diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cùm motus medius horarius Lunæ reſpectu fixarum ſit $32'.\ 56''.\ 27'''.\ 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc caſu erit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium TPI, PTN, & STN (ſeu diſtantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole) ad cubum radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in

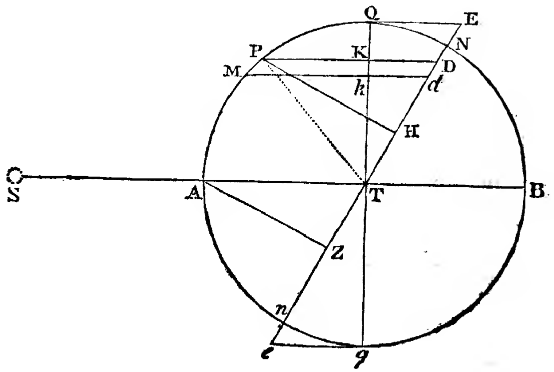
ret. Jam verò vis ſolaris 3IT, quæ Lunam eo ipſo temporis puncto, quo ſimplici vi terreſtri incitata, locum M appuliſſet, apud punctum L conſtituit; hæc inquam vis ſolaris, eo temporis ſpatio quo Luna arcum PM abſolverit, id utique effecerit, ut Luna viam circularem PM cum aliâ viâ curvâ, per puncta P, L ducendâ, mutaverit; et impetum, quem in loco P habuit progrediendi ſecundum rectam quæ arcum PM in P contingeret, cum alio mutaverit, progrediendi ſecundum rectam quæ aliam illam viam curvam in L contingat. Et qualiſcunque ſit rectarum inclinatio mutua, quæ Curvas PM, PL in punctis P, L contingant, talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis ſolaris 3IT, tempore quo motu medio Lunæ conficitur arcus PM, ceſſante vi terreſtri, ſola generaret. At verò arcubus PM, PL infinitè imminutis, eorum chordæ PM, PL cum rectis contingentibus ultimò congruunt, & angulum inclinationis mutuæ eum ultimò quem tangentes habent. Angulorum igitur naſcentium PTM, LPM ea prima erit inter ipſos ratio, quæ Lunæ à recto tramite deflexionum prima, quas vis terreſtris & vis Solaris 3IT eodem tempore ſingulatim generaverint; id eſt, eadem quæ mutationum, quas vires illæ in vi inſitâ Lunari ſimul primas effecerint. Hæc autem haud alia erit præter virium rationem. Erit igitur motus horarius nodorum, in eo qui poſitus eſt ſitu Nodorum & Lunæ, ad motum horarium Lunæ medium à ſtellis fixis ſicut 1 ad 59,575.

Qui angulum deflexionis Lunæ à recto tramite aliter intelligunt quàm nos interpretati ſumus, decipiuntur.

negativum,

negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreffivus in progreffivum & progreffivus in regreffivum mutari. Unde fit ut nodi regrediantur, quoties Luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verfatur. Aliis in cafibus regrediuntur, & per exceffum regreffûs fupra progreffum fingulis menfibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc fi à dati arcûs quàm minimi PM terminis, P & M, ad lineam quadraturas jungentem, Q*q*, demittantur perpendicula PK, M*k*, eademque producantur donec fecent lineam nodorum N*n* in D & *d*; erit motus horarius nodorum ut area MPD*d* &



quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres finus. Nempe PK, finus diftantiæ Lunæ à quadraturâ; PH, finus diftantiæ Lunæ à nodo; & AZ, finus diftantiæ nodi à Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum PK × PH × AZ. Eft autem PT ad PK ut PM ad K*k*, ideoque, ob datas PT & PM, eft K*k* ipfi PK proportionalis. Eft & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo PD × AZ proportionalis; & conjunctis rationibus, PK × PH eft ut contentum K*k* × PD × AZ, & PK × PH × AZ ut K*k* × PD × AZ *qu.* id eft, ut area PD*d*M & AZ *qu.* conjunctim. Q. E. D.

Corol. 2. In datâ quâvis Nodorum pofitione, motus horarius mediocris eft femiffis motûs horarii in fyzygiis Lunæ, ideoque eft ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut quadratum finûs diftantiæ nodorum à fyzygiis ad quadratum radii, five ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam fi Luna uniformi cum motu perambulet femicirculum QA*q*, fummâ

mâ omnium arearum PD*d*M, quo tempore Luna pergit à Q ad M, erit area QM*dE*, quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum *n*, fumma illa erit area tota EQA*n*, quam linea PD defcribit; dein Lunâ pergente ab *n* ad *q*, linea PD cadet extra circulum, & aream *nqe*, ad circuli tangentem *qe* terminatam, defcribet; quæ, quoniam nodi priùs regrediebantur, jam verò progrediuntur, fubduci debet de areâ priore, & cùm æqualis fit areæ QEN, relinquet femicirculum NQA*n*. Igitur fumma omnium arearum PD*d*M, quo tempore Luna femicirculum defcribit, eft area femicirculi; & fumma omnium, quo tempore Luna circulum defcribit, eft area circuli totius. At area PD*d*M, ubi luna verfatur in fyzygiis, eft rectangulum fub arcu PM & radio PT; & fumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum defcribit, eft rectangulum fub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cùm fit æquale duobus circulis, duplo majus eft quàm rectangulum prius. Proinde Nodi, eâ cum velocitate, uniformiter continuatâ, quam habent in fyzygiis lunaribus, fpatium duplo majus defcriberent, quàm reverâ defcribunt; & propterea motus mediocris quocum, fi uniformiter continuaretur, fpatium à fe inæquabili cum motu reverâ confectum defcribere poffent, eft femiffis motûs quem habent in fyzygiis Lunæ. Unde cùm motus horarius maximus, fi nodi in quadraturis verfantur, fit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc cafu erit $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. Et cùm motus horarius nodorum femper fit ut AZ *qu.* & area PD*d*M conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in fyzygiis lunæ ut AZ *qu.* & area PD*d*M conjunctim, id eft (ob datam aream PD*d*M in fyzygiis defcriptam) ut AZ *qu.* erit etiam motus mediocris ut AZ *qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas verfantur, erit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Q. E. D.

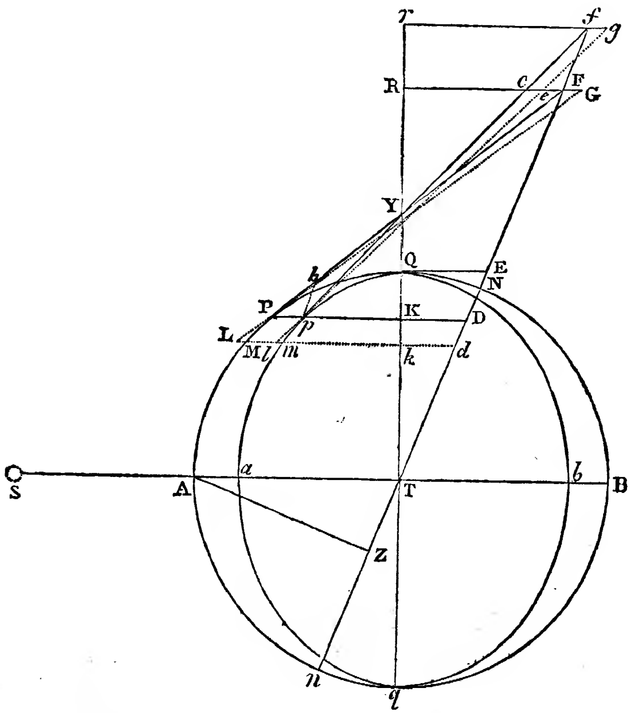
PROP. XXXI. PROB. XII.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in orbe Elliptico.

Defignet Q*pmaq* Ellipfin, axe majore Q*q*, minore *ab* defcriptam; QA*q*B, circulum circumfcriptum; T, terram in utriufque centro

De Mundi Systemate

tro communi; S, Solem; *p*, Lunam in ellipſi motam; & *pm*, arcum quem datâ temporis particulâ quàm minimâ deſcribit; N & *n*, nodos lineâ N*n* junctos; *p*K & *mk*, perpendicula in axem Q*q* de-



miſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ nodorum in D & *d*. Et ſi Luna, radio ad terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus horarius Nodi in Ellipſi ut area *p*D*dm* & AZ*q* conjunctim.

Nam ſi PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F; & *pf* tangat ellipſin in *p*, & producta occurrat eidem TN in *f*; conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Y; & ſi ML deſignet ſpatium, quod Luna, in Circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædictâ 3IT, ſeu 3PK, motu tranſverſo deſcribere poſſet; & *ml* deſignet ſpatium quod Luna, in Ellipſi revolvens, eodem tempore, urgente etiam vi 3IT, ſeu 3PK, deſcribere poſſet; & producantur LP & *lp*, donec occurrant

plano

Liber Tertius.

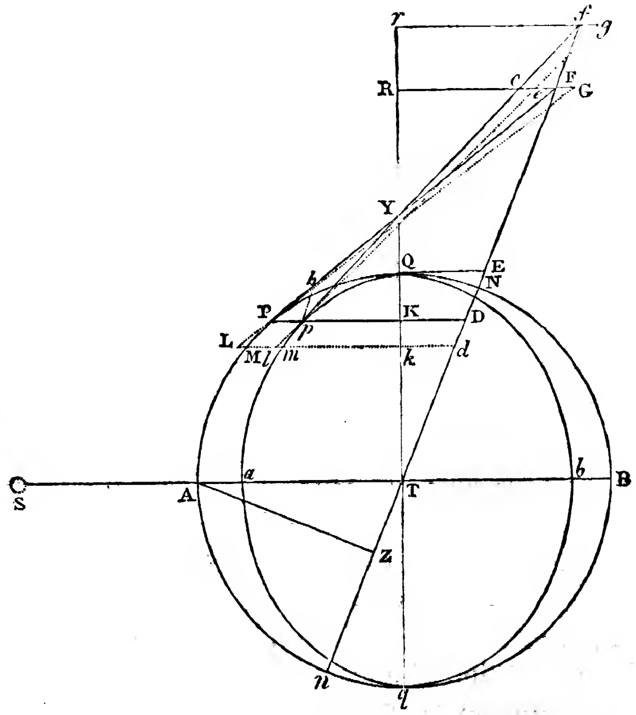
plano Eclipticæ in G & *g*; & jungantur FG & *fg*, quarum FG producta ſecet *pf*, *pg* & TQ in *c*, *e* & R reſpectivè, & *fg* producta ſecet TQ in *r*: quoniam vis 3IT, ſeu 3PK, in circulo eſt ad vim 3IT ſeu 3*p*K in ellipſi, ut PK ad *p*K, ſeu AT ad *a*T; erit ſpatium ML, vi priore genitum, ad ſpatium *ml*, vi poſteriore genitum, ut PK ad *p*K; id eſt, ob ſimiles figuras PYK*p* & FYR*c*, ut FR ad *c*R. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc eſt (ob parallelas L*k*, PK, GR) ut *pl* ad *pe*, id eſt (ob ſimilia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inverſè (y) ut LM eſt ad *lm*, ſeu FR ad *c*R, ita eſt FG ad *ce*. Et propterea, ſi *fg* eſſet ad *ce* ut *f*Y ad *c*Y, id eſt, ut *fr* ad *c*R (hoc eſt, ut *fr* ad FR & FR ad *c*R conjunctim, id eſt, ut *f*T ad FT & FG ad *ce* conjunctim) quoniam ratio FG ad *ce* utrinque ablata relinquit rationes *fg* ad FG & *f*T ad FT, foret *fg* ad FG ut *f*T ad FT; atque ideo anguli, quos FG & *fg* ſubtenderent ad terram T, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propoſitione expoſuimus) ſunt motus nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM, in Ellipſi arcum *pm*, percurrit: & propterea motus nodorum in Circulo & Ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modò *fg* eſſet ad *ce* ut *f*Y ad *c*Y; id eſt, ſi *fg* æqualis eſſet $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob ſimilia triangula *fgp*, *cep*, eſt *fg* ad *ce* ut *fp* ad *cp*; ideoque *fg* æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem *fg* reverâ ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem FG ſubtendit, hoc eſt, motus nodorum in Ellipſi ad motum nodorum in Circulo, ut hæc *fg*, ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$, ad priorem *fg*, ſeu $\frac{ce \times fY}{cY}$; id eſt, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, ſeu *fp* ad *f*Y & *c*Y ad *cp*; hoc eſt, ſi *ph*, ipſi TN parallela, occurrat FP in *h*, ut F*h* ad FY & FY ad FP; hoc eſt, ut F*h* ad FP, ſeu D*p* ad DP; ideoque ut area D*pmd* ad aream DPM*d*. Et propterea, cùm (per Corol. 1. Prop. XXX.) area poſterior & AZ*q* conjunctim proportionalia ſint motui horario nodorum in Circulo, erunt area prior & AZ*q* conjunctim proportionalia motui horario nodorum in Ellipſi. Q. E. D.

Corol. Quare cùm, in datâ Nodorum poſitione, ſumma omnium arearum *p*D*dm*, quo tempore Luna pergit à quadratura ad locum quemvis *m*, ſit area *mp*QE*d*, quæ ad ellipſeos tangentem QE ter-

(y) — *inverſè*] permutando.

minatur;

minatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, fit area Ellipseos totius: motus mediocris nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in Circulo, ut Ellipsis ad Circulum; id est, ut T*a* ad TA, seu 69 ad 70. Et propterea,



cùm (per Corol. 2. Prop. XXX.) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad 16″. 35‴. 16^iv. 36^v. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* si capiatur angulus 16″. 21‴. 3^iv. 30^v. ad angulum 16″. 35‴. 16^iv. 36^v. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in Ellipsi ad 16″. 21‴. 3^iv. 30^v. ut AZ*q* ad AT*q*; hoc est, ut quadratum sinûs distantiæ nodi à Sole ad quadratum radii.

Cæterùm Luna, radio ad terram ducto, aream velociùs describit in syzygiis quàm in quadraturis; & eo nomine tempus in syzygiis

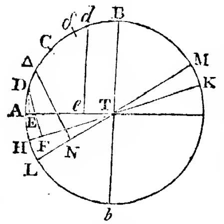
(z) Prop. XXVI. hujus Libri.

(aa) Vel quod eodem redit, ut illud quo sinus versus duplæ distantiæ à quadraturis abest à radio.

zygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis Lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073; & propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quàm proximè. Pergendo autem à quadraturis ad syzygias, invenio quòd excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinûs distantiæ Lunæ à quadraturis quàm proximè (z); & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in octantibus, est ut differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ à quadraturis & quadratum sinûs graduum 45, seu semissem quadrati radii (aa); & incrementum temporis in locis singulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & syzygias, est in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna percurrit PM (cæteris paribus) ut ML, & ML est in duplicatâ ratione temporis. Quare motus Nodorum in syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum verò totum ut 100 ad 11073 quàm proximè. Decrementum autem in locis inter octantes & syzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, est quàm proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis, & differentia inter quadratum sinûs distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim (bb). Unde si nodi in quadraturis versentur,

(bb) Planum orbitæ Lunaris, Fixarum usque sphæram productum, superficiem ejus secando circulum AB*b* efficiat, cujus punctum A locus sit quo cernitur Luna nova, vel plena; punctum *a* ille

ſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde diſtantia, & alia duo à ſyzygiâ & quadraturâ iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter ſyzygiam & octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygiâ: uti rationem



ille quo dimidiata; arcumque AB punctum C medium dividat. Sit D locus aliquis Lunæ inter punctum C & punctum coitûs A. A puncto D in rectam TA deducatur ad perpendiculum recta DE, ut ſit TE æqualis ſinui arcûs BD, quo Luna à loco B abeſt. Si Luna, in orbe ſuo, ex circulari in Ellipſin per vim Solis transformato, areas circum Terram, in centro poſitam, æquabili motu ſcriberet; motus horarius Nodi orbitæ Lunaris, ſive velocitas ejus ſub Eclipticâ, in dato quovis ſitu Solis, Lunæ, et Nodi, talis eſſet, qualem Newtonus in hâc Propoſitione conſtituit. Lunâ igitur locum D obtinente, literâ N ſignificetur angulus, quem Nodus orbitæ Lunaris è terrâ viſus, in dato quovis ejus tam ad Solem quàm ad Lunam ipſam ſitu, cum velocitate illâ, quam pro hâc Propoſitione haberet, dato quovis tempore ſub Eclipticâ conficeret. Sit $N-y$ angulus ille minor, quem eodem tempore cum minore illâ velocitate conficeret, quam, in eodem ipſius ad Lunam et ad Solem poſitu, Lunâ locum D obtinente, reverâ habet, propter arearum utique circum centrum confectionem in orbe Lunari Elliptico reverâ inæquabilem. Literâ A ſignificetur angulus, quem nodus, Lunâ in locum A tranſlatâ, eodem tempore conficeret, cum velocitate illâ quam pro hâc Propoſitione haberet; literâ etiam a ſignificetur illud, quo angulus A ab angulo illo minore abeſt, quem eodem tempore, Nodus, ſimiliter ad Lunam et ad Solem poſitus, verâ ſuâ velocitate ſcriberet. Dicit Newtonus y ad a rationem habere, quæ componitur è rationibus anguli N ad angulum A, ſpatiique $TE^2-\frac{1}{2}TA^2$ ad $\frac{1}{2}TA^2$. Id nos oſtendimus hoc modo.

Literâ L ſignificetur angulus, quem Luna, cum velocitate illâ mediâ quam in loco C habeat, circum centrum T eo tempore conficeret, quo Nodus orbitæ Lunaris angulum $N-y$. Sit $L+x$ angulus, quem eodem tempore Luna conficeret, cum majore illâ velocitate quam in D habet; et $L+l$ angulus, quem eodem etiam tempore conficeret, cum velocitate quæ ei in coitu maxima eſt. Tempus igitur, quo Luna, cum velocitate illâ quam in D habet, angulum L conficeret, ad tempus quo eundem angulum conficeret cum velocitate ſuâ mediâ, rationem habebit quam L ad $L+x$. Jam verò anguli $N-y$, N, erunt inter ſe ſicut velocitates quibuſcum dato tempore conficiantur; et velocitates illæ temporum, quibus generatæ fuerint, rationem duplicatam gerent; id eſt duplicatam temporum, quibus Luna, cum velocitatibus quas in locis D, C diverſas habet, angulum L conficeret. Erit igitur $N-y$ ad N ut L^2 ad $\overline{L+x}|^2$; ſive cùm angulus x perexiguus ſit ratione illius L, ut L ad $L+2x$. Invertendo & convertendo, $N:y=L+2x:2x$. Vel cùm x perexiguus ſit ratione anguli L, $N:y=L:2x$. Invertendo $y:N=2x:L$. Quod cùm generaliter verum ſit, ubivis loci ſumatur punctum D, modò inter A, C; idcirco erit et $A:a=L:2l$. Cùm igitur ſit $y:N=2x:L$, et $A:a=L:2l$, idcirco, rationes ſimiles componendo, erit $y\times A:N\times a=x:l$. Sed $N\times a:A\times a=N:A$. Quare ſimiles rationes iterum componendo, $y:a=x\times N:l\times A$. Sed x ad l rationem habet, quam $TE^2-\frac{1}{2}TA^2$ ad $\frac{1}{2}TA^2$. Quare $y:a=N\times\overline{TE^2-\frac{1}{2}TA^2}:A\times\frac{1}{2}TA^2$.

Quòd ſi locus d ſumatur inter B et C, & ſymbolis $N+y$, $L-x$, ſignificentur anguli, quos Nodus orbitæ Lunaris, & Luna ipſa dato quodam tempore, cum veris ſuis velocitatibus conficerent; literis autem N, L anguli, quos eodem tempore conficerent, ſi Luna mediâ ſuâ velocitate, Nodus cum eâ ferretur, quam, manente ipſius tam ad Solem quàm ad Lunam ſitu, Lunâque etiam punctum d obtinente, ipſe haberet, ſi Luna areas circum centrum in orbe Elliptico æquabiliter ſcriberet; tum ſi à puncto d in rectam TA deducatur ad perpendiculum de; ſimilibus planè argumentis efficiendum erit, $y:a=N\times\overline{Te^2-\frac{1}{2}TA^2}:A\times\frac{1}{2}TA^2$.

Univerſè igitur decrementum motûs horarii Nodi in locis inter C et A, & incrementum in locis inter C et B (decrementum loquimur et incrementum ab inæquabili arearum generatione in orbe

Lunari

nem ineunti facilè conſtabit (cc). Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygiâ. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi Luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32''.42'''.7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073;

Lunari Elliptico) erit quàm proximè ad decrementum in ipſo Lunæ coitu, ut motus totus horarius in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & differentia inter quadratum ſinûs diſtantiæ Lunæ à dimidiatæ loco et ſemiſſem quadrati radii, ad ſemiſſem quadrati Radii conjunctim. Vel quod perinde eſt, ut motus totus in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & illud, quo ſinus verſus duplæ diſtantiæ Lunæ à dimidiatæ loco abeſt à radio, ad radium ipſum conjunctim.

(cc) CAPIANTUR puncta Δ, δ, à puncto C hinc inde æqualiter remota. Et capiantur AD, Bδ arcuum CΔ, Cδ æquales: qui proinde et inter ſe æquales. Notis $\dot{A}$, $\dot{D}$, $\dot{\Delta}$, $\dot{\delta}$, $\dot{d}$ ſignificentur motus horarii Nodorum Lunæ, puncta B, b obtinentium, quando Luna ipſa loca A, D, Δ, δ, d obtineat. Notis autem $\ddot{A}$, $\ddot{D}$, $\ddot{\Delta}$, $\ddot{\delta}$, $\ddot{d}$ ſignificentur motûs nodorum horarii decrementa in locis A, D, Δ, incrementa in locis δ, d, à perturbato Lunæ motu circum centrum orbis Elliptici oriunda. Capiatur arcus AH illius AD æqualis. Junctaque TH circulo iterum in K occurrat; et in eam ad perpendiculum deducatur DF. Arcus BK æqualis erit arcui BD. Erit igitur KBD dupla diſtantia puncti D à loco lunæ dimidiatæ B, & KF duplæ illius diſtantiæ ſinus verſus. Quapropter $\ddot{D}$ ad $\ddot{A}$ rationem habebit compoſitam è rationibus quam $\dot{D}$ ad $\dot{A}$, quamque TF ad TA. (Not. bb.) Nodo autem in B poſito, $\dot{D}$ erit ad $\dot{A}$ ut rectangulum ſub ſinubus diſtantiarum loci Lunæ D à B et à Nodo, id eſt ut quadratum è ſinu arcûs BD, ad quadratum è radio: ſive ut ſinus verſus dupli BD ad diametrum: id eſt ut KF ad 2TA. Habet igitur $\ddot{D}$ ad $\ddot{A}$ rationem quæ componitur è rationibus rectæ TF ad TA rectæque KF ad 2TA; ſive eam quam $KF\times TF$ ad duplum quadrati ex TA.

Rurſum propter arcum AH ipſi AD æqualem, erunt AH, Bd inter ſe æquales. Quapropter arcus DH duplus erit Bd, rectaque HF dupli Bd ſinus verſus erit. Unde eiſdem planè argumentis quibus ſuperiora effecimus, oſtendere licet $\ddot{d}$ ad $\ddot{A}$ rationem habere quam $HF\times TF$ ad duplum quadrati ex TA.

Cùm igitur ſit $\ddot{D}:\ddot{A}=KF\times TF:2.TA^2$.

Et $\ddot{d}:\ddot{A}=HF\times TF:2TA^2$.

Erit $\ddot{D}-\ddot{d}:\ddot{A}=\overline{KF-HF}\times TF:2.TA^2$. (El. v. 24.) Sed $KF-HF=2TF$. Quare $\ddot{D}-\ddot{d}:\ddot{A}=2.TF^2:2.TA^2=TF^2:TA^2$.

Simili modo, accepto arcu AL ipſius AΔ æquali, & in junctam TL (quæ circulo iterum in M occurrat) deductâ ad perpendiculum rectâ ΔN, oſtendemus $\ddot{\Delta}-\ddot{\delta}$ ad $\ddot{A}$ rationem habere quam TN^2 ad TA^2.

Cùm igitur ſit $\ddot{D}-\ddot{d}:\ddot{A}=TF^2:TA^2$.

Et $\ddot{\Delta}-\ddot{\delta}:\ddot{A}=TN^2:TA^2$.

Erit $\ddot{D}+\ddot{\Delta}-\ddot{d}-\ddot{\delta}:\ddot{A}=TF^2+TN^2:TA^2$.

Jam verò TF^2, TN^2 quadrato è radio TA ſimul ſumpta ſunt æqualia. Arcus enim AD, cùm ſit æqualis illi CΔ, arcus AΔ ille erit quo AD abeſt à CA. Unde duplus AΔ ille erit quo duplus AD abeſt à duplo CA, id eſt, à quadrante. Quare arcus ΔL, qui eſt duplus ΔA, ille erit quo DH, qui eſt duplus AD, abeſt à quadrante. Quare recta TN, quæ coſinus eſt arcûs ΔL, ſinui arcûs DH, ſive rectæ DF, æqualis erit. Quare $TN^2+TF^2=DF^2+TF^2=TD^2$, vel TA^2.

Erunt igitur TF^2, TN^2 ſimul ſumpta quadrato ex TA æqualia. Et illud $\ddot{D}+\ddot{\Delta}-\ddot{d}-\ddot{\delta}$, cùm habeat ad $\ddot{A}$ rationem eam quam TN^2+TF^2 ad quadratum ex TA, ipſi utique $\ddot{A}$ æquale erit. Q. E. D.

ideoque

De Mundi Systemate

ideoque decrementum illud eſt $17'''.\ 14^{iv}.\ 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$. motu horario mediocri ſuperiùs invento $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia ; ſumma motuum nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Et decrementa motuum, à cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus; ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut AZ *qu.* ad AT *qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.*; id eſt, ut quadratum ſinûs diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii.

PROP. XXXII. PROB. XIII.

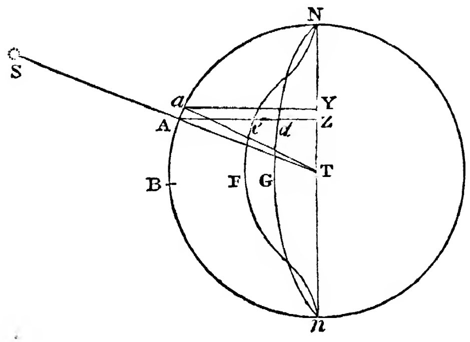
Invenire motum medium Nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in N, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò Solem S, per motum Terræ, progredi à nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem A*a* arcus datus quàm minimus, quem recta TS, ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli NA*n*, dato tempore quàm minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZ*q*, id eſt (ob proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt, ut area AZY*a*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *a*YZA, id eſt, ut area NAZ. Eſt autem maxima AZY*a* æqualis rectangulo ſub arcu A*a* & radio circuli ; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo

(dd) Ea ſit Curvæ N*dn* natura, ut fluxio areæ NZ*d* ad fluxionem ſectoris circularis NTA rationem

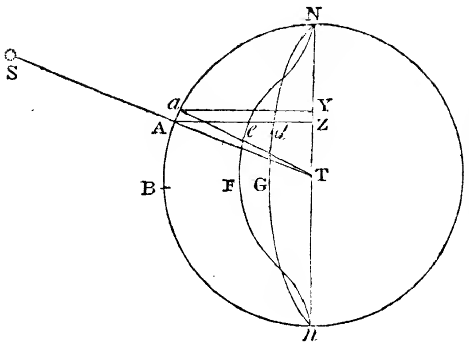
Liber Tertius.

mo reſpondens, erat $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab N ad A, eſt ad $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. ut area NAZ ad circulum totum.



Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut Sol anno toto completo ad nodum eundem redeat, à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit, ut Sol citiùs ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cùm Sol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$, ſeu 39,6355 gradus ; & motus mediocris nodi in loco quovis N ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut AZ*q* ad AT*q* : erit motus ſolis ad motum nodi in N, ut 360 AT*q* ad 39,6355 AZ*q*; id eſt, ut 9,0827667 AT*q* ad AZ*q*. Unde ſi circuli totius circumferentia, NA*n*, dividatur in particulas æquales, A*a*, tempus quo ſol percurrat particulam A*a*, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus unà cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827667AT*q* ad 9,0827667AT*q*+AZ*q*. Nam tempus eſt reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur; & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum Solis & nodi. Igitur ſi tempus, quo Sol ſine motu nodi percurreret arcum NA, exponatur per ſectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum A*a*, exponatur per ſectoris particulam AT*a*; & (perpendiculo *a*Y in N*n* demiſſo) ſi in AZ capiatur *dz*, ejus longitudinis ut ſit rectangulum *dz* in ZY ad ſectoris particulam AT*a* ut AZ*q* ad 9,0827646AT*q*+AZ*q*; id eſt, ut ſit *dz* ad $\frac{1}{2}$AZ ut AT*q* ad 9,0827646 AT*q* + AZ*q* (dd) : rectangulum

nem habeat quam quadratum ex AZ ad $a.AT^2+AZ^2$, deſignante *a* datam quanlibet quantitatem Arithmeticam.



rectangulum dz in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit Curvam NdGn, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore minore minor est in ratione temporis,

Arithmeticam. Dico dz esse ad $\frac{1}{2}$AZ ut AT^2 ad $a.AT^2+AZ^2$. Fluxio arcûs circularis NA dicatur $\dot{z}$; fluxio rectæ NZ, $\dot{x}$; ut fluxio sectoris circularis ATa sit $\frac{1}{2}AT.\dot{z}$, fluxio areæ NZd. $zd \times \dot{x}$.

Erit $dz \times \dot{z} : dz \times \dot{x} = \dot{z} : \dot{x} = TA : AZ = TA \times AZ : AZ^2$.

Sed $dz \times \dot{x} : \frac{1}{2}AT \times \dot{z} = AZ^2 : a.AT^2 + AZ^2$. (Id enim positum est.)

Ex æquo $dz : \frac{1}{2}AT = TA \times AZ : a.AT^2 + AZ^2$.

Quare $dz \times AT : \frac{1}{2}AT^2 = TA \times AZ : a.AT^2 + AZ^2$.

Permutando $dz : AZ = \frac{1}{2}AT^2 : a.AT^2 + AZ^2$.

Quare $dz : \frac{1}{2}AZ = AT^2 : a.AT^2 + AZ^2$. Q. E. D.

(ee) Area Nen haud aliâ ratione promptiùs credo definietur, quàm si exquiramus quanta sit NFnBN, quâ prior illa à semicirculo abest. A T ad perpendiculum educatur TB, quæ circulo in B, Curvæ NFn in F occurrat. Jam cùm sit $ze : AZ = AZ^2 : a.AT^2 + AZ^2$, invertendo & convertendo $AZ : eA = a.AT^2 + AZ^2 : a.AT^2$. Ponatur $AT = 1$, $TZ = x$. Ita erit $AZ = \sqrt{1-x^2}$, et $\sqrt{1-x^2} : eA = a + 1 - x^2 : a$. Unde $eA = \frac{a\sqrt{1-x^2}}{a+1-x^2}$. Et $eA \times \dot{x}$, sive fluxio areæ BFeA, $= \sqrt{1-x^2} \times \frac{a}{a+1-x^2}\dot{x}$; vel si pro $a+1$ scribatur c, erit $eA \times \dot{x} = \dot{x}\sqrt{1-x^2} \times \frac{a}{c-x^2}$: vel si quantitas $\frac{a}{c-x^2}$ in seriem infinitam divisionis operâ resolvatur, $eA \times \dot{x} = \dot{x}\sqrt{1-x^2} \times \frac{a}{c} + \frac{a}{c^2}x^2 + \frac{a}{c^3}x^4 + \frac{a}{c^4}x^6 + \frac{a}{c^5}x^7$. Hinc $\boxed{eA \times \dot{x}}$, sive area BF$e$A, ex areis Curvarum innumerabilium est conflata, quarum omnium cùm communis sit abscissa x, ordinatæ sunt hæ: Primæ, $\frac{a}{c}\sqrt{1-x^2}$; Secundæ, $\frac{a}{c^2}x^2\sqrt{1-x^2}$; Tertiæ, $\frac{a}{c^3}x^4\sqrt{1-x^2}$; Quartæ, $\frac{a}{c^4}x^6\sqrt{1-x^2}$; eodemque deinceps usque modo.

Area Curvæ quæ abscissam habet x, ordinatam $\sqrt{1-x^2}$, quæ est area ipsa circularis BTZA, significetur literâ A; area Curvæ, cujus abscissa x ordinata $x^2\sqrt{1-x^2}$, significetur literâ B. Literis etiam, C, D, E significentur singulatim Curvarum areæ, quarum omnium abscissa communis x, ordinatæ singularum $x^4\sqrt{1-x^2}$, $x^6\sqrt{1-x^2}$, $x^8\sqrt{1-x^2}$. Areæ igitur BFeA hujus seriei summa ultimò æqualis erit, $\frac{a}{c}A + \frac{a}{c^2}B + \frac{a}{c^3}C + \frac{a}{c^4}D + \frac{a}{c^5}E$, &c. Ad aream igitur BF$e$A definiendam illud

opus

poris, debebit etiam area AaYZ diminui in eâdem ratione. Id quod fiet, si capiatur in AZ longitudo ez, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad 9,0827646 ATq + AZq. Sic enim rectangulum ez in ZY erit ad aream AZYa ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motûs nodi. Et si punctum e tangat Curvam NeFn, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus, quo tempore arcus totus NA, per Solis & nodi conjunctos motus, percurritur. Jam verò area semicirculi est ad aream figuræ NeFn, per methodum serierum infinitarum quæsitam, ut 793 ad 60 quamproximè (ee). Motus autem qui respondet circulo

opus erit, areas literis A, B, C, D, E, &c. significatas definire. Harum autem illâ A, per circuli quadraturam, datâ, reliquæ etiam per Prop. VII. Libri De Quadraturâ Curvarum dabuntur. Nempe hoc modo; $B = \frac{x \times \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}} - A}{-4} = \frac{A - x \times \overline{1-x}|^{\frac{3}{2}}}{4}$. (Id enim efficitur per Æquationem Canonicam Primi Casûs ejus Propositionis primam, scribendo 1 pro θ, $\frac{3}{2}$ pro λ, 2 pro n, 1 pro e, -1 pro f.) Et per eandem æquationem, scribendo 3 pro θ, B pro A, & C pro B, invenietur $C = \frac{3B - x^3 \times \overline{1-x}|^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{3A}{4 \times 6} - \frac{3x \times \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}}{4.6.} - \frac{x^3 \times \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}}{6}$.

Rursum $D = \frac{5C - x^5 \times \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}}{8} = \frac{3.5.A}{4.6.8} - \frac{3.5.x \times \overline{1-x}|^{\frac{3}{2}}}{4.6.8} - \frac{5.x^3 \times \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}}{6\ 8.} - \frac{x^5 \times \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}}{8.}$

Rursum $E = \frac{7D - x^7 \times \overline{1-x}|^{\frac{3}{2}}}{10} = \frac{3.5.7.A}{4.6.8.10} - \overline{\frac{3.5.7.x}{4\ 6.8.10} + \frac{5.7.x^3}{6.8.10.} + \frac{7.x^5}{8.10} + \frac{x^7}{10}}\ \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}$.

Hinc area BFeA $= \frac{a}{c}A + \frac{a}{4c^2}A - \frac{a}{4c^2}x \times \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}} + \frac{3a}{4.6c^3}A - \overline{\frac{3ax}{4.6c^3} + \frac{ax^3}{6c^3}}\ \overline{1-x}|^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5.a.A}{4.6.8.c^4} - \overline{\frac{3.5.a.x}{4.6.8.c^4} + \frac{5ax^3}{6.8.c^4} + \frac{ax^5}{8c^4}}\ \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5.7.aA}{4.6.8.10.c^5} - \overline{\frac{3.5.7.ax}{4.6.8.10.c^5} + \frac{5.7.ax^3}{6.8.10.c^5} + \frac{7ax^5}{8.10.c^5} + \frac{ax^7}{10.c^5}}\ \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}}$ &c.

$= A \times \frac{a}{c} + \frac{a}{4c^2} + \frac{3a}{4.6.c^3} + \frac{3.5.a}{4.6.8.c^4} + \frac{3.5.7.a}{4.6.8.10.c^5} +$ &c.

$$- \overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}} \times \begin{array}{llll} \frac{a}{4c^2}x & + \frac{ax^3}{6.c^3} & + \frac{ax^5}{8.c^4} & + \frac{ax^7}{10.c^5} + \\ + \frac{3ax}{4.6.c^3} & + \frac{5ax^3}{6.8.c^4} & + \frac{7.a.x^5}{8.10.c^5} + & \\ + \frac{3.5.ax}{4.6.8.c^4} & + \frac{5.7.ax^3}{6.8.10.c^5} + & & \\ + \frac{3.5.7.ax}{4.6.8.10.c^5} + & & & \end{array}$$

Hinc

culo toti erat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. & propterea motus, qui figuræ N*e*F*n* duplicatæ respondet, est $1^{gr}. 29'. 58''. 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. motum totum nodi respectu Fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}. 40'. 54''. 7'''$. motum Solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}. 18'. 1''. 23'''$. Hic est motus medius Nodorum in anno sidereo. Idem per tabulas astronomicas est $19^{gr}. 21'. 21''. 50'''$. Differentia minor est parte trecentesimâ motûs totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

PROP. XXXIII. PROB. XIV.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod est ut area NTA−N*dz*, *(in fig. præced.)* motus iste est ut area NA*e*, & inde datur. Verùm ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, describatur circulus BEFD. Producatur DC ad A, ut sit AB ad AC ut motus medius ad semissem motûs veri mediocris, ubi nodi sunt in quadraturis; id est, ut $19^{gr}. 18'. 1''. 23'''$. ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$, atque adeo BC ad

AC

Hinc quando TZ in ipsam TN increverit, ut sit $x = 1$, & $\overline{1-x^2}|^{\frac{3}{2}} = 0$, erit area BFNB $= A \times \frac{a}{c} + \frac{a}{4c^2} + \frac{3.a}{4.6.c^3} + \frac{3.5.a}{4.6.8.c^4} + \&c.$ Et area quadrantis BTN ad hanc aream rationem habebit quam $\frac{1}{a}$ ad $\frac{1}{c} + \frac{1}{4c^2} + \frac{3}{4.6.c^3} + \frac{3.5}{4.6.8.c^4} + \frac{3.5.7}{4.6.8.10.c^5}$ &c.

Jam verò cùm sit $a = 9{,}0827667$, erit $\frac{1}{a} = 0{,}110098$.

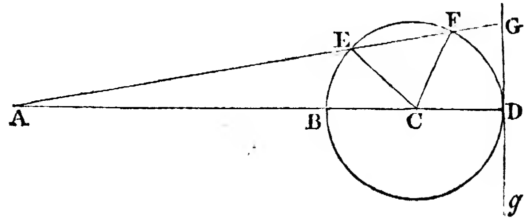
$$\frac{1}{c} = 0{,}099179170$$

$$\frac{1}{4c^2} \quad 0{,}002459126$$

$$\frac{3}{4.6.c^3} \quad 0{,}000121947$$

3.5

AC ut motuum differentia $0^{gr}. 31'. 2''. 32'''$, ad motum posteriorem $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. hoc est, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita G*g*, quæ tangat circulum in D; & si capiatur angulus BCE, vel BCF, æqualis duplæ distantiæ Solis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF secans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus, qui sit ad motum totum nodi inter ipsius syzygias (id est, ad $9^{gr}. 11'. 3''$.) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iste (pro



quo angulus DAG usurpari potest) ad motum medium nodorum addatur, ubi nodi transeunt à quadraturis ad syzygias, & ab eodem motu medio subducatur, ubi transeunt à syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quàm proximè cum motu vero, qui prodit exponendo tempus per aream NTA−N*dz*, & motum nodi per aream NA*e*; ut rem perpendenti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris motus nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem latitudinis Lunæ minimè necessaria est. Nam cùm variatio inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, al-

$$\frac{3.5}{4.6.8.c^4} = 0{,}000007559$$

$$\frac{3.5.7}{4.6.8.10.c^5} \quad 0{,}000000525$$

$$\frac{3.5.7.9}{4.6.8.10.12.c^6} \quad 0{,}000000039$$

$$\frac{3.5.7.9.11}{4.6.8.10.12.14.c^7} \quad 0{,}000000003$$

Summa 0,101768369

Hinc area quadrantis ad aream NFB, ac proinde area semicirculi ad aream NA*n*FN, rationem habet quam 110098 ad 101768. Convertendo area semicirculi ad aream N*e*F*n* rationem habet quam 110098 ad 8330; id est eam quam 793 ad 60 propemodum. Nam 8330 : 110098 = 60 : 793,02 +.

teri

De Mundi Systemate

teri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua Nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinandâ latitudine Lunæ negligi poſſint.

Corol. Ex hâc & præcedente Propoſitione liquet quòd Nodi in ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''. 19'''. 26^{iv}$. Et quòd æquatio motus Nodorum in octantibus ſit $1^{gr}. 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœleſtibus probè quadrant.

Scholium.

Aliâ ratione motum Nodorum *J. Machin Aſtron. Prof. Greſham.* & *Hen. Pemberton*, M. D. ſeorſum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta eſt (ff). Et utriuſque chartæ, quas vidi, duas Propoſitiones continebant, & inter ſe in utriſque congruebant. Chartam verò D. *Machin*, cùm prior in manus meas venerit, hîc adjungam.

DE MOTU NODORUM LUNÆ.

PROPOSITIO I.

“ *Motus Solis medius à Nodo, definitur per medium proportionale* “ *geometricum, inter motum ipſius Solis medium, & motum illum* “ *mediocrem quo Sol celerrimè recedit à Nodo in quadraturis.*

“ Sit T locus ubi Terra; N*n*, linea Nodorum lunæ ad tempus “ quodvis datum; KTM, huic ad rectos angulos ducta; TA, recta “ circum centrum revolvens, eâ cum velocitate angulari, quâ ſol “ & nodus à ſe invicem recedunt; ita ut angulus inter rectam “ quieſcentem N*n* & revolventem TA, ſemper fiat æqualis diſtan- “ tiæ locorum ſolis & nodi. Jam ſi recta quævis TK dividatur in “ partes TS & SK, quæ ſint ut motus ſolis horarius medius ad mo- “ tum horarium mediocrem nodi in quadraturis, & ponatur recta “ TH media proportionalis inter partem TS & totam TK, hæc rec- “ ta inter reliquas proportionalis erit motui medio ſolis à nodo.

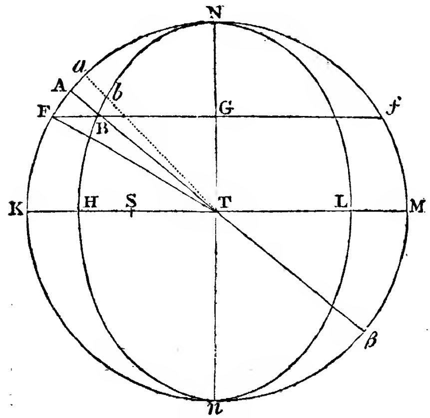
“ Deſcribatur enim Circulus NK*n*M, centro T, & radio TK; eo-

(ff) In Epiſtolâ Pembertoni ad Amicum de Coteſii Inventis, p. 6 & 7.

“ demque

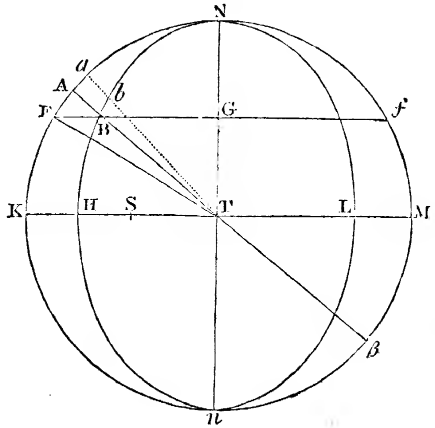
Liber Tertius.

“ demque centro, & ſemiaxibus TH & TN, deſcribatur Ellipſis “ NH*n*L; & in tempore quo ſol à nodo recedit per arcum N*a*, ſi “ ducatur recta T*ba*, area ſectoris NT*a* exponet ſummam motuum “ nodi & ſolis in eodem tempore. Sit igitur arcus *a*A quàm mi- “ nimus, quem recta T*ba*, præfatâ lege revolvens, in datâ tem-



“ poris particulâ uniformi- “ ter deſcribit, & ſector “ quàm minimus TA*a* erit “ ut ſumma velocitatum “ quâ ſol & nodus tum tem- “ poris ſeorſim feruntur. “ Solis autem velocitas ferè “ uniformis eſt, utpote cu- “ jus parva inæqualitas vix “ ullam inducit in medio “ nodorum motu varieta- “ tem. Altera pars hujus “ ſummæ, nempe velocitas “ nodi in mediocri ſuâ quan- “ titate, augetur in receſſu à ſyzygiis in duplicatâ ratione ſinûs “ diſtantiæ ejus à ſole; per Corol. Prop. XXXI. Lib. 3^{tii}. Princip. “ & cùm maxima eſt in quadraturis ad ſolem in K, eandem ra- “ tionem obtinet ad ſolis velocitatem, ac ea quam habet SK ad TS “ hoc eſt ut (differentia quadratorum ex TK et TH vel) rectangu- “ lum KHM ad TH quadratum. Sed Ellipſis NBH dividit ſectorem “ AT*a*, ſummæ harum duarum velocitatum exponentem, in duas “ partes AB*ba* & BT*b* ipſis velocitatibus proportionales. Produ- “ catur enim BT ad circulum in β; & à puncto B demittatur ad “ axem majorem perpendicularis BG, quæ, utrinque producta, oc- “ currat circulo in punctis F & *f*; & quoniam ſpatium AB*ba* eſt ad “ ſectorem TB*a* ut rectangulum ABβ ad BT quadratum (rectangu- “ lum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA & TB “ ob rectam Aβ æqualiter & inæqualiter ſectam in T & B); hæc “ igitur ratio, ubi ſpatium AB*ba* maximum eſt in K, eadem erit “ ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum. Sed maxima Nodi “ mediocris velocitas erat ad Solis velocitatem in hâc ratione. Igi- “ tur in quadraturis ſector AT*a* dividitur in partes velocitatibus “ proportionales.

“ proportionales. Et quoniam rectang. KHM eſt ad HT quadr. ut FB*f* ad BG quad. & rectangulum ABβ æquatur rectangulo FB*f*: erit igitur areola AB*ba* ubi maxima eſt ad reliquum ſectorem TB*b*, ut rectang. ABβ ad BG quadr. Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut ABβ rectang. ad BT quadratum; & propterea areola AB*ba* in loco A minor eſt ſimili areolâ in quadraturis, in duplicatâ ratione BG ad BT; hoc eſt in duplicatâ ratione ſinûs diſtantiæ ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum AB*ba*, nempe ſpatium ABN, erit ut motus Nodi, in tempore quo ſol digreditur à nodo per arcum NA. Et ſpatium reliquum, nempe ſector ellipticus NTB, erit ut motus ſolis medius in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius, is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit, motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium, ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta TK ad rectam TH, mediam ſcilicet proportionalem inter TK ad TS; vel, quod eodem redit, ut media proportionalis TH ad rectam TS.



“ PROPOSITIO II.

“ *Dato motu medio Nodorum lunæ invenire motum verum.*

“ Sit angulus A diſtantia ſolis à loco nodi medio, ſive motus medius ſolis à nodo. Tum ſi capiatur angulus B, cujus tangens ſit ad tangentem anguli A ut TH ad TK, hoc eſt in ſubduplicatâ ratione motûs mediocris horarii ſolis ad motum mediocrem horarium ſolis à nodo, in quadraturis verſante; erit idem angulus B diſtantia Solis à loco Nodi vero. Nam jungatur FT; & ex demonſtratione Propoſitionis ſuperioris erit angulus FTN diſtantia ſolis à loco nodi medio, angulus autem ATN diſtantia à loco vero, & tangentes horum angulorum ſunt inter ſe ut TK ad TH.

“ *Corol.* Hinc angulus FTA eſt Æquatio Nodorum lunæ, ſinuſque hujus anguli, ubi maximus eſt in octantibus, eſt ad radium ut KH ad TK+TH. Sinus autem hujus æquationis in loco quovis alio A eſt ad ſinum maximum, ut ſinus ſummæ angulorum FTN+ATN ad radium: hoc eſt ferè ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis à loco nodi medio (nempe 2FTN) ad radium.

“ *Scholium.*

“ Si motus Nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}.$ hoc eſt in anno toto ſidereo $39^\circ.\ 38'.\ 7''.\ 50'''.$ erit TH ad TK in ſubduplicatâ ratione numeri 9,0827646 ad numerum 10,0827646; hoc eſt ut 18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea TH ad HK ut 18,6524761 ad 1. hoc eſt ut motus Solis in anno ſidereo ad motum Nodi medium $19^\circ.\ 18'.\ 1''.\ 23'''\frac{2}{3}.$

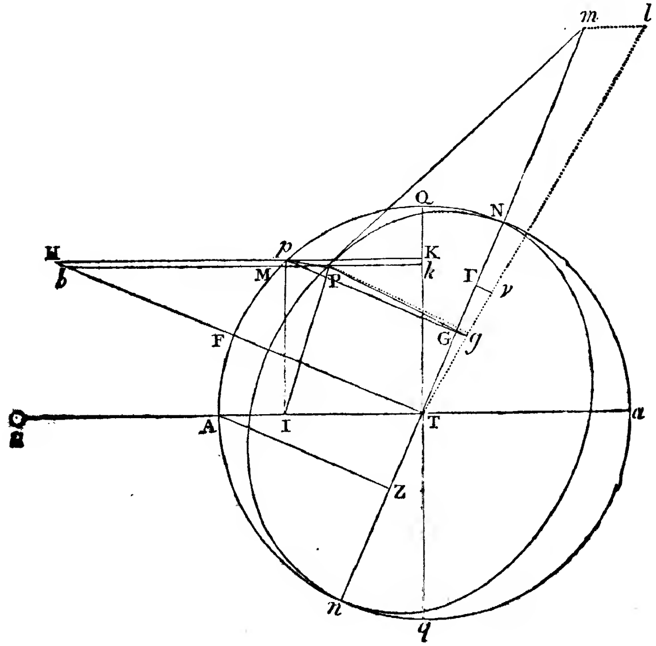
“ At ſi motus medius Nodorum Lunæ in 20 annis Julianis ſit $386^\circ.\ 50'.\ 15''.$ ſicut ex obſervationibus in Theoriâ Lunæ adhibitis deducitur: motus medius Nodorum in anno ſidereo erit $19^\circ.\ 20'.\ 31''.\ 58'''.$ Et TH erit ad HK ut $360^{gr}.$ ad $19^\circ.\ 20'.\ 31''.\ 58'''.$ hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde motus mediocris horarius Nodorum in quadraturis evadet $16''.\ 18'''.\ 48^{iv}.$ Et Æquatio nodorum maxima in octantibus $1^\circ.\ 29'.\ 57''.$”

PROP. XXXVI. PROB. XV.

Invenire variationem horariam Inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticæ.

Deſignent A & *a* ſyzygias; Q & *q*, quadraturas; N & *n*, Nodos; P, locum Lunæ in orbe ſuo; *p*, veſtigium loci illius in plano Eclipticæ; & *m*T*l*, motum momentaneum nodorum ut ſuprà. Et ſi ad lineam T*m* demittatur perpendiculum PG, jungatur *p*G, & producatur ea donec occurrat T*l* in *g*, & jungatur etiam P*g*: erit angulus PG*p* Inclinatio orbis lunaris ad planum Eclipticæ, ubi Luna verſatur in P; & angulus P*gp* Inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis.

temporis completum; ideoque angulus GP*g* variatio momentanea Inclinationis. Eſt autem hic angulus GP*g* ad angulum GT*g* ut TG ad PG & P*p* ad PG conjunctim (gg). Et propterea ſi pro momento



temporis ſubſtituatur hora; cùm angulus GT*g* (per Prop. XXX.) ſit ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut IT × PG × AZ ad AT *cub.* erit angulus

(gg) Capiatur TΓ æqualis rectæ PG, & à Γ in rectam T*l* deducatur ad perpendiculum recta Γ*ν*. Jam cùm anguli exigui GP*g*, GT*g* ſinuum ſuorum inter ſe rationem gerant, ſi à puncto G in rectam P*g* recta quædam ad perpendiculum deducatur, angulus GP*g* ad GT*g* rationem habebit quam deducta illa ad Γ*ν*; ſive eam quæ componitur è rationibus deductæ illius ad G*g*, ipſiuſque G*g* ad Γ*ν*. Sed deducta illa ad G*g* rationem habet quam ſinus anguli P*g*G, vel PG*p*, ad radium: hoc eſt, cùm angulus GP*p* à recto haud multùm abſit, eam quam P*p* ad *p*G, vel PG. Recta verò G*g* ad Γ*ν* rationem habet quam TG ad T*γ* vel illi æqualem PG. Quare angulus GP*g* ad GT*g* rationem habet, quæ componitur è rationibus rectæ P*p* ad PG, rectæque TG ad PG; ſive eam, quam rectangulum P*p* × TG ad quadratum ex PG.

(hh) Per puncta Q, *q*, ducantur rectæ QO, *q*W, quæ circulum AQ*aq*, in punctis Q, *q*, contingant. Recta TF utrinque producta circulo iterum in *f*, rectis QO, *q*W, in punctis O, W, occurrat. Recta $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ſignificetur literâ B. Lunâ per arcum F*q* incedente, inclinatio orbitæ perpetuò augetur; et Solidum $\overline{FnqW} \times B$ referet incrementorum ſummam. Rurſum Lunâ per arcum

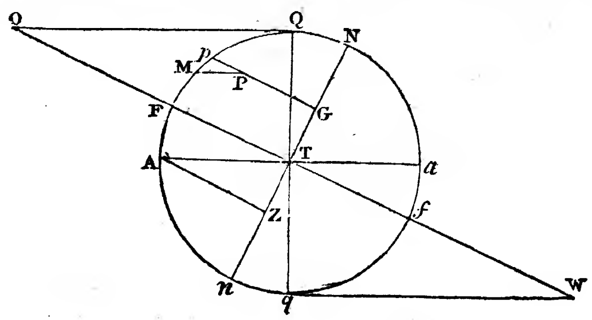
gulus GP*g* (ſeu Inclinationis horaria variatio) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{pP}{PG}$ ad AT *cub.* Q. E. I.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quòd Luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quòd ſi orbis ille ellipticus ſit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſuprà expoſitum eſt. Et in eâdem ratione minuetur etiam Inclinationis variatio.

Corol. 1. Si ad N*n* erigatur perpendiculum TF, ſitque *p*M motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendiculum *p*K, M*k* in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & *h*: erit IT ad AT ut K*k* ad M*p*, & TG ad H*p* ut TZ ad AT; ideoque IT × TG æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ H*p*M*h* ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea Inclinationis variatio horaria ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut H*p*M*h* ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi Terra & Nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſinus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad $33''. 10'''. 33^{iv}$, ut aggregatum omnium arearum H*p*M*h*, in revolutione puncti *p* genitarum, & ſub ſignis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad M*p* × AT *cub.* id eſt, ut circulus totus QA*qa* (hh) ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad M*p* × AT *cub.* hoc

arcum *qf* incedente, inclinatio orbitæ perpetuò minuetur; et Solidum $\overline{fqW} \times B$ referet decremen-



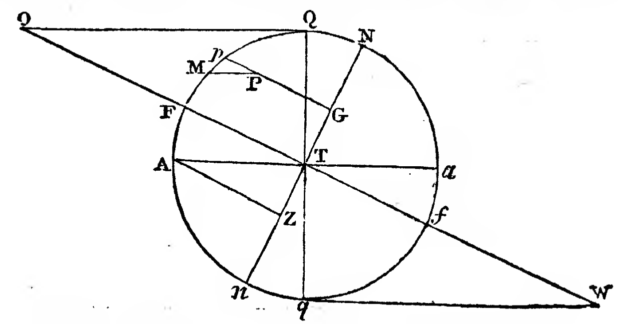
torum

hoc eſt, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex quâ, per menſem uniformiter continuatâ, variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id eſt (cùm Pp ſit ad PG ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quaniam Inclinationis horaria variatio, ubi Nodi in quadraturis verſantur, eſt (per hanc Propoſitionem) ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc ſitu Nodorum tranſit à quadraturâ ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$) erit ad ſummam totidem angulorum $33''. 10'''. 33^{iv}$, ſeu $5878''$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit 5^{gr}.

torum ſummam. Quare Solidum $\overline{FnqW - fqW} \times B$, id eſt ſemicylindrus qui baſin habet ſemicir-



culum Fnf, altitudinem ipſam B, illud omne referet quo aucta fuerit inclinatio, toto illo tempore

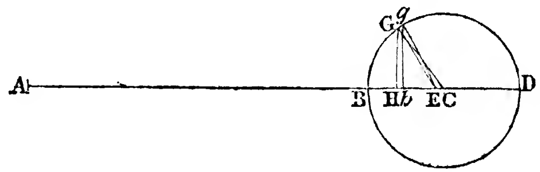
pore

$5^{gr}. 1'$, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex ſummâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, eſt $163''$, ſeu $2'. 43''$.

PROP. XXXV. PROB. XVI.

Dato tempore invenire Inclinationem orbis lunaris ad planum Eclipticæ.

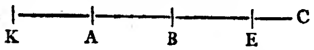
Sit AD ſinus Inclinationis maximæ, & AB ſinus Inclinationis minimæ. Biſecetur BD in C, & centro C, intervallo BC deſcribatur circulus BGD. In AC capiatur CE, in eâ ratione ad EB quam



EB habet ad 2BA (ii): et ſi dato tempore conſtituatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cùm $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam Nodorum à quadraturis, poſt datum aliquod momentum temporis completum; & arcus Gg, ob datum angulum GEg, erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hb ad Gg ut GH ad GC; & & propterea Hb eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut

pore quo Luna à loco F in f tranſlata fuerit. Similiter oſtendatur ſemicylindrum, cujus baſis ſemicirculus faE, altitudo recta B, illud omne referre, quo inclinatio aucta fuerit, toto illo tempore quo Luna à loco f in F per ſemicirculum fAE reverteretur. Cylindrus igitur, cujus baſis circulus totus $FAfa$, altitudo recta B, illud omne referet, quo aucta fuerit inclinatio orbitæ, toto illo temporis ſpatio quo Luna à loco maximæ ſuæ latitudinis abſcedens in eundem redierit; manente utique Nodorum ad Solem ſitu.

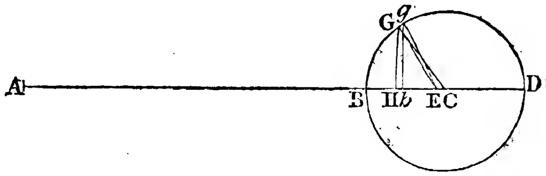


(ii) Id quod hâc ratione efficiatur. Producatur CA ad K, ut ſit AK æqualis ipſi AB. Ad rectam KB, applicetur rectangulum dato $CB \times BK$ æquale, eâ lege ut quadrato excedat. Exceſſûs latitudo ſit BE. Dico factum eſſe quod faciendum erat; id eſt, rectam CE ad EB rationem habere quam EB ad duplam AB. Nam propter rectangula $CB \times EK$, $KE \times EB$ inter ſe æqualia, erit CB ad BE ut KE ad KB. Dividendo CE ad EB ut EB ad BK, vel 2BA. Q. E. D.

$\frac{GH}{GE}$

De Mundi Systemate

$\frac{GH}{GE} \times GEq$, seu $\frac{GH}{GE} \times AH$; id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus Inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu Inclinationis, per Corol. 3. Pro-



poſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AA, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. Q. E. D.

In hâc demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad 33''. 10'''. 33^{iv}. ut contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris Inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cùm Inclinatio illa mediocris ſit quaſi 5^{gr}. $8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ BD reſpondens, ad variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg; id eſt, ut diameter BD ad ſemicircumferentiam BGD et tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota BD ad 33''. 10'''. 33^{iv}. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa BD prodibit 16'. $32''\frac{1}{2}$ (kk).

Hæc eſt Inclinationis variatio maxima, quatenus locus Lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi Nodi in ſyzygiis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu Lunæ. At ſi Nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi Luna verſatur in ſyzygiis, quàm ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu 2'. 43''; uti in Propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſûs dimidio, 1'. $21''\frac{1}{2}$, variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit 15'. 2'', in ipſius autem ſyzygiis aucta fit 17'. 45''. Si Luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias erit 17'. 45'': ideoque ſi Inclinatio, ubi Nodi in ſyzygiis verſantur, ſit 5^{gr}. 17'. 20''; eadem, ubi Nodi ſunt in quadraturis, & Luna in ſyzygiis, erit 4^{gr}. 59'. 35''. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

(kk) Veriùs ut opinor ''16—''24. Nobis enim calculi reddunt '16—''23—'''50—''''58.

Liber Tertius.

Si jam deſideretur orbis Inclinatio illa, ubi Luna in ſyzygiis & Nodi ubivis verſantur; fiat AB ad AD ut ſinus graduum 4. 59'. 35'', ad ſinum graduum 5. 17'. 20'', & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ Nodorum à quadraturis; & erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ. Huic orbis Inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi Luna diſtat 90^{gr}. à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motûs Nodorum (ut ſuprà diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

Scholium.

Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quòd motus Lunares per Theoriam Gravitatis à cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem Theoriam inveni præterea quòd Æquatio Annua medii motûs Lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major eſt, & orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor eſt, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato Luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & Æquatio Annua, per quam hæc inæqualitas compenſatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla eſt, in mediocri Solis à Terrâ diſtantiâ ad 11'. 50'' circiter aſcendit, in aliis locis æquationi centri Solis proportionalis eſt; & additur medio motui Lunæ, ubi Terra pergit ab Aphelio ſuo ad Perihelium; &, in oppoſitâ orbis parte, ſubducitur. Aſſu-

mendo radium orbis magni 1000, & eccentricitatem Terræ 16$\frac{7}{8}$, hæc æquatio, ubi maxima est, per Theoriam Gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas 16$\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

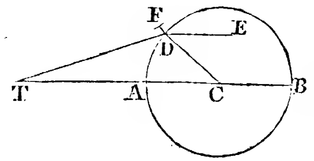
Inveni etiam quòd in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi lunæ velociùs moventur quàm in Aphelio ejus; idque in triplicatâ ratione distantiæ Terræ à Sole inversè. Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri solis proportionales. Motus autem solis est in duplicatâ ratione distantiæ Terræ à Sole inversè, & maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est 1^{gr}. 56′. 20, prædictæ Solis eccentricitati 16$\frac{11}{12}$ congruens. Quòd si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam 2^{gr}. 54′. 30″. Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, sunt ad 2^{gr}. 54′. 30, ut motus medius diurnus Apogæi, & motus medius diurnus Nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit æquatio maxima medii motûs Apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motûs Nodorum 9′. 24″. Additur verò æquatio prior, & subducitur posterior, ubi Terra pergit à Perihelio suo ad Aphelium: & contrarium fit in oppositâ orbis parte.

Per Theoriam Gravitatis constitit etiam quòd actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem, quàm ubi eadem ad rectos est angulos cum lineâ Terram & Solem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quàm in posteriore. Et hinc oritur alia æquatio motûs medii lunaris, pendens à situ Apogæi Lunæ ad Solem; quæ quidem maxima est, cùm Apogæum Lunæ versatur in octante cum Sole; & nulla, cùm illud ad quadraturas vel syzygias pervenit: & motu medio additur, in transitu Apogæi Lunæ à Solis quadraturâ ad syzygiam; & subducitur in transitu Apogæi à syzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus Apogæi, quando maxima est, ascendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantiâ à Terrâ. Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantiæ Solis inversè, ideoque in maximâ Solis distantiâ est 3′. 34″, & in minimâ 3′. 56″ quamproximè: ubi verò Apogæum Lunæ situm est extra octantes, evadit minor; estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ Apogæi Lunæ à proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

Per eandem Gravitatis theoriam actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta, per Nodos lunæ ducta, transit per Solem, quàm ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo; quæque maxima est, ubi Nodi in Solis octantibus versantur; & evanescit, ubi sunt in syzygiis vel quadraturis; & in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ Nodi alterutrius à proximâ syzygiâ aut quadraturâ: additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat à Nodo sibi proximo in antecedentia; subducitur, si in consequentia; & in octantibus, ubi maxima est, ascendit ad 47″ in mediocri Solis distantiâ à Terrâ, uti ex theoriâ Gravitatis colligo. In aliis Solis distantiis hæc æquatio maxima in octantibus Nodorum est reciprocè ut cubus distantiæ Solis à Terrâ; ideoque in Perigæo Solis ad 49″, in Apogæo ejus ad 45″ circiter, ascendit.

Per eandem Gravitatis theoriam Apogæum Lunæ progreditur quàm maximè, ubi vel cum Sole conjungitur, vel eidem opponitur; & regreditur, ubi cum Sole quadraturam facit. Et eccentricitas fit maxima in priore casu, & minima in posteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & æquationem principalem Apogæi generant, quam semestrem vocabo. Et æquatio maxima semestris est 12^{gr}. 18′ circiter, quantum ex observationibus colligere potui. *Horroxius* noster Lunam in Ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum Ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ, in progressu & regressu Apogæi, & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris Lunæ à Terrâ in partes 100000, & referat T terram, & TC eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut sit CB sinus æquationis maximæ semestris 12^{gr}. 18′ ad radium

dium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB deſcriptus, erit epicyclus ille, in quo centrum orbis lunaris locatur, & ſecundum ordinem literarum BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ ſemel æquato, & erit CTD æquatio ſemeſtris Apogæi lunæ, & TD eccentricitas orbis ejus in Apogæum ſecundò æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & eccentricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in orbe, & diſtantia ejus à Terrâ, idque per methodos notiſſimas.



In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum orbis Lunæ velociùs movetur circum centrum C quàm in Aphelio, idque in triplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè. Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehenſam, centrum orbis Lunæ velociùs movetur in epicyclo BDA in duplicatâ ratione diſtantiæ Terræ à Sole inverſè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inverſè; ab orbis centro, D, agatur recta DE verſus Apogeum Lunæ, ſeu rectæ TC parallela; & capiatur angulus EDF æqualis exceſſui argumenti annui prædicti ſupra diſtantiam Apogæi Lunæ à Perigæo Solis in conſequentia; vel quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem Solis à Terrâ, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & 52′. 27″. 16‴ ad 59′. 8″. 10‴ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis Lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum eſt D, & radius DF, interea revolvi, dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli DABD. Hâc enim ratione velocitas, quâ centrum orbis Lunæ in lineâ quâdam curvâ, circum centrum C deſcriptâ, movebitur, erit reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Computatio motûs hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris Lunæ à Terrâ

Terrâ ſit partium 100000, & eccentricitas, TC, ſit partium 5505 ut ſuprà: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta DF partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam TC ſubtendit angulum ad Terram, quem tranſlatio centri orbis à loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata, in ſitu parallelo, ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis Lunæ à Terrâ, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici; & ad diſtantiam Lunæ à Terrâ ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri Lunæ diſtantiâ à Terrâ, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa DF cum rectâ à puncto F ad Lunam ductâ continet quamproximè; & ubi maxima eſt, evadit 2′. 25″. Angulus autem, quem recta DF & recta à puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum EDF ab anomaliâ mediâ Lunæ, vel addendo diſtantiam Lunæ à Sole ad diſtantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″. ſunt ad æquationem centri ſecundam; addendam, ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo; ſubducendam, ſi major. Sic habebitur ejus longitudo in ipſis luminarium ſyzygiis.

Cùm Atmoſphæra terræ, ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40, refringat lucem Solis, & refringendo ſpargat eandem in umbram Terræ, & ſpargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipſibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria verò Lunæ primò in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Obſervatorio Regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommodè ſequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20^{gr}. 43′. 40″, & Apogæi ejus ♋ 7^{gr}. 44′. 30″; & motum medium Lunæ ♒ 15^{gr}. 21′. 00″, & Apogæi ejus ♓ 8^{gr}. 20′. 00″, & Nodi aſcendentis ♌ 27^{gr}. 24′. 20″; & differentiam Meridianorum Obſervatorii hujus & Obſervatorii Regii *Pariſienſis* 0^{hor}. 9^{min}. $20^{ſec}$. Motus autem

autem medii Lunæ & Apogæi ejus nondum ſatis accuratè habentur.

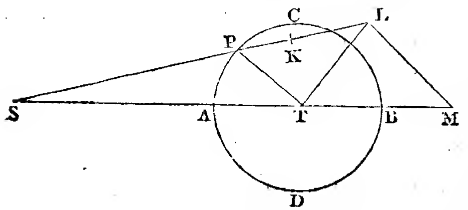
SECTIO III.

De quantitate Æſtûs Marini.

PROP. XXXVI. PROB. XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML, ſeu PT, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per. Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis TM−LM, ſeu 2PK, in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem Terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro Terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in ſuperficie Terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hâc vi Mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant à Sole. Vi alterâ, quæ duplo major eſt, Mare elevatur & ſub Sole, & in regione Soli oppoſitâ. Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à Sole, ſive elevet eandem in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, hæc ſumma erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub Sole, & Soli oppoſitis, mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant à Sole, nil ageret.



Hæc eſt vis Solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci verſatur, quàm in mediocri ſuâ diſtantiâ à Terrâ. In aliis Solis poſitionibus vis, ad Mare attollendum, eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directè & cubus diſtantiæ Solis à Terrâ inverſè ([ll]).

([ll]) Vide Lib. De Syſt. Mund. § 51.

Corol.

Corol. Cùm vis centrifuga partium Terræ, à diurno Terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſurâ pedum *Pariſienſium* 25472, ut ſuprà in Prop. XIX; vis ſolaris, de quâ egimus, cùm ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200, ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant à Sole, menſurâ tantùm pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſimâ parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROP. XXXVII. PROB. XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantùm 25. Altitudo prior ex ſummâ virium, poſterior ex earundem differentiâ oritur. Solis igitur & Lunæ, in æquatore verſantium, & mediocriter à Terrâ diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymutbi* æſtus maris, ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*, ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur; ac tempore verno & autumnali altitudo æſtûs in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$, ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtûs in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterùm ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii à ſyzygiis, ut

dictum

dictum fuit; ſeu proximè ſequuntur tertium Lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potiùs (ut à *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt harum à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt verò in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi Luna diſtat à Sole vel ab oppoſitione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maximè vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi Sol diſtat à ſolſtitiis decimâ circiter parte totius circuitûs; ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna diſtat à Sole decimâ circiter parte motûs totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis, in hâc diſtantiâ Lunæ à ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris, à vi Lunæ oriundum, quàm in ipſis ſyzygiis & quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ, ſeu anguli graduum 37; hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355 (mm). Ideoque in analogiâ ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S (nn).

Sed & vis Lunæ in quadraturis, ob declinationem Lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis, ad mare movendum, diminuitur in duplicatâ ratione ſinûs complementi inclinationis quamproximè. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis eſt tantùm 0,8570327 L. Eſt igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea

(mm) Imo, ut mihi videtur, in duplicatâ ratione radii ad coſinum hujus diſtantiæ. Et perſuadere mihi nequeo, quin id ipſum Newtonus voluerit.

(nn) At ſi diminutio vis Solaris ea ſit quam modò poſuimus (Not. ll) in analogiâ ſuperiore pro S ſcribi debet 0,899317 S.

(oo) Calculis ſubductis, eam invenio Lunæ à centro Terræ diſtantiam, quando arcu graduum 18 cum ſemiſſe à loco coitûs vel à dimidiatæ loco remota ſit, quæ ad diſtantiam mediam rationem habeat quam 69,10068 vel 69,89932 ad 69,5. Quare ſi ea ſit vis ſolaris diminutio, quam ſuprà poſuimus (Not. ll) analogia à Newtono poſita in hanc migraverit.

$1{,}017292\,L + 0{,}899317\,S : 0{,}982861 \times 0{,}8570327\,L - 0{,}899317\,S = 9 : 5.$

Unde ea efficietur vis Lunaris, quæ ad Solarem rationem habeat quam 5,0469 ad 1.

Si enim pro coefficiente 1,017292 ſcribatur litera a; pro 0,899317 litera b, pro $0{,}982861 \times 0{,}8570327$ litera c, erit $aL + bS : cL - bS = 9 : 5$.

Quare $5aL + 5bS = 9cL - 9bS$. Et $14b.S = 9c - 5a.L$.

$$\begin{aligned}\text{Sed}\quad 9c &= 7{,}581102\\ 5a &= 5{,}086460\\ 9c - 5a &= 2{,}494642\end{aligned}$$

Quare $2{,}494642.L = 14.b.S$.

Et $0{,}178189.L = b.S = 0{,}899317.S$.

Quare $S : L = 178189 : 899317 = 1 : 5{,}0469$.

Præterea diametri orbis, in quo Luna ſine eccentricitate moveri deberet, ſunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque diſtantia Lunæ à Terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inverſè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantiâ ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde ſit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L − 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815 (oo). Itaque cùm vis Solis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi Solis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $7\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi Luna eſt in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultrà, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latiùs patet, æſtus dicuntur eſſe majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quàm in zonis tempe-

ratis,

Si

ratis, propter angustiam maris inter *Africam* & australem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque, & orientale & occidentale, simul descendat: cùm tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in insulis, quæ à littoribus longissimè absunt, perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent esse solito majores; uti ad *Plymuthum*, & pontem *Chepstowæ* in *Angliâ*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches)* in *Normanniâ*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *Indiâ* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa millaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & ampliùs. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanici*, & ejus quo *Anglia* circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursûs & recursûs supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstûs respondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cùm vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400; perspicuum est, quòd vis illa sit longè minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Corol. 4. Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. 1.) sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; densitas Lunæ erit ad densitatem Solis ut 4,4815 ad 1 directè, & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inversè: id est (cùm diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis sint $31'.\ 16''\frac{1}{2}$ & $32'.\ 12''$) ut 4891 ad 1000. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 1000 ad 4000; & propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut 4891 ad 4000, seu 11 ad 9. Est igitur corpus Lunæ densius & magis terrestre quàm Terra nostra.

Corol. 4. Et cùm vera diameter Lunæ ex observationibus astronomicis sit ad veram diametrum Terræ ut 100 ad 365; erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ erit quasi triplo minor quàm gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

Corol. 6. Et distantia centri Lunæ à centro Terræ erit ad distantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

Corol. 7. Et mediocris distantia centri Lunæ à centro Terræ in octantibus Lunæ erit semidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam Terræ semidiameter maxima fuit pedum *Parisiensium* 19658600, & mediocris distantia centrorum Terræ & Lunæ, ex hujusmodi diametris $60\frac{2}{5}$ constans, æqualis est pedibus 1187379440. Et hæc distantia (per Corollarium superius) est ad distantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque distantia posterior est pedum 1158268534. Et cùm Luna revolvatur, respectu Fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{6}$; sinus versus anguli, quem Luna tempore minuti unius primi describit, est 12752341, existente radio 1000,000000,000000. Et ut radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illâ, quâ retinetur in orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi describet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe Lunæ per Corol. Prop. III. Et hâc vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi describet pedes 14,8538067. Et ad sexagesimam partem distantiæ Lunæ à centro Terræ, id est ad distantiam pedum 197896573 à centro Terræ, corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad distantiam pedum 19615800, quæ sunt Terræ semidiameter mediocris, grave cadendo describet pedes 15,11175, seu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit descensus corporum in latitudine graduum 45. Et per Tabulam præcedentem in Prop. XX. descriptam, descensus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Parisiorum*, existente

De Mundi Systemate

existente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur, per hoc computum, in latitudine *Lutetiæ* cadendo in Vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno Terræ in illâ latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hâc velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſuprà oſtenſum eſt ad Prop. IV. & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in ſyzygiis Lunæ, eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum Terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis Lunæ, diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum Terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam mediocrem Lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per Prop. XXVIII.

Corol. 9. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in ſyzygiis Lunæ, eſt ſexaginta ſemidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte ſemidiametri. Et in quadraturis Lunæ, diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt ſexaginta & unius ſemidiametrorum mediocrium Terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri.

Corol. 10. In ſyzygiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt 57′. 20″, 57′. 16″, 57′. 14″, 57′. 12″, 57′. 10″, 57′. 8″, 57′. 4″, reſpectivè.

In his computationibus attractionem magneticam Terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt, & ignoratur. Siquando verò hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum Maris, & Parallaxis Lunæ, cum diametris apparentibus Solis & Lunæ, ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

PROP. XXXVIII. PROB. XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus lunare fluidum eſſet, ad inſtar maris noſtri, vis Terræ, ad Fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet

Liber Tertius.

eſſet ad vim Lunæ, quâ mare noſtrum in partibus & ſub Lunâ & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id eſt, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1081 ad 100. Unde cùm Mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, Fluidum lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de cauſâ figura Lunæ ſphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 186. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. Q. E. I.

Corol. Inde verò fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium, eſſent longè tardiſſimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in Prop. XVII. allatam) reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi, & in Terram converti.

SECTIO IV.

De Præceſſione Æquinoctiorum.

LEMMA I.

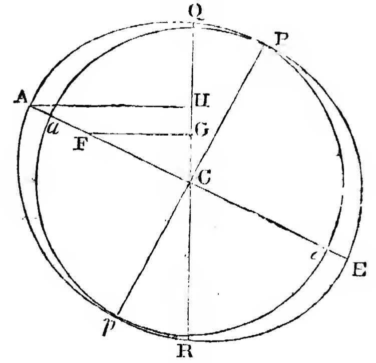
Si APE*p* *Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C, *&* *polis* P, *p*, *& æquatore* AE, *delineatam; & ſi centro* C, *radio* CP, *deſcribi intelligatur ſphæra* P*ape*; *ſit autem* QR *planum, cui recta à centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter inſiſtit; & Terræ totius exterioris* P*ap*APE*p*E, *quæ ſphærâ modò deſcriptâ altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia à plano: dico primò, quòd tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè diſtat, conſiſtentium vim & efficaciam, ad Terram conſimili motu circulari circum*

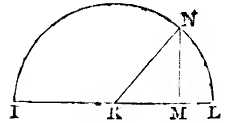
 centrum

DE MUNDI SYSTEMATE

centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus ipse circularis circum axem, in communi sectione æquatoris & plani QR *jacentem, peragetur.*

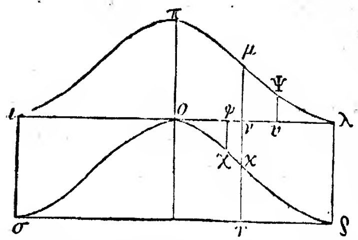
Nam centro K, diametro IL, describatur semicirculus INLK. Dividi intelligatur semicircumferentia INL in partes innumeras æquales; & à partibus singulis, N, ad diametrum, IL, demittantur sinus NM. Et summa quadratorum ex sinibus omnibus, NM, æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus KM, & summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semidiametris KN; ideoque summa quadratorum ex omnibus MN erit duplo





minor quàm summa quadratorum ex totidem semidiametris KN ([a]).

Jam



([a]) PUTA rectam λι, positione datam, semicirculo LNI æqualem esse. Media dividatur recta λι in puncto ο. Et in rectis οπ, λρ, ισ ad perpendiculum eductis, capiantur οπ, λρ, ισ semicirculi LNI radio, KL, singulatim æquales. Semicirculi arcui cuilibet LN ponatur recta λν, æqualis. Et in recta μνκ, quæ rectam λι in puncto ν ad perpendiculum insistat, capiatur hinc inde μν, νκ; quarum altera quidem μν, duarum KL, NM, altera verò νκ duarum KL, KM, proportione sit tertia; ut sint rectangula KL × νμ, KL × νκ quadratis ex NM, KM singulatim æqualia. Sint λπι, ροσ Curvæ, ad quas sunt puncta μ, κ. Completoque rectangulo λισρ; dico aream, λπισο?λ, Curvis conclusam huic rectangulo æqualem. Quin et areas λπι, ροσιολ inter se æquales.

Primùm enim, producta μκ rectæ σρ in τ occurrat. Jam cùm sint rectangula KL × νμ, KL × νκ quadratis ex NM, KM singulatim æqualia; rectangula illa simul sumpta quadratis simul sumptis æqualia erunt. Sed rectangula illa simul sumpta rectangulo KL × μκ sunt æqualia; et quadrata simul sumpta quadrato ex KN, vel KL. Quare et rectangulum KL × μκ quadrato ex KL æquale erit.

Quare

LIBER TERTIUS.

Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales; & ab earum unâquâque, F, ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypothesin; & hæc vis ducta in distantiam CG erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut FG × GC ad AH × HC, hoc est, ut FC*q* ad AC*q*; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium FC*q* ad summam totidem AC*q*, hoc est (per jam demonstrata) ut unum ad duo. Q. E. D.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quàm in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quòd vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circuli AE *uniformiter per totum circuitum in morem*

Quare recta μκ rectæ KL, sive ντ æqualis. Et in omni magnitudine rectæ λν, seu arcûs LN, manebit rectarum μκ, ντ æqualitas. Quare fluente rectâ λν, erit $\mu\kappa \times \dot{\overline{\lambda\nu}} = \nu\tau \times \dot{\overline{\lambda\nu}}$. Sed $\mu\kappa \times \dot{\overline{\lambda\nu}}$ fluxio est areæ λρκμ, et $\nu\tau \times \dot{\overline{\lambda\nu}}$ rectanguli λρτν est fluxio. Quare fluentes ipsæ, nempe area curvis conclusa λρκμ, et area rectanguli λρτν, quoniam cum ipsâ rectâ λν simul à nihilo generari inceperint, erunt semper inter se æquales. Quare et area tota λροσιπχ rectangulo λσ æqualis erit. Quod primùm demonstrandum erat.

Dico præterea areas λπιλ, ροσιλ inter se æquales.

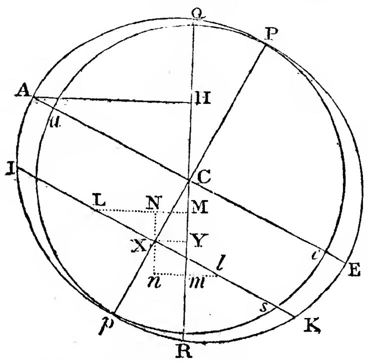
Capiantur enim λυ, οφ inter se æquales; quæ eâ lege fluant, ut semper inter se æquales maneant. Et à punctis υ, φ, educantur ad perpendiculum υψ, φχ. quarum illa υψ Curvæ λπ in ψ, altera φχ Curvæ ρο in χ occurrat. E naturâ Curvæ λπ, rectangulum KL × υψ æquale erit quadrato à sinu arcûs λυ. Et è naturâ Curvæ ρο, rectangulum KL × φχ quadrato è sinu arcûs οφ æquale erit. Sed arcus illi, λυ, οφ, cùm sint inter se æquales, sinus etiam æquales habent. Rectangula igitur KL × υψ, KL × φχ inter se æqualia. Quare et rectæ υψ, φχ inter se æquales. Sed $\dot{\overline{\lambda\upsilon}} = \dot{\overline{o\phi}}$. Quare $\upsilon\psi \times \dot{\overline{\lambda\upsilon}} = \phi\chi \times \dot{\overline{o\phi}}$. Id est fluxio areæ λυψ fluxioni areæ οφχ æqualis. Quare et areæ ipsæ, quoniam cum rectis λυ, οφ simul à nihilo generari incipiant, erunt semper inter se æquales. Quare tota area λοπ, areæ toti ολρ æqualis.

Simili modo ostendetur area ιοπ areæ οισ æqualis. Quare et area tota λπι toti λροσιολ æqualis. Q. E. D.

annuli

annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.

Sit enim IK circulus quilibet minor, æquatori AE parallelus; sintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum $Pape$ sitæ. Et si in planum QR, quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula LM, lm: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum QR, proportionales erunt perpendiculis illis LM, lm. Sit autem recta Ll plano $Pape$ parallela, & bisecetur eadem in X; & per punctum X agatur Nn, quæ parallela sit plano QR, & perpendiculis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. Et particularum L & l vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mc$; hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mc - nm \times mc$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mc - NM \times mc$: & harum differentia, $LN \times \overline{Mm - NM \times MC + mc}$, est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa, $LN \times Mm$, seu $2LN \times NX$, est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2AH \times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa, $NM \times \overline{MC + mc}$, seu $2XY \times CY$, ad particularum earundem in A consistentium vim $2AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & l simul sumptarum vis ad Terram rotandam, est ad vim particularum duarum iisdem æqualium & in loco A consistentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur



in

(b) Intellige materiam in perimetro circuli IK extra Globi superficiem sitam; sive materiam perimetro circuli IK sphæroidis, & perimetro circuli os Globi interjectam.

(c) L E M M A H. I.

Quantitas motûs in Circulo, cum datâ velocitate angulari circa centrum proprium circumacto, erit ut cubus è radio.

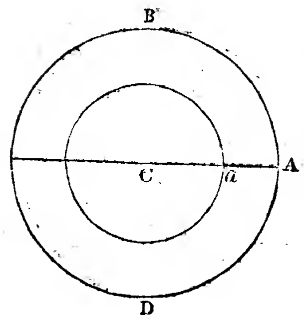
Multitudo corpusculorum in totâ superficie circulari, cujus radius ca, erit ut superficies ipsa: id

in particulas innumeras æquales, L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per Lem. I.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2CXq$ ad $2ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2CXq$ ad $2ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2CXq$ ad ACq.

Jam verò si sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq (b): ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq - 2CXq$ ad totidem IXq in ACq; hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq; id est, ut omnia $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$; hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{3} ACq \times CX\ cub. + \frac{3}{5} CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3} ACq \times CX\ cub.$ id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15} ACqc$ ad $\frac{2}{3} ACqc$; hoc est, ut duo ad quinque. Q. E. D.

L E M M A III (c).

Iisdem positis: dico tertiò quòd motus Terræ totius circum axem jam antè descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit



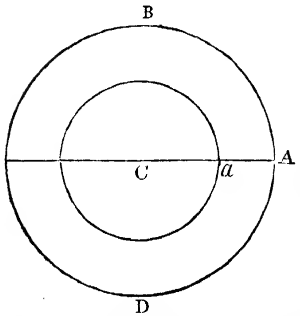
id est ut quadratum è radio. Fluente igitur radio ca, fluxio materiæ erit ut $2ca \times \dot{ca}$. Sed datâ velocitate angulari, velocitas corpusculi cujusque in circuitu circuli cujus radius ca, erit ut ca. Quare fluente radio ca, fluxio motûs erit ut $2ca^2 \times \dot{ca}$, et motus ipse ut $\frac{2ca}{3}$, id est ut ca^3.

Cor. Circulo, cujus radius CA, circum centrum proprium C circumacto, si vi quâdam efficiatur, ut materia omnis in areâ totâ circulari, à centro undique recedat, & in fornicem quendam circularem compingatur, cujus radius CA,

De Mundi Systemate

erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in Terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro ; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est



CA, quique eâdem velocitate angulari, quâcum priùs area tota circularis, circum centrum C circumagatur ; motus hujus fornicis ad motum, qui antè areæ circularis erat, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Nam fluente radio Ca, in circulo cujus ille Ca radius fluxio motûs erit $2Ca^2 \times \dot{\overline{Ca}}$; et motus totus in circulo illo $\frac{2}{3}Ca^3$. Puta corpuscula omnia, quæ erant in circuitu circuli cujus radius Ca, in circuitum circuli extimi, cujus radius CA, aufugisse. Motus, qui horum corpusculorum accessione fornici ABD accreverit, erit ut $2Ca \times \dot{\overline{Ca}} \times CA$. Hæc erit fluxio motûs fornicis. Unde motus ejus totus erit ut $Ca^2 \times CA$; cùm motus totus areæ circularis, cujus radius Ca, erat $\frac{2}{3}Ca^3$; nimirum dum materia, quam in fornicem abiisse posuimus, per aream circuli illius æqualiter undique spargeretur. Hinc si Ca in ipsam CA increverit, motus fornicis erit ut CA^3 cùm motus circuli fuerit ut $\frac{2}{3}CA^3$. Motus igitur fornicis ad motum circuli rationem habebit quam 3 ad 2.

Cor. 2. Motus circuli ad motum annuli tenuissimi circularis, qui pari velocitate angulari circum centrum circumagatur, rationem habebit quam duplum materiæ in Circulo ad triplum materiæ in annulo.

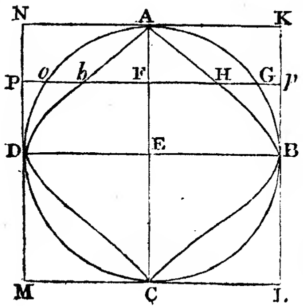
Cor. 3. Si Cylindri, qui æquali sint altitudine, cum pari velocitate angulari circum axem quisque proprium circumagantur, Motûs quantitates erunt ut cubi ex basium radiis.

Cor. 4. Si materia omnis in Cylindro, vi quâdam ab axe undique fugata, in ipsâ superficie cylindraceâ in parietem quendam rotundum compingatur, qui eâdem velocitate angulari, quâcum antè totum corpus cylindraceum, circum axem circumagatur; motus hujus parietis ad motum, qui cylindri antè fuerat, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Cor. 5. Si altitudine sensim imminutâ, paries ipse, manente tam tenuissimâ ipsius crassitudine, quàm latitudine spatii vacui quod intus habet, sensim se contrahat, & in Zonam sive Annulum tenuissimum ultimò abeat ; manente utique in pariete in annulum contracto, quæ antè ei inerat, materiâ, motus manebit ; qui proinde ad motum, qui primùm erat Cylindri, rationem habebit quam ternarius ad binarium.

Cor. 6. Motus Cylindri circum axem circumacti ad motum annuli tenuissimi, qui cylindrum cingat, rationem habet quam duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in Annulo.

L E M M A H. II. P R O B.



Circulo ABCD, *cujus centrum* E, *magnitudine & positione dato, à puncto quolibet* F, *in diametro quâdam circuli positione datâ, eductam puta ad perpendiculum rectam* FG ; *& in eâ sumatur* FH, *ad quam* FG *rationem habeat quam quadratum ex radio* EA *ad quadratum ex* FG. *Invenienda sit area Curvæ, ad quam est punctum* H.

Per centrum E ducatur diameter DB ad perpendiculum cum diametro CA. Satis patet puncta D, B ad Curvam esse quâ de agitur, & aream Curvæ à diametris AC, DB in partes quatuor æquales dividi. E naturâ Curvæ, solidum $EA^2 \times FH$ cubo ex FG æquale erit. Quare si pro radio EA ponatur 1, & x pro EF, erit $FH = \overline{1 - x^2}|^{\frac{3}{2}}$, cùm propter circulum sit $FG = \sqrt{1 - x^2}$. Quamobrem si detur area cujus fluxio est

$FG \times \dot{x}$,

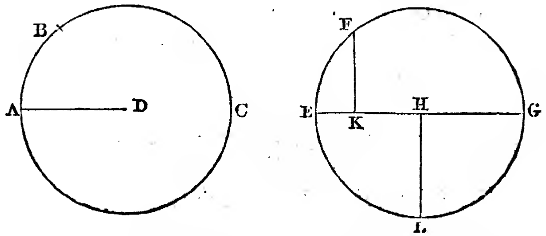
Liber Tertius.

Est enim motus cylindri, circum axem suum immotum revolventis, ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscrip-

$FG \times \dot{x}$, sive area circularis BEFG, dabitur area cujus fluxio est $FH \times \dot{x}$, id est area BEFH (per Quad. Curv. Prop. VII. Cas. 2.) Nimirum si area BEFG significetur literâ A, area BEFH significabitur hoc symbolo, $\frac{3A + x \times \overline{1 - x^2}|^{\frac{3}{2}}}{4}$. Id enim efficitur per Æquationem Canonicam secundi casûs ejus Propositionis primam, si area BEFH scribatur pro $A\!\!\!/$, 1 pro θ, $\frac{3}{2}$ pro λ, 2 pro η, 1 pro e. Quare si EF, sive x, in ipsam EA, sive 1, increverit, erit area tota $BEAHB = \frac{3}{4}A$, significante jam literâ A circuli quadrantem. Hinc pars quarta areæ quæ definienda erat ad partem quartam circuli, ac proinde area tota ad circulum, rationem eam quam ternarius ad quaternarium habet. Q. E. I.

L E M M A H. III.

Sint duo annuli æquales ABC, EFG, *quorum centra* D, H. *Horum alter* ABC, *circum centrum suum* D *in plano immobili ; alter* EFG *circum unam aliquam è diametris suis, puta* EG, *positione datam, ceu axem,*



intelligatur converti ; eâ motûs lege, quâ radius HL *annuli* EFG, *qui axem* EG *ad perpendiculum insistat, angulos scribat in plano illo cui rectus est axis* EG, *eorum æquales quos iisdem temporibus radius quilibet annuli alterius* ABC *in annuli ipsius plano. Dico motum annuli* ABC *ad motum alterius* EFG *rationem habere quam circuli circuitus ad duplam diametrum.*

Capiantur arcus AB, EF æquales, & à puncto F in rectam EG ad perpendiculum deducatur FK. Velocitas corpusculi cujusque in annulo ABC ad velocitatem corpusculi in loco F annuli alterius, EFG, rationem habet quam DA, vel HE, ad FK. Quare si arcus AB, EF eâ lege fluant, ut semper inter se æquales maneant, fluxio motûs in arcu AB ad fluxionem motûs in arcu EF rationem habebit quam EH ad FK ; sive eam quam $\dot{\overline{EF}}$ ad $\dot{\overline{EK}}$. Recta M eâ lege fluat, ut arcui AB, vel EF, semper sit æqualis. Itaque cùm motus in arcu AB annuli ABC sit semper ut arcus ipse, recta mutabilis M motûs in arcu AB rationem semper servabit. Sit alia m, eâ lege mutabilis, ut ad illam M rationem semper habeat, quam motus in arcu EF annuli EFG ad motum in arcu AB annuli ABC. Recta igitur m motûs in arcu EF rationem semper servabit. Quare et fluxio rectæ M ad fluxionem rectæ m rationem habebit quam fluxio motûs in arcu AB annuli ABC ad fluxionem motûs in arcu EF annuli EFC. Hoc est $\dot{M} : \dot{m} = \dot{\overline{EF}} : \dot{\overline{EK}}$. Sed propter rectam M arcui EF semper æqualem, erunt $\dot{M}$, $\dot{\overline{EF}}$ semper inter se æquales. Quare et $\dot{m}$, $\dot{\overline{EK}}$ inter se æquales erunt. Quare et fluentes m, EK, quæ, nascente primùm arcu EF, simul à nihilo generari inceperint, erunt semper inter se æquales. Erit igitur $M : m = EF : EK$. Et quando arcus AB, EF in semicirculos ABC, EBG adoleverint, erit M ad m, id est motus in semicirculo ABC annuli ABC ad motum in semicirculo EFG annuli EFG, ut EFG ad EG ; id est ut semissis circuitûs circuli ad diametrum, sive ut circuitus ad duplam diametrum. Et cùm motus totus in annulo ABC duplus sit ejus qui in semicirculo ABC, et motus totus in annulo EFC duplus ejus qui in semicirculo EFG, hi motus eandem inter se rationem gerent. Q. E. D.

tis

tis[d]: & motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo[e]; & annuli motus iste, circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri[f].

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus, Terrâ omni reliquâ sublatâ, solus in orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materiâ rigidâ & firmâ constaret.

PROP. XXXIX. PROB. XX.

Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in orbe circulari, ubi

(d) PUTA sphæram et cylindrum plano quodam secari secundum axem communem; quod planum, cylindrum secando, efficiat quadratum KNML (vid. fig. Lemm. H. II.) & sphæram secondo, circulum ABCD quadrato inscriptum. In axe AC capiatur punctum quodvis F. Puta sphæram & cylindrum denuò secari plano ad planum primùm recto, & cum plano æquatoris parallelo, quod per punctum F transeat, & secando planum illud primum faciat rectam pP, quæ axem AEC ad perpendiculum insistat. Occurrat recta pP circulo in punctis G, O; & capiatur FH, ad quam FG rationem habeat quam quadratum ex EA, vel pF, ad quadratum ex GF. Sit AHBCDA Curva, quæ, fluente rectâ AF, locus erit punctorum H. Fluxio motûs in Cylindro NKpP erit ut motus in circulo, cujus radius est pF. Et fluxio motûs in sphæræ segmento OAG erit ut motus in circulo, cujus radius FG. Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphæræ rationem habebit, quam cubus ex pF ad cubum ex FG (Lemm. H. I); sive eam, quam cubus ex pF ad solidum $pF^2 \times FH$; sive eam quam recta pF ad rectam FH. Sed pF ad FH rationem habet quam fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ HAb. Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphæræ rationem habet, quam fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ HAb. Jam verò fluente rectâ AF rectangulum KP ita fluet, ut motûs in cylindro fluente KNPI rationem semper servet. Nam motus in cylindro erit semper ut cylindrus; et cylindrus erit semper ut AF; id est ut rectangulum KN × AF, sive KP. Literâ z significetur spatium, quod eâ lege fluat, ut ad rectangulum KP rationem habeat, quam motus in segmento fluente sphæræ, GAO, ad motum in Cylindro fluente pKNP. Spatium igitur z motûs in segmento sphæræ GAO rationem semper servabit. Quare et fluxio rectanguli KP erit ad fluxionem spatii z ut fluxio motûs in cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphæræ, sive ut fluxio rectanguli KP ad fluxionem areæ AHb. Quare $\dot{Z} = \dot{AH}b$. Quare et fluentes ipsæ, z, AHb cùm nascente primùm rectâ AF simul à nihilo generari inceperint, erunt semper inter se æquales. Quare z : KP = AHb : KP. Id est motus in sphæræ segmento OAG ad motum in cylindro KNPp ut area

ubi Nodi sunt in quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes suprà explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi Lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46''$ in antecedentia; & si plures essent Lunæ, motus Nodorum cujusque (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) forent ut tempora periodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$ ut dies sidereus horarum $23. 56'$ ad tempus periodicum Lunæ dierum $27. 7$ hor. $43'$; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuò non contingant, sive liquescant, & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat, & inflexibilis reddatur[g].

Fingamus igitur quòd annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni PapAPEpeE, quæ globo Pape superior est; (*vid. fig. pag.* 114) & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut ac *qu.* ad AC *qu.*–ac *qu.* id est (cùm Terræ semidiameter minor PC vel ac sit ad semidiametrum majorem AC ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secun-

area AHb ad rectangulum KP. Quare motus in sphærâ totâ ad motum in cylindro circumscripto rationem habebit quam tota area AHBCDbA ad quadratum KM: sive eam, quæ componitur è rationibus areæ AHBCDbA ad circulum ABCD circulique ad quadratum circumscriptum. Sed area AHBCDbA ad circulum ABCD rationem habet quam 3 ad 4. (Lemm. H. III.) Quare motus in sphærâ ad motum in Cylindro rationem habet, quæ componitur è rationibus ternarii ad quaternarium circulique ad quadratum circumscriptum: sive eam, quam tres circuli æquales ad quatuor quadrata circumscripta. Q. E. D.

(e) Lemma H. I. Cor. 6.

(f) Lemma H. III. Jam vero literâ r significetur circuli radius; literâ, q arcus quadrantis; literâ M, materia in cylindro; literâ m, materia in sphærâ inscriptâ; literâ μ, materia in annulo Cylindrum & sphæram, apud contactum communem, ambiente.

Motus Annuli circum diametrum propriam erit ad motum ejus circum axem sphæræ ut $r : q$. (Lemma H. III.)

Motus annuli circum axem sphæræ ad motum cylindri ut $3\mu : 2M$. (Lemma H. Cor. 6.)

Motus Cylindri ad motum sphæræ ut $4r^2 : \frac{3rq}{2} = 8r : 3q$.

Quare motus Annuli ad motum sphæræ ut $8r^2\mu : 2q^2M$.

Sed $M = \frac{3}{2}m$.

Quare motus Annuli ad motum sphæræ ut $8r^2\mu : 3q^2m$.

Sed $8r^2 : 3q^2 = 1000000 : 925275$.

Erit igitur motus Annuli ad motum sphæræ ut $1000000 \times \mu$ ad $925275 \times m$. Q. E. D.

(g) Si hoc verè dictum sit, nescio qui fieri possit, ut alius sit punctorum æquinoctialium motus, à vi solis oriundus, quàm calculi Newtoniani suadent. Quem tamen longè alium invenerunt viri permagni Eulerus & Simsonus nostras; quos velim Lector consulas. Ipse nil definio.

4 dum

De Mundi Systemate

dum æquatorem cingeret, & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus Lem. 3.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum, quo ipſius Nodi, ſeu Puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus, qui reſtabit in annulo, erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis, ex annulo & globo compoſiti, ad motum 20gr. 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id eſt, ut 100 ad 292369. Vires autem, quibus Nodi Lunarum (ut ſuprà explicui) atque ideo quibus Puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur, id eſt vires 3IT *in fig. pag.* 72 & 74, ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum à plano QR, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. 2.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem, in morem figuræ *P*a*p*A*P*e*p*E, ad ſuperiorem illam Terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda Puncta Æquinoctialia, evaderet minor quàm priùs in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad 20gr. 11′. 46″, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9″. 56‴. 50iv.

Cæterùm hic motus ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ minuendus eſt, idque in ratione ſinûs 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad radium 100000. Quâ ratione motus iſte jam fiet 9″. 7‴. 20iv. Hæc eſt annua Præceſſio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda eſt ad vim Solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præceſſio, à vi Lunæ oriunda, 40″. 52‴. 52iv, ac tota Præceſſio annua, à vi utrâque oriunda, 50″. 00‴. 12iv. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam Præceſſio Æquinoctiorum

noctiorum

Liber Tertius.

noctiorum ex obſervationibus aſtronomicis eſt annuatim minutorum ſecundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo Terræ ad æquatorem ſuperet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quàm $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quàm ad centrum: & Præceſſio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Deſcripſimus jam ſyſtema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum. Supereſt ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

SECTIO V.

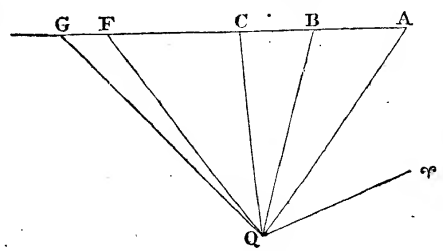
De Cometis.

LEMMA IV.

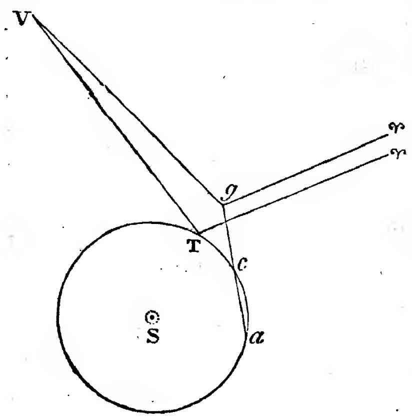
Cometas eſſe Lunâ ſuperiores & in regione Planetarum verſari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas ſupra regiones ſublunares, ſic ex Parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes ſub exitu apparitionis aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores, ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et contrà, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu terræ in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in Planetis; qui pro motu Terræ vel conſpirante vel contrario nunc retrogradi ſunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum Cometâ, & motu angulari circa Solem tanto celeriùs fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa è Terrâ ſpectatus, ob motum ſuum tardiorem, apparet eſſe retrogradus; ſin Terra tardiùs fertur, motus Cometæ (detracto motu Terræ) fit ſaltem tardior. At ſi Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem, vel retardatione, vel motu retrogrado, diſtantia Cometæ in hunc mo-

dum



dum colligitur. Sunto ♈QA, ♈QB, ♈QC obſervatæ tres longitudines Cometæ ſub initio motûs; ſitque ♈QF longitudo ultimò obſervata, ubi Cometa videri deſinit. Agatur recta ABC, cujus partes, AB, BC, rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur AC ad G, ut ſit AG ad AB ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur QG. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈QG longitudo Cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈QG, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: ſin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terrâ, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel fortè retrogradum; uti modò expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus eſt; neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit.



Diſtantia verò Cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet S ſolem; *ac*T, orbem magnum; *a*, locum Terræ in obſervatione primâ; *c*, locum Terræ in obſervatione tertiâ; T, locum Terræ in obſervatione ultimâ; & T♈, lineam rectam verſus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈TV æqualis angulo

angulo ♈QF, hoc eſt, æqualis longitudini Cometæ, ubi Terra verſatur in T. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut AG ad AC; & erit *g* locus quem Terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi T♈ parallela, & capiatur angulus ♈*g*V angulo ♈QG æqualis, erit hic angulus ♈*g*V æqualis longitudini Cometæ è loco *g* ſpectati; & angulus TV*g* parallaxis erit, quæ oritur è tranſlatione Terræ de loco *g* in locum T: ac proinde V locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus, V, orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet ([a]).

Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in Circulis maximis quamdiu moventur celeriùs; at in fine curſûs, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his Circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt, quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propiùs adſunt, deſcendunt ſæpiùs infra orbes Martis & inferiorum Planetarum ([b]).

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à Sole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia; dicendo quòd diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione ſubduplicatâ lucis ad lucem inverſè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata, & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem, ſeu ſtella, in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce

(a) De Syſt. Mund. § 58.
(b) Vid. Lib. De Syſt. Mund. § 59.

Q 2 verò

De Mundi Systemate

verò & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, & 12″ ad 30″ directè, id est, ut 24 ad 30, seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665, mense Aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate suâ penè Fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′; at nucleus, cum Planetis ope tubi optici collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cùm diameter capillitii Cometarum rarò superet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cùm lux earum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est, quòd Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longè supra. Errant igitur toto cœlo, qui Cometas in regionem Fixarum propè ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quàm Planetæ, qui hìc sunt, illustrantur à stellis fixis (c).

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propiùs ad Solem accedat necesse est, ut copiâ lucis à se reflexæ Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longè infra sphæram Saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu mi-

(c) De Syst. Mund. § 61.

nuenda

Liber Tertius.

nuenda est distantia Cometarum, ne fumus, à capite semper ortus, per spatia nimis ampla, incredibili cum velocitate & expansione, propagetur. In posteriore referenda est lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari, & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur à Sole, ideoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas, instar trabium ignitarum, nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem, ne dicam Veneres plures conjunctas, quandoque superaret (d).

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum à Terrâ Solem versus, ac decrescente in eorum recessu à Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior anni 1665 (observante *Hevelio)* ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat Perigæum; splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum Cometa, radiis solaribus obtectus, desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio)* in fine mensis Julii, ubi primùm conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad *Sept.* 4, quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis, micrometro mensuratâ, colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6, esse tantùm 6′. 5″ inclusâ comâ, at *Sept.* 2, esse 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motûs; at initio tamen in viciniâ solis longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium mensis *Decembris*,

(d) De Syst. Mund. § 62.

&

& iste anni 1680, circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in Perigæis. Verùm splendor maximus capitum contigit ante duas ferè septimanas, ubi modò exierant de radiis solaribus; & splendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1, majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in Perigæo existens) magnitudine parùm, splendore seu claritate luminis, plurimùm defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris in distantiâ novem graduum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velocissimè motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3, apparebat ut stella quartæ. *Jan.* 9, ut stella quintæ. *Jan.* 13, ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25, vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita, quæ, temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terrâ distantias æqualiter lucere debuissent, in plagâ Solis maximè splenduere, ex alterâ Perigæi parte evanuere. Igitur ex magnâ lucis in utroque situ differentiâ, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere, ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in viciniâ Solis [e].

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexâ.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur, cur Cometæ tantoperè frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent sæpiùs apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores, qui in his partibus versarentur; & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verùm percurrendo historias Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio Solem versus, quàm in hemisphærio opposito; præter alios proculdubio non paucos, quos lux

[e] De Syst. Mund. § 63 & 64.

solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se priùs detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii autem, tantillo intervallo circa Solem descripti, pars longe major sita est à latere Terræ, quod Solem respicit; inque parte illâ majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent [f].

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quòd Cœli resistentiâ destituuntur. Nam Cometæ, vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos, etiam contra cursum Planetarum diutissimè conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quòd scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra, si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus propè delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficiliùs cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PROP. XL. THEOR. XX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Prop. XIII. Libri Primi, collatum cum Prop. VIII. XII & XIII. Libri Tertii [g].

Corol 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt; orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquiplicatâ. Ideoque Come-

[f] De Mund. Syst. § 65.
[g] De Mund. Syst. § 71, 72, 73, 74.

tæ, maximâ ex parte ſupra Planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardiùs revolventur. Ut ſi axis orbis Cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id eſt, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. 1.) velocitas Cometæ omnis, erit ſemper ad velocitatem Planetæ cujuſvis, circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ Planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam Cometæ à centro ſolis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu Ellipſeos in quâ Terrâ revolvitur ſemidiametrum maximam, eſſe partium 100000000: & Terra motu ſuo diurno medioeri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa, in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum reciprocè, ideoque datur.

Corol. 4. Unde ſi latus rectum Parabolæ quadruplo majus ſit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area, quam Cometa radio ad Solem ducto ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione ſubduplicatâ.

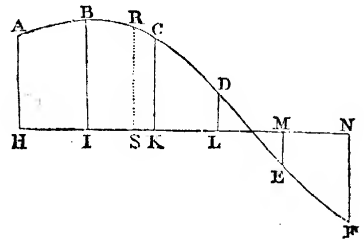
LEMMA V.

Invenire lineam Curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam, HN, demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. ſecundas, c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias, d, $2d$, $3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK -$

b 2b 3b 4b 5b
c 2c 3c 4c
d 2d 3d
e 2e
f



$DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hîc eſt f. Deinde erectâ quâcunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad Curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$; $-HS = p$; $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$; $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$; $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$; $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probè obſervatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Caſ. 2. Quòd ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas, per intervalla perpendiculorum diviſas, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; ſecundas, per intervalla bina diviſas, c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias, per intervalla terna diviſas, d, $2d$, $3d$, &c. quartas, per intervalla quaterna diviſas, e, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. poſtea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$; $-HS = p$; p in $-IS = q$; q in $+SK = r$; r in $+SL = s$; s in $+SM = t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. 1. Hinc areæ Curvarum omnium inveniri poſſunt quamproximè.

proxime. Nam si Curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ Curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

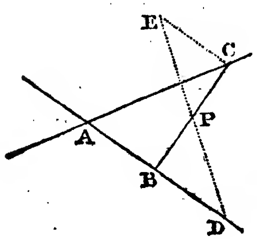
Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes *(in fig. præced.)* HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque longitudines Cometæ; HS, tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur Curva regularis ABCDE; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantùm 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

LEMMA VII.

Per datum punctum, P, *ducere rectam lineam,* BC, *cujus partes,* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

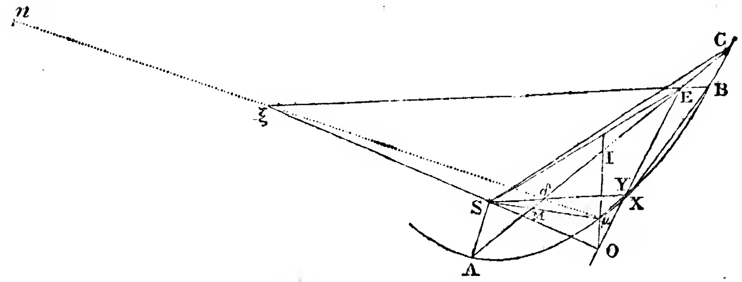


A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD, & producatur eadem versus rectam alteram AC usque ad E, ut sit PE ad PD in datâ illâ ratione. Ipsi AD parallela sit EC; & si agatur CPB, erit PC ad PB ut PE ad PD. Q. E. F.

LEMMA

LEMMA VIII.

Sit ABC *Parabola, umbilicum habens* S. *Chordâ* AC *bisectâ in* I *abscindatur segmentum* ABCA, *cujus diameter sit* Iμ *&* *vertex* μ.



In Iμ *productâ capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ. *Jungatur* OS, *&* *producatur ea ad* ξ, *ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *&* *agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quòd punctum* E *abscindet de chordâ* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim EO secans arcum parabolicum ABC in Y, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea AEXμA ad aream curvilineam ACYμA ut AE ad AC. Ideoque cùm triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eâdem ratione, erit area tota ASEXμA ad aream totam ASCYμA ut AE ad AC. Cùm autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX(h), erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si ad aream ASEXμA addatur triangulum EXB, & de summâ auferatur triangulum SEB, manebit area ASBXμA areæ ASEXμA æqualis, atque ideo ad aream ASCYμA ut AE ad AC. Sed areæ ASBXμA æqualis est area ASBYμA quamproximè, & hæc area ASBYμA est ad aream ASCYμA, ut tempus descripti arcûs AB ad tempus descripti arcûs totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè. Q. E. D.

Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accurate.

(h) ——*si jungatur* BX] si jungantur BX, SB.

Scholium.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ ſecans AC in δ, & in eâ capiatur ξn, quæ ſit ad μB ut 27MI ad 16Mμ: acta Bn ſecabit chordam AC in ratione temporum magis accuratè quàm priùs. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, ſi punctum B magis diſtat à vertice principali Parabolæ quàm punctum μ; & citrà, ſi minus diſtat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

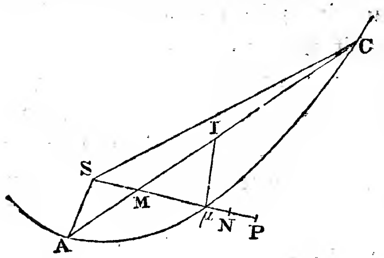
Rectæ Iμ *&* μM *& longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe.*

Nam 4Sμ eſt latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *ſit pars tertia ipſius* μI, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ: *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* AμC, *ſi progrederetur eâ ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; area, quam radio ad punctum S ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ ASCμ. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcriptâ & longitudine Sμ eſſet ad contentum ſub longitudinibus AC & SM, ut area ASCμ ad triangulum ASC, id eſt, ut SN ad SM. Quare AC eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut Sμ ad SN. Cùm autem velocitas cometæ in altitudine SP ſit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad ejus velocitatem in altitudine Sμ, in ſubduplicatâ ratione SP ad Sμ inverſe, id eſt, in ratione Sμ ad SN; longitudo, hâc velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut Sμ ad SN. Igitur



AC

AC & longitudo hâc novâ velocitate deſcripta, cùm ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. Q. E. D.

Corol. Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine S$\mu + \frac{2}{3}$Iμ, eodem tempore deſcriberet chordam AC quamproximè.

LEMMA XI.

Si Cometa, motu omni privatus, de altitudine SN *ſeu* S$\mu + \frac{1}{3}$Iμ *demitteretur, ut caderet in Solem, & eâ ſemper vi uniformiter continuatâ urgeretur in Solem, quâ urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis, quo in orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* Iμ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore deſcribat arcum parabolicum AC, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per Lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, ideoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus ſemidiameter eſſet SP, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum, cujus longitudo eſſet ad arcûs parabolici chordam AC, in ſubduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in ſolem in altitudine SP, cadendo de altitudine illâ in ſolem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP; id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cùm pondus cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad Sμ: Cometa, pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$; id eſt, ſpatium longitudini Iμ vel Mμ æquale. Q.E.D.

PROP. XLI. PROB. XXI.

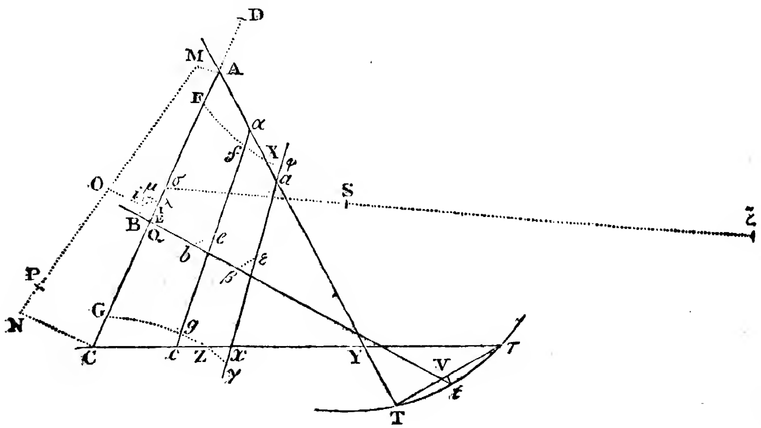
Cometæ in Parabolâ moti Trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui Problemata quædam in Libro Primo, quæ ad ejus ſolutionem

nem

nem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi Cometa tardiùs movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum E (in fig. Lem. VIII.) incidat in punctum M quamproximè, &



inde aberret verſus I potius quàm verſus A. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus Cometæ locus per Lemma ſextum.

Deſignent S ſolem; T, t, τ, tria loca Terræ in orbe magno; TA, tB, τC, obſervatas tres longitudines Cometæ; V, tempus inter obſervationem primam & ſecundam; W, tempus inter ſecundam ac tertiam; X, longitudinem, quam Cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à ſole diſtantiâ, deſcribere poſſet, quæque (per Corol. 3. Prop. XL. Lib. 3.) invenienda eſt; & tV, perpendiculum in chordam Tτ. In obſervatâ longitudine mediâ, tB, ſumatur utcunque punctum B, pro loco Cometæ in plano Eclipticæ; & inde verſus ſolem, S, ducatur linea BE, quæ ſit ad ſagittam tV, ut contentum ſub SB & St *quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt SB & tangens latitudinis cometæ in obſervatione ſecundâ ad radium tB. Et per punctum

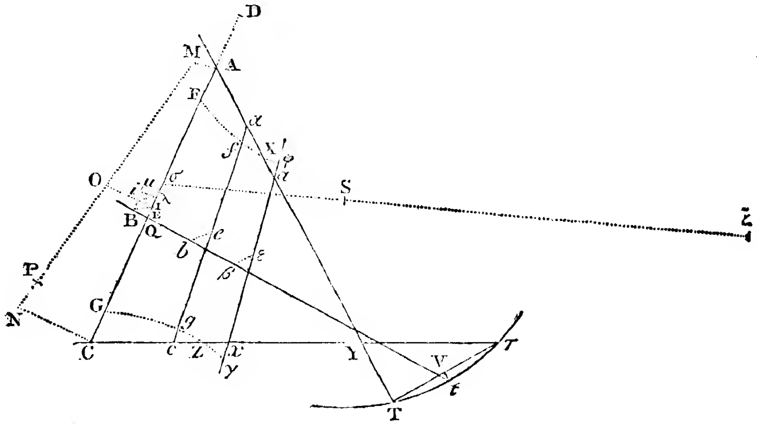
punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC, ad rectas TA & τC terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modò B ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum iI$\lambda\mu$. Cape Iσ æqualem 3Iλ, & per ſolem, S, age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\tau+3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE; quæ ſit ad priorem BE in duplicatâ ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu+\frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac priùs, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes V & W. Et erunt A & C loca Cometæ magis accuratè.

Ad AC, biſectam in I, erigantur perpendicula AM, CN, IO, quorum AM & CN ſint tangentes latitudinum in obſervatione primâ ac tertiâ ad radios TA & τC. Jungatur MN ſecans IO in O. Conſtituatur rectangulum iI$\lambda\mu$ ut priùs. In IA productâ capiatur ID æqualis $S\mu+\frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſuprà inventam X, in ſubduplicatâ ratione mediocris diſtantiæ telluris à ſole (ſeu ſemidiametri orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca Cometæ, per quæ orbis ejus in plano Eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in rectâ AC capiatur CG ipſi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eaſdem partes rectæ NC jaceant.

Eâdem methodo, quâ puncta E, A, C, G, ex aſſumpto puncto B inventa ſunt, inveniantur, ex aſſumptis utcunque punctis aliis b & β, puncta nova e, a, c, g, & ε, α, $\varkappa$, γ. Deinde ſi per G, g, γ ducatur circumferentia circuli G$g\gamma$, ſecans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in AC, ac, $\alpha\varkappa$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$, ipſis CG, cg, $\varkappa\gamma$ reſpectivè æquales; & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli F$f\varphi$, ſecans rectam AT in X: erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in orbe proprio. Denique (per Prop.

De Mundi Systemate Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo defcribatur Parabola, & hæc erit trajectoria Cometæ. Q. E. I.



Conftructionis hujus demonftratio ex lemmatibus confequitur: quippe cùm recta AC fecetur in E in ratione temporum, per Lemma VII. ut oportet per Lem. VIII. & BE per Lem. XI. fit pars rectæ BS vel Bξ, in plano Eclipticæ, arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. X.) longitudo fit chordæ arcûs, quem Cometa in orbe proprio inter obfervationem primam ac tertiam defcribere debet, ideoque ipfi MN æqualis fuerit, fi modò B fit verus cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterùm puncta B, b, β non quælibet, fed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt, in quo veftigium orbis in plano Eclipticæ defcriptum fecat rectam tB, præterpropter innotefcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ fit ad $\frac{4}{3}$Tτ in fubduplicatâ ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabitur punctum B, quod primâ vice ufurpare licet. Tum rectâ AC deletâ & fecundum præcedentem conftructionem iterum ductâ, & inventâ infuper longitudine MP; in tB capiatur punctum b, eâ lege, ut fi TA, τC fe mutuò fecuerint in Y, fit diftantia Yb ad diftantiam YB, in ratione compofitâ ex ratione MP ad MN & ratione fubduplicatâ SB ad Sb. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium β, fi modò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ

duæ ut plurimum fufficerint. Nam fi diftantia Bb perexigua obvenerit; poftquam inventa funt puncta F, f & G, g, actæ rectæ Ff & Gg fecabunt TA & τC in punctis quæfitis X & Z*. Liber Tertius.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamftedio* obfervatum & ex obfervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iifdem obfervationibus correctum, Tabula fequens exhibet.

	Tem. appar.	Tem. verum.	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4.46	4.46.0	♑ 1.51.23	♑ 6.32.30	8.28.0
21	6.32½	6.36.59	11.6.44	♒ 5.8.12	21.42.13
24	6.12	6.17.52	14.9.26	18.49.23	25.23.5
26	5.14	5.20.44	16.9.22	28.24.13	27.0.52
29	7.55	8.3.2	19.19.43	♓ 13.10.41	28.9.58
30	8.2	8.10.26	20.21.9	17.38.20	28.11.53
1681. *Jan.* 5	5.51	6.1.38	26.22.18	♈ 8.48.53	26.15.7
9	6.49	7.0.53	♒ 0.29.2	18.44.4	24.11.56
10	5.54	6.6.10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13	6.56	7.8.55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35.0	17.56.30
30	8.7	8.21.53	21.49.58	13.19.51	16.42.18
Feb. 2	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.53	16.4.1
5	6.50	7.4.41	27.49.51	16.59.6	15.27.3

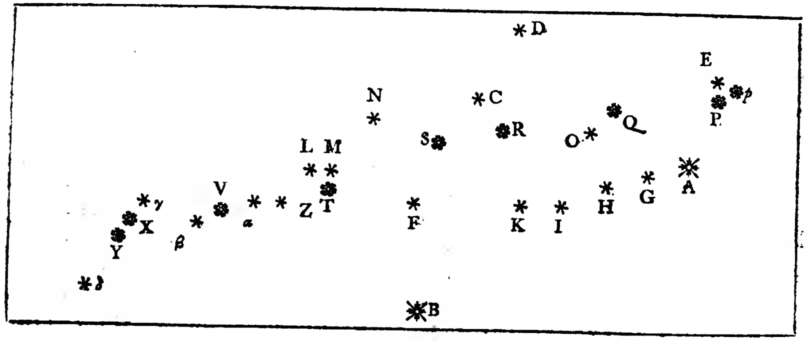
His adde obfervationes quafdam è noftris.

	Temp. appar.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	° ′ ″	° ′ ″
1681. *Feb.* 25	8.30	♉ 26.18.35	12.46.46
27	8.15	27.4.30	22.36.12
Mar. 1	11.0	27.52.42	12.23.40
2	8.0	28.12.48	12.19.38
5	11.30	29.18.0	12.5.16
7	9.30	♊ 0.4.4	11.57.0
9	8.30	0.43.4	11.45.52

Hæ obfervationes telefcopio feptupedali, & micrometro filifque in foco telefcopii locatis peractæ funt: quibus inftrumentis & pofitiones

* Confer Problemata ad finem Libri de Syft. Mund.

fitiones fixarum inter fe & pofitiones cometæ ad fixas determinavimus. Defignet A ftellam quartæ magnitudinis in finiftro calcaneo Perfei *(Bayero o)* B ftellam fequentem tertiæ magnitudinis in finiftro pede *(Bayero ζ)* & C ftellam fextæ magnitudinis *(Bayero n)* in talo ejufdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ ftellas alias minores in eodem pede. Sintque *p*, P, Q, R, S, T, V, X, loca cometæ in obfervationibus fuprà defcriptis: & exiftente diftantiâ AB partium $80\frac{7}{12}$, erat AC partium $52\frac{1}{4}$, BC $58\frac{5}{6}$, AD $57\frac{5}{12}$, BD $82\frac{6}{11}$, CD $23\frac{2}{3}$, AE $29\frac{4}{7}$, CE $57\frac{1}{2}$, DE $49\frac{11}{12}$, AI $27\frac{7}{12}$,



BI $52\frac{1}{6}$, CI $36\frac{7}{12}$, DI $53\frac{5}{12}$, AK $38\frac{2}{3}$, BK 43, CK $31\frac{5}{9}$, FK 29, FB 23, FC $36\frac{1}{4}$, AH $18\frac{6}{7}$, DH $50\frac{7}{8}$, BN $46\frac{5}{12}$, CN $31\frac{1}{3}$, BL $45\frac{5}{12}$, NB $31\frac{5}{7}$. HO erat ad HI ut 7 ad 6, & producta tranfibat inter ftellas D & E, fic ut diftantia ftellæ D ab hâc rectâ effet $\frac{1}{6}$CD. LM erat ad LN ut 2 ad 9, & producta tranfibat per ftellam H. His determinabantur pofitiones fixarum inter fe.

Tandem *Poundius* nofter iterum obfervavit pofitiones harum fixarum inter fe, & earum longitudines & latitudines in Tabulam fequentem retulit.

Fixarum

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26 . 41 . 50	12 . 8 . 36
B	28 . 40 . 23	11 . 17 . 54
C	27 . 58 . 30	12 . 40 . 25
E	26 . 27 . 17	12 . 52 . 7
F	28 . 28 . 37	11 . 52 . 22
G	26 . 56 . 8	12 . 4 . 58
H	27 . 11 . 45	12 . 2 . 1
I	27 . 25 . 2	11 . 53 . 11
K	27 . 42 . 7	11 . 53 . 26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29 . 33 . 34	12 . 7 . 48
M	29 . 18 . 54	12 . 7 . 20
N	28 . 48 . 29	12 . 31 . 9
Z	29 . 44 . 48	11 . 57 . 13
α	29 . 52 . 3	11 . 55 . 48
β	♊ 0 . 8 . 23	11 . 48 . 56
γ	0 . 40 . 10	11 . 55 . 18
δ	1 . 3 . 20	11 . 30 . 42

Pofitiones verò cometæ ad has fixas obfervabam ut fequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ft. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. Cometæ in *p* exiftentis diftantia à ftellâ E erat minor quàm $\frac{3}{13}$AE, major quàm $\frac{1}{5}$AE, ideoque æqualis $\frac{3}{14}$AE proximè; & angulus A*p*E nonnihil obtufus erat, fed ferè rectus. Nempe fi demitteretur ad *p*E perpendiculum ab A, diftantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$*p*E.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, Cometæ in P exiftentis diftantia à ftellâ E erat major quàm $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, minor quàm $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE, ideoque æqualis $\frac{1}{4}$ AE, feu $\frac{8}{39}$AE quamproximè. A perpendiculo autem à ftellâ A ad rectam PD demiffo diftantia cometæ erat $\frac{4}{5}$PE.

Die folis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. Cometæ in Q exiftentis diftantia à ftellâ O æquabat diftantiam ftellarum O & H, & recta QO producta tranfibat inter ftellas K & B. Pofitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. Cometa, in R exiftens, ftellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quàm $\frac{1}{3}$CK, & paulo minor quàm $\frac{1}{3}$CK + $\frac{1}{8}$CR, ideoque æqualis $\frac{1}{3}$CK + $\frac{1}{16}$CR, feu $\frac{16}{45}$CK.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. Cometæ exiftentis in S diftantia à ftellâ C erat $\frac{4}{9}$FC quamproximè. Diftantia ftellæ F à rectâ CS productâ erat $\frac{1}{24}$FC; & diftantia ftellæ B ab eâdem rectâ erat quintuplo major quàm diftantia ftellæ F. Item recta NS producta tranfibat inter ftellas H & I, quintuplo vel fextuplo propior exiftens ftellæ H quàm ftellæ I.

Die faturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m. Cometâ exiftente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}$ML, & recta LT producta tranfibat inter B

 &

De Mundi Systemate

& F, quadruplo vel quintuplo propior F quàm B, auferens à BF quintam vel ſextam ejus partem verſus F. Et MT producta tranſibat extra ſpatium BF ad partes ſtellæ B, quadruplo propior exiſtens ſtellæ B quàm ſtellæ F. Erat M ſtella perexigua, quæ per teleſcopium videri vix potuit, & L ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Die lunæ *Mart.* 7. hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. Cometâ exiſtente in v, recta $v\alpha$ producta tranſibat inter B & F, auferens à BF verſus F $\frac{1}{10}$BF, & erat ad rectam $v\beta$ ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ à rectâ $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2}v\beta$.

Die mercurii *Mart.* 9. horâ $8\frac{1}{2}$. p. m. Cometâ exiſtente in x, recta γx æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γx erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometâ exiſtente in Y, recta γY æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γY æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$, vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa, ob viciniam horizontis, cerni vix potuit, nec locus ejus tam diſtinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes derivabam longitudines & latitudines Cometæ, & *Poundius* noſter ex correctis fixarum locis loca Cometæ correxit, & loca correcta habentur ſuprà. Micrometro parum affabrè conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores, quatenus ex obſervationibus noſtris oriantur, minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem, juxta obſervationes noſtras, in fine motûs ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, à parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis tres, quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo *tB* partium 5657; inveni SB 9747, BE primâ vice 412, Sμ 9503, *i*λ 413: BE ſecundâ vice 421, OD 10186, X 8528,4, MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem diſtantias TX 4775 & TZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ♋ &

Liber Tertius.

& aſcendentem in ♑ 1^{gr}. 53′; inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61^{gr}. 20′$\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo 8^{gr}. 38′, & eſſe in ♐ 27^{gr}. 43′ cum latitudine auſtrali 7^{gr}. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8^{d}. 0^{h}. 4′ p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum, ex Tabulâ ſinuum naturalium collectas, determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis $16\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tandem ut conſtaret an Cometa in orbe ſic invento verè moveretur, collegi, per operationes partim arithmeticas partim graphicas, loca cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in Tabulâ ſequente videre licet.

	Diſtant Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obſ.	Lat. Obſ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6 . 32	8 . 18$\frac{1}{2}$	♑ 6 . 31$\frac{1}{3}$	8 . 26	+1	− 7$\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13 . 13$\frac{2}{3}$	28 . 0	♓ 13 . 11$\frac{3}{4}$	28 . 10$\frac{1}{12}$	+2	− 10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29$\frac{2}{3}$	♉ 16 . 59$\frac{7}{8}$	15 . 27$\frac{2}{5}$	+0	+ 2$\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29 . 19$\frac{3}{4}$	12 . 4	29 . 20$\frac{6}{7}$	12 . 3$\frac{1}{2}$	−1	+ $\frac{1}{2}$

Poſtea verò *Halleius* noſter orbitam per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quàm per deſcriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ 1^{gr}. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad Eclipticam 61^{gr}. 20′$\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* 8^{d}. 0^{h}. 4′: diſtantiam verò perihelii à nodo aſcendente, in orbitâ cometæ menſuratam, invenit eſſe 9^{gr}. 20′, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis à terrâ diſtantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè inſtituto, loca Cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tempus

Tempus verum.	Distantia Cometæ à ☉.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	−3. 5	−2. 0
21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	−1.42	+1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	−1. 3	−0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	−1.28	0 .44
29. 8. 3	84021	♓ 13.12.40	28.10.10	+1.59	+0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28 11.20	+1.45	−0.33
Jan. 5. 6. 1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	−1.20	+1.25
30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	−2.10	−0.11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	−2.42	+0.14
5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	−0.41	+2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	−2.49	+1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Apparuit etiam hic Cometa menſe *Novembri* præcedente, & *Coburgi* in *Saxonia* à D^{no}. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas, ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentiâ longitudinum *Coburgi* & *Londini*, graduum undecim, & locis Fixarum, à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca Cometæ determinavit ut ſequitur.

Novem. 3^{d}. 17^{h}. 2′, tempore apparente *Londini*, Cometa erat in ♌ 29^{gr}. 51′ cum lat. bor. 1^{gr}. 17′. 45″.

Novem. 5^{d}. 15^{h}. 58′ Cometa erat in ♍ 3^{gr}. 23′ cum lat. bor. 1^{gr}. 6′.

Novem. 10^{d}. 16^{h}. 31′ Cometa æqualiter diſtabat à ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abfuit ab eâ. In ſtellarum catalogo *Flamſtediano* σ tunc habuit ♍ 14^{gr}. 15′ cum lat. bor. 1^{gr}. 41′ fere, τ verò ♍ 17^{gr}. 3′½, cum lat. auſtr. 0^{gr}. 34′. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ 15^{gr}. 39′¼, cum lat. bor. 0^{gr}. 33′½. Sit diſtantia Cometæ à rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum 7′½, circiter. Et inde Cometa erat in ♍ 15^{gr}. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Obſervatio prima, ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas, abundè ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in obſervatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29^{gr}. 30′. 22″. latitudo borealis 1^{gr}. 25′. 7″. & diſtantia ejus à ſole 115546.

Porro *Halleius*, obſervando quòd Cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſſ.* anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & inſigni (præterquam quòd ſub mortem *Cæſaris*, cauda, ob incommodam telluris poſitionem, minùs apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum, cujus axis major eſſet partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ 2^{gr}. 2′; inclinationem plani orbis ad planum Eclipticæ 61^{gr}. 6′. 48″; perihelium Cometæ in hoc plano ♐ 22^{gr}. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7^{d}. 23^{h}. 9′; diſtantiam perihelii à nodo aſcendente in plano Eclipticæ 9^{gr}. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: computavit motum Cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus, tam ex obſervationibus deducta quàm in hoc orbe computata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

Tempus

DE MUNDI SYSTEMATE

Tempus verum.		Long. obſ.	Lat. Bor. obſ.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov.	3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
	5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
	10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
	16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
	18.21.34			18.52.15	1.26.54		
	20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
	23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec.	12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
	21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
	24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
	26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
	29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
	30. 8. 10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan.	5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
	9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
	10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
	13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
	25. 7.59	♉ 9.53. 0	17.56.30	♉ 9.34 11	17.56. 6	−0.49	−0.24
	30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb.	2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
	5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
	25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar.	1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
	5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
	9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes Cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quàm motus Planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis; & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hîc rectè definitum fuiſſe.

In Tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*, Filis ad fixas applicatis, cometam obſervârunt in ♎ 8^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 0^{gr}. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali

0^{gr}.

LIBER TERTIUS.

0^{gr}. 30′. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id eſt, horâ matutinâ 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8^{gr}. ſine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8^{gr}. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0^{gr}. 53′. 7″.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id eſt, horâ 5. 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 20′. *Cellius* in ♎ 13^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 00′. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13^{gr}. 00′, cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 00′. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexienſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in rectâ lineâ in virginis auſtrali manu, *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ, *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12^{gr}. 46′ cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ* in latitudine 42½ graduum, horâ quintâ matutinâ (id eſt *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14^{gr}. cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 30′, uti à cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. horâ mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à ſpicâ ♍ quaſi 2^{gr}. boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ 19^{gr}. 23′. 47″ cum lat. auſtr. 2^{gr}. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ*, cometa diſtabat à ſpicâ ♍ gradu uno, differentiâ latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in inſulâ *Jamaicâ*, cometa diſtabat à ſpicâ intervallo quaſi gradûs unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. $38\frac{1}{2}^{gr}$. horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 10^{a} *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpicâ propemodum conjunctum, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem quaſi $\frac{3}{4}^{gr}$. Et ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo, quòd horâ 9. 44′ *Londini* Cometa erat in ♎ 18^{gr}. 50′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 25′ circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ 18^{gr}. 52′. 15″ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, horâ ſextâ matutinâ *Venetiis* (id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23^{gr}. cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 30′. Eodem die *Boſtoniæ*, diſtabat

diſtabat cometa à ſpicâ ♍, 4^{gr}. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23^{gr}. $24'$ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. $7\frac{1}{4}$ cometam obſervârunt in ♎ 27^{gr}. $50'$ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. $16'$, *Cellius* in ♎ 28^{gr}. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27^{gr}. $45'$, *Montenarus* in ♎ 27^{gr}. $51'$. Eodem die in inſulâ *Jamaicâ* cometa viſus eſt prope principium ſcorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum ſpicâ virginis, id eſt, 2^{gr}. $2'$. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* in *Indiâ Orientali* (id eſt ad horam noctis præcedentis 11h. $20'$ *Londini*) capta eſt diſtantia cometæ à ſpicâ ♍ 7^{gr}. $35'$ in orientem. In lineâ rectâ erat inter ſpicam & lancem, ideoque verſabatur in ♎ 26^{gr}. $58'$ cum lat. auſtrali 1^{gr}. $11'$ circiter; & poſt horas 5 & $40'$ (ad horam ſcilicet quintam matutinam *Londini*) erat in ♎ 28^{gr}. $12'$ cum lat. auſtr. 1^{gr}. $16'$. Per theoriam verò cometa jam erat in ♎ 28^{gr}. $10'$. $36''$, cum latitudine auſtrali 1^{gr}. $53'$. $35''$.

Nov. 22. Cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♏ 2^{gr}. $33'$. *Boſtoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♏ 3^{gr}. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac priùs, id eſt, 1^{gr}. $30'$. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 1^{gr}. $50'$; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3^{gr}. $5'$ circiter. Eodem die *Londini* horâ mat. $6\frac{1}{2}$ *Hookius* noſter cometam vidit in ♏ 3^{gr}. $30'$ circiter, idque in lineâ rectâ quæ tranſit per ſpicam virginis & cor leonis; non exactè quidem, ſed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quòd linea à cometâ per ſpicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus cordis leonis, interpoſito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & ſpicam virginis tranſiens, Eclipticam ſecuit in ♍ 3^{gr}. $46'$; in angulo 2^{gr}. $51'$. Et ſi cometa locatus fuiſſet in hâc lineâ, in ♏ 3^{gr}, ejus latitudo fuiſſet 2^{gr}. $26'$. Sed cùm cometa, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hâc lineâ boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem ſpicæ ♍, eratque 1^{gr}. $30'$ circiter; &, conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone*, perpetuò augebatur; ideoque jam ſenſibiliter major erat quàm 1^{gr}. $30'$. Inter limites autem jam conſtitutos 2^{gr}. $26'$ & 1^{gr}. $30'$, magnitudine mediocri latitudo erit 1^{gr}. $58'$ circiter. Cauda cometæ,

cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad ſpicam ♍, declinans aliquantulum à ſtellâ iſtâ, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & cauda, æquatori ferè parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione ſolis boream verſus.

Nov. 23. ſt. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id eſt horâ $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♏ 8^{gr}. $8'$, cum latitudine auſtrali 2^{gr}. $31'$, captis ſcilicet ejus diſtantiis à ſtellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum ſolis cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♏ 12^{gr}. $52'$, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & ſpicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quàm 2^{gr}. $38'$. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulo major erat quàm 1^{gr}. $58'$; & magnitudine mediocri, ſine notabili errore, ſtatui poteſt 2^{gr}. $18'$. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & obſervator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradûs unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ, quæ per poſitiones cometæ ad Fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & obſervatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 11^{gr}. $45'$; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♏ 13^{gr}. circiter. Per theoriam verò cometa jam erat in ♏ 13^{gr}. $22'$. $42''$.

Nov. 25. Ante ortum ſolis *Montenarus* cometam obſervavit in ♏ $17\frac{3}{4}^{gr}$. circiter. Et *Cellius* obſervavit eodem tempore, quòd cometa erat in lineâ rectâ inter ſtellam lucidam in dextro femore virginis & lancem auſtralem libræ, & hæc recta ſecat viam cometæ in ♏ 18^{gr}. $36'$. Per theoriam verò cometa jam erat in ♏ $18\frac{1}{3}^{gr}$. circiter.

Congruunt igitur hæ obſervationes cum theoriâ, quatenus congruunt inter ſe; & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad uſque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis ſecuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit

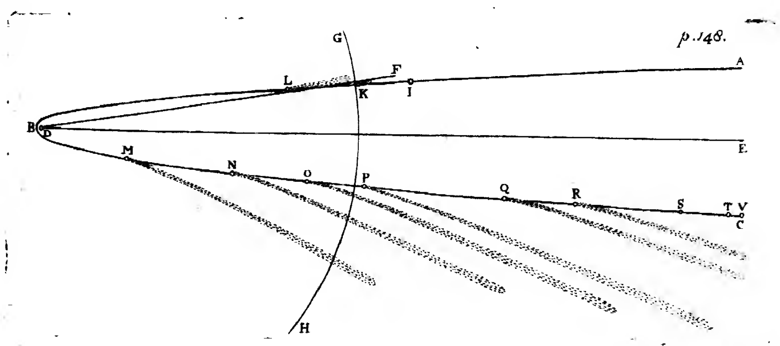
T 2

De Mundi Systemate

cui non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab Eclipticâ in austrum declinabat; & postea, mense *Decembri*, gradibus 29 vergebat ab Eclipticâ in septentrionem; partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in solem & redibat à sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per signa novem, à leonis scilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter signum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris* descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantùm 40; postea verò, motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum theoriâ Planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.

Cæterùm trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram, quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere *(vid. Tab.)*: ubi ABC denotat trajectoriam cometæ, D solem, DE trajectoriæ axem, DF lineam nodorum, GH intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, I locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, K locum ejusdem *Nov.* 11, L locum *Nov.* 19, M locum *Dec.* 12, N locum *Dec.* 21, O locum *Dec.* 29, P locum *Jan.* 5 *sequent.* Q locum *Jan.* 25, R locum *Feb.* 5, S locum *Feb.* 25, T locum *Mar.* 5, & U locum *Mar.* 9. Observationes verò sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4 & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta, non nisi semissem gradûs unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30^{gr}. longa, solique directè opposita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam ♂, quæ



quæ tunc erat in ♍ $9^{gr}. 54'$. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (observante *Flamstedio*) transibat per medium distantiæ inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in aquilæ australi alâ, & desinebat prope stellas A, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}^{gr}$. cum latitudine boreali $34^{gr}\frac{1}{4}$. circiter. *Dec.* 11. Cauda surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero* α, β) desinens in ♑ $26^{gr}. 43'$, cum latitudine boreali $38^{gr}. 34'$. *Dec.* 12. Cauda transibat per medium sagittæ, nec longè ultra protendebatur, desinens in ♒ 4^{gr}. cum latitudine boreali 42^{gr}. circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec.* 12, horâ 5. 40′ *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra cygni uropygium ad gradus 10 sese extulit; atque ab hâc stellâ ejus latus ad occasum & boream min. 45 destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à stellâ illâ $2^{gr}. 15'$ austrum versus, & terminus superior erat in ♓ 22^{gr}. cum latitudine boreali 61^{gr}. Et hinc longa erat cauda 70^{gr}. circiter. *Dec.* 21. Eadem surgebat ferè ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans à β & *Schedir*, & distantiam ab utrâque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque desinens in ♈ 24^{gr}. cum latitudine $47\frac{1}{2}^{gr}$. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54^{gr}; ideoque desinebat in ♉ 19^{gr}. cum latitudine 35^{gr}. *Jan.* 5. Cauda tetigit stellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat 40^{gr}; curva autem erat, & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per solem & caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum, & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissimâ desinebat è regione stellæ κ in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo solem & cometam jungente erat $3^{gr}. 50'$, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr}$. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel

6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente, ubi cœlum valdè serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim, & paulo ultrà. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25 & deinceps Cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti, & reliqua Cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quòd corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce, in transitu suo per viciniam Solis, statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à Sole. Ideoque cùm distantia Cometæ à centro Solis *Decemb.* 8. ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ à centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major, quàm calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si rectè conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud Cometam in Perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in Perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis, digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius, in aëre consistens, vix amitteret. Globus autem major calorem diutiùs conservaret in ratione diametri, propterea quòd superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor est pro quantitate materiæ

teriæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem *, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quòd duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quàm ea diametri: & optârim rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quòd Cometa mense *Decembri*, ubi ad Solem modò incaluerat, caudam emittebat longè majorem & splendidiorem quàm antea mense *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è Cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor, quòd cauda nihil aliud sit quàm vapor tenuissimus, quem caput seu nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterùm de Cometarum Caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse Solis, per translucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis, in progressu ipsius à capite Cometæ in Terram; vel denique nubem esse, seu vaporem, à capite Cometæ jugiter surgentem, & abeuntem in partes à Sole aversas. Opinio prima eorum est, qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem semper volitantibus: ideoque in aëre fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius est, & ægriùs sentitur: in Cœlis autem sine materiâ reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum, luce Solis illustratum, uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum, distinctè ad nos transmissa, demonstrat Medium cœleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse,

* Rectius ut opinor diebus 20000000.

id,

De Mundi Systemate

id, quoniam rariſſimè contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones, tum oculorum, tum Aëris tremuli, referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt, quòd ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſat: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos, ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat, quòd Caudæ non ſoleant videri in Cometis, cùm eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: ſciendum eſt, quòd lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: Cometæ autem ſæpè caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valdè obtuſa. Sic enim Cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſuâ vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat, ſplendore notabili, uſque ad gradus 40, 50, 60 & 70 longitudinis & ultrà: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantùm magnitudinis; cauda verò, luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili, longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultrà: ut ſuprà dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10, ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa, in iiſdem cœli regionibus, in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa anni 1680 *Decemb.* 28. horâ $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, verſabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$, cum latitudine boreali $28^{gr}. 6'$, Sole exiſtente in ♑ $18^{gr}. 26'$. Et cometa anni 1577, *Dec.* 29 verſabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$ cum latitudine boreali $28^{gr}. 40'$, Sole etiam exiſtente in ♑ $18^{gr}. 26'$ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione

Liber Tertius.

poſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri, & in regiones à Sole averſas aſcendere, confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quòd in planis orbium Cometarum, per Solem tranſeuntibus, jacentes deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quòd ſpectatori, in his planis conſtituto, apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propiùs accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quòd caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quòd curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quòd deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque ideo quòd cauda, convexo ſui latere, partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quòd caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores, & limite minùs indiſtincto terminatæ, quàm ad concava. Pendent igitur phænomena Caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectà petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit, à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit, ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in viciniâ Solis, & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur

De Mundi Systemate

incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſiùs reflectet, & limite minùs indiſtincto terminabitur. De Caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hîc nihil adjicio; propterea quòd vel à mutationibus Aeris noſtri, & motibus nubium, caudas aliquâ ex parte obſcurantium, oriantur; vel fortè à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari [i].

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate Aeris noſtri. Nam Aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus, quàm Aqua ejuſdem ponderis; ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem Aëris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò, per regulam multis experimentis confirmatam, quòd compreſſio Aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quódque gravitas ſit reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Terræ, computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. 2. ineundo, inveni quòd Aer, ſi aſcendatur à ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quàm apud nos in ratione longè majori, quàm ſpatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus Aeris noſtri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine ſemediametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones uſque ad ſphæram Saturni, & longè ultra. Proinde cùm Aer adhuc altior in immenſùm rareſcat; & coma, ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quàm ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altiùs aſcendat, debebit cauda eſſe quàm rariſſima. Et quamvis ob longè craſſiorem Cometarum atmoſphæram, magnamque corporum gra-

[i] De Mund. Syſt. § 67. & 70.

vitationem

Liber Tertius.

vitationem Solem verſus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in ſe mutuò, fieri poſſit ut Aer in ſpatiis cœleſtibus, inque Cometarum caudis, non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè ſufficere, ex hâc computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudinè ſuâ paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat, & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum craſſitudinem, luce pariter ſolari illuſtratam, aſtra minima ſine claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quàm Aeris noſtri in tenebroſo cubiculo, latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis [k].

Quo temporis ſpatio vapor à capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci ferè poteſt ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi rectâ aſcendat à Sole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectâ aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſûs ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à lineâ caudæ divergat. Hoc pacto inveni quòd vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat à capite ante *Dec.* 11, ideoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore Perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio, in viciniâ Solis, celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiu apparuit, ex vapore ferè omni conſtabat, qui à tempore Perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non priùs evanuit, quàm ob nimiam ſuam tam à Sole illuſtrante quàm ab oculis noſtris diſtantiam vi-

[k] De Mund. Syſt. § 68.

deri

deri desiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum, quem habuere sub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt, ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum, & progressum in partes à Sole aversas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus alienum, non obstante quòd substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris à radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quàm graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu Aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii solares non agitant Media, quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram æthereum cui implicantur. Illa, calore sibi communicato, rarefiet; & ob diminutam eâ raritate gravitatem suam specificam, quâ prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes, ex quibus cauda componitur. Ad ascensum vaporum conducit etiam, quòd hi gyrantur circa Solem, & eâ actione conantur à Sole recedere: at Solis Atmosphæra, & materia cœlorum, vel planè quiescit, vel motu suo quem à Solis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ sunt causæ ascensûs caudarum in viciniâ Solis, ubi orbes curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & eâ ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt,

consistunt, & caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur, & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet, ut caudæ postea decidant à capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quo minùs caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque, facillimè accipiant, & postea liberrimè servent [1].

Caudæ igitur, quæ in Cometarum Periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde, post longam annorum seriem, cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde in Periheliis Cometarum illorum, qui ad usque Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarescit, ac dilatatur. Quâ ratione fit, ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quàm juxta caput Cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem, & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi, & cum eorum Atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omninò requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiosè satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & Terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur, & in Terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò

[1] De Mund. Syst. § 69.

De Mundi Systemate

ninò crescunt, dein magnâ ex parte in Terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ indies augetur; & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor Spiritum illum, qui Aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipuè venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas, diminuuntur; &, eâ certe in parte quæ Solem respicit, angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à Sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; si modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modò ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ, de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ distantiis obscurius apparuit post Perihelium suum quàm antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novem.* 19, Cometa hicce luce suâ quantumvis plumbeâ & obtusâ, æquabat Spicam Virginis, & clariùs micabat quàm postea. Et *Montenaro Nov.* 20. st. vet. Cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ, qui mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quòd materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quòd capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobscura & exigua. Nam anno 1668 *Mart.* 5. st. nov. horâ septimâ vespertinâ *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, Cometam vidit horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo

Liber Tertius.

nimo & vix conspicuo, caudâ verò supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem splendor tres solùm dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Lusitaniâ* quartam ferè cœli partem (id est, gradus 45) occupâsse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est, quòd caput à Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et in Chronico *Saxonico* similis legitur cometa anni 1106, *cujus stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex eâ exivit valdè clarus, & quasi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio mensis *Februarii*, ac deinceps circa vesperam, ad occasum Solis brumalem. Inde verò & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit *Matthæus Parisiensis*, *distabat quasi cubito uno, ab horâ tertiâ* [rectiùs sextâ] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens*. Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quòd ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente verò die quantum potuit visum est. Nam quàm minimâ fieri potest distantiâ Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cùm* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est, ad 60$^{gr.}$] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* [An. 4. Olymp. 101.] *& ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare, vel paulo superare, videbatur; sed majores apparuere Cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem, vel etiam Lunam æquâsse traduntur.

Diximus

Diximus Cometas esse genus Planetarum in orbibus valdè eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur; sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propiùs accedunt, ut plurimum minores esse, ne Solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium verò transversas diametros, & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iisdem orbibus, post longa temporum intervalla, redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROP. XLII. PROB. XXII.

Inventam Cometæ Trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quàm maximè distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longè à Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur sectio conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventâ, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut suprà: deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ describi debeat.

Oper.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ describi debeat.

Jam sit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis + & − probè observatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut sit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem nodi alterutrius; erit $I+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè; erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum latus transversum trajectoriæ, quam Cometa describit. Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. Q. E. I.

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem Cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures Cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem Cometam, in eodem orbe revolventem. Et tum demum, ex revolutionum temporibus, dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypothesi quòd sint Parabolicæ. Nam hujusmodi Trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ Cometæ anni 1680, quam cum observationibus suprà contuli, sed etiam ex eâ Cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio*

 observatus

observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum ascendentem in ♊ $21^{gr}.13'.55''$; Inclinationem orbitæ ad planum Eclipticæ $21^{gr}.18'.40''$; distantiam Perihelii à Nodo in orbitâ $49^{gr}.27'.30''$; Perihelium in ♌ $8^{gr}.40'.30''$ cum latitudine austrinâ heliocentricâ $16^{gr}.1'.45''$; Cometam in Perihelio *Novem.* $24^{d}.11^{h}.52'$. p. m. tempore æquato *Londini*, vel $13^{h}.8'$ *Gedani*, stylo veteri; & latus rectum Parabolæ 410286, existente mediocri Terræ à Sole distantiâ 100000. Quàm probè loca Cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex Tabulâ sequente ab *Halleio* supputatâ.

Temp. Appar. *Genadi*, st. vet.	Observatæ Cometæ distantiæ.		Loca observata.		Loca computata in Orbe.
		gr. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″
Decemb.	à Corde Leonis	46.24.20	Long. ♎	7. 1. 0	♎ 7. 1.29
$3^{d}.18^{h}.29\frac{1}{2}$	à Spicâ Virginis	22.52.10	Lat. aust.	21.39. 0	21.38.50
$4.18.1\frac{1}{2}$	à Corde Leonis	46. 2.45	Long. ♎	16.15. 0	♎ 6.16. 5
	à Spicâ Virginis	23.52.40	Lat. aust.	22.24. 0	22.24. 0
7.17.48	à Corde Leonis	44.48. 0	Long. ♎	3. 6. 0	♎ 3. 7.33
	à Spicâ Virginis	27.56.40	Lat. aust.	25.22. 0	25.21.40
17.14.43	à Corde Leonis	53.15.15	Long. ♌	2.56. 0	♌ 2.56. 0
	ab Hum. Orionis dext.	45.43.30	Lat. aust.	49.25. 0	49.25. 0
19. 9.25	à Procyone	35.13.50	Long. ♊	28.40.30	♊ 28.43 0
	à Lucid Mandib. Ceti	52.56. 0	Lat. aust.	45.48. 0	45.46. 0
$20.9.53\frac{1}{2}$	à Procyone	40.49. 0	Long. ♊	13. 3. 0	♊ 3. 5. 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	40. 4. 0	Lat. aust.	39.54. 0	39.53. 0
$21.9.9\frac{1}{2}$	ab Hum. dext. Orionis	26.21.25	Long. ♊	2.16. 0	♊ 2.18 30
	à Lucid Mandib. Ceti	29.28. 0	Lat. aust.	23.41. 0	33.39.40
22. 9. 0	ab Hum. dext. Orionis	29.47. 0	Long. ♉	24.24. 0	♉ 24.27. 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	20.29.30	Lat. aust.	27.45. 0	27 46. 0
26. 7.58	à Lucidâ Arietis	23.20. 0	Long. ♉	9. 0. 0	♉ 9. 2.28
	ab Aldebaran	26.44. 0	Lat. aust.	12.36. 0	12.34 13
27. 6.45	à Lucidâ Arietis	20.45. 0	Long. ♉	7. 5.40	♉ 7. 8.45
	ab Aldebaran	28.10. 0	Lat. aust.	10.23. 0	10.23.13
28. 7.39	à Lucidâ Arietis	18 29. 0	Long. ♉	5 24.45	♉ 5.27.52
	à Palilicio	29.37. 0	Lat. aust.	8.22.50	8.23.37
31. 6.45	à Cing. Androm.	30.48.10	Long. ♉	2. 7.40	♉ 2. 8.20
	à Palilicio	32.53.30	Lat. aust.	4.13. 0	4.16.25
Jan. 1665.	à Cing. Androm.	25.11. 0	Long. ♈	28.24.47	♈ 28.24. 2
$7.7.37\frac{1}{2}$	à Palilicio	37.12.25	Lat. bor.	0.54 0	0.53. 0
13. 7. 0	à capite Androm.	28. 7.10	Long. ♈	27. 6.54	♈ 27. 6.39
	à Palilicio	38.55.20	Lat. bor.	3. 6.50	3. 7.40
24. 7.29	à Cing. Androm.	20.32.15	Long. ♈	26.29.15	♈ 26.28.50
	à Palilicio	40. 5. 0	Lat. bor.	5.25.50	5.26. 0
Feb.			Long. ♈	27. 4.46	♈ 27.24 55
7. 8. 37			Lat. bor.	7. 3.29	7. 3.15
22. 8.46			Long. ♈	28.29.46	♈ 28.29.58
			Lat. bor.	8.12.36	8.10.25
Mar.			Long. ♈	29.18.15	♈ 29.18.20
1. 8.16			Lat. bor.	8.38.26	8.36.12
7. 8.37			Long. ♉	0. 2.48	♉ 0. 2.42
			Lat. bor.	8.56.30	8.56.56

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis, quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28^{gr}. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7^{gr}. 8′. 58″. Secunda arietis erat in ♈ 29^{gr}. 17′. 18″ cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 16″. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo A, erat in ♈ 28^{gr}. 24′. 45″ cum latitudine boreali 8^{gr}. 28′. 33″. Cometa verò *Feb.* 7^{d}. 7′. 30″ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* 7^{d}. 8′. 37″ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & A rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ à ſtellâ γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & A, id eſt 1^{gr}. 19′. 46″ in circulo magno, atque ideo ea erat 1^{gr}. 20′. 46″ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1^{gr}. 20′. 26″, manebit longitudo Cometæ ♈ 27^{gr}. 9′. 49″. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione Cometam poſuit in ♈ 27^{gr}. 0′ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26^{gr}. 59′. 24″. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27^{gr}. 4′. 46″. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem Cometæ jam poſuit 7^{gr}. & 4′ vel 5′ boream verſus. Eandem rectiùs poſuiſſet 7^{gr}. 3′. 29″, exiſtente ſcilicet differentiâ latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & A.

Feb. 22^{d}. 7^{h}. 30′ *Londini*, id eſt *Feb.* 22^{d}. 8^{h}. 46′ *Gedani*, diſtantia Cometæ à ſtellâ A, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam A & primam arietis, ſeu 15′. 57″. Et diſtantia cometæ à lineâ jungente ſtellam A & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4′. Ideoque Cometa erat in ♈ 28^{gr}. 29′. 46″, cum lat. bor. 8^{gr}. 12′. 36″.

Mart. 1^{d}. 7^{h}. 0′ *Londini*, id eſt *Mart.* 1^{d}. 8^{h}. 16′ *Gedani*, Cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1^{gr}. 33′, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia Cometæ à ſecundâ arietis erat 8′. 16″ ſecundum *Hookium*, vel 8′. 5″ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa verò ſecundum *Gottignies* jam modò prætergreſſus fuerat ſecundam arietis, quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id eſt 1′. 35″ circiter

citer

citer (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta 1′. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo Cometæ ♈ 29^{gr}. 18′, & latitudo borealis 8^{gr}. 36′. 26″.

Mart. 7^{d}. 7^{h}. 30′ *Pariſiis* (id eſt *Mart.* 7^{d}. 8^{h}. 37′ *Gedani*) ex obſervationibus *Auzoutii* diſtantia Cometæ à ſecundâ arietis æqualis erat diſtantiæ ſecundæ arietis à ſtellâ A, id eſt 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & ſecundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. Ideoque Cometa erat in ♉ 0^{gr}. 2′. 48″. Ex ſchemate obſervationum *Auzoutii*, quod *Petitus* conſtruxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8^{gr}. 54′. Sed ſculptor viam cometæ ſub finem motûs ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in ſchemate obſervationum *Auzoutii*, à ſe conſtructo, incurvationem irregularem correxit, & ſic latitudinem cometæ fecit eſſe 8^{gr}. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere poteſt 8^{gr}. 56′, vel 8^{gr}. 57′.

Viſus etiam fuit hic Cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0^{gr}. 18′, cum lat. bor. 9^{gr}. $3\frac{1}{2}$′ circiter.

Apparuit hic Cometa menſes tres, ſignaque ferè ſex deſcripſit, & uno die gradus ferè viginti confecit. Curſus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, theoria à principio ad finem cum obſervationibus non minus accuratè congruit, quàm theoriæ Planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent; ut inſpicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta ſecunda ab angulo inter nodum aſcendentem & perihelium, ſeu conſtituendo angulum illum 49^{gr}. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) parallaxis annua inſignis fuit; & inde demonſtratur motus annuus Terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano Eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23^{gr}. 23; inclinatio orbitæ ad Eclipticam 83^{gr}. 11′; Perihelium in ♊ 25^{gr}. 29′. 30″; diſtantia Perihelia à Sole 56020, exiſtente radio orbis magni

2 100000,

100000, & tempore perihelii *Julii* 2^{d}. 3^{h}. 50′. Loca autem Cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Comp. Lat. Bor.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37. 4	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	−0.39	−0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Auſtr.	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Auſtr.	−3.48	−2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.53	11. 7.12	5.16.50	−0. 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21^{gr}. 16′. 30″; Inclinatio orbitæ ad planum Eclipticæ 17^{gr}. 56′. 0″; Perihelium in ♒ 2^{gr}. 52′. 50″; Diſtantia Perihelia à Sole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000; et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4^{d}. 7^{h}. 39′. Loca verò ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis.	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	−0.12	+0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0. 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	−0.47	+2.26
22. 8. 8	9.33.35	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	−0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+1.22	−0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	−0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum Cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus Nodus aſcendens (computante D. *Bradleo*, Aſtronomiæ apud *Oxonienſes* Profeſſore *Saviliano*) erat in ♈ 14^{gr}. 16′; Inclinatio orbitæ ad planum Eclipticæ 49^{gr}. 59′; Perihelium in ♉ 12^{gr}. 15′. 20″; Diſtantia Perihelia à Sole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000; & tempore æquato Perihelii *Septem.* 16^{d}. 16^{h}. 10′. Loca verò Cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* obſervatis collata, exhibentur in Tabulâ ſequente.

1723 Temp. Æquat.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Com. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9.8. 5	♒ 7.22.15	5. 2. 0	♒ 7.21.26	5. 2.47	+49	−47
10.6.21	6.41.12	7.44.13	6.41.42	7.43.18	−50	+55
12.7.22	5.39.58	11.55. 0	5.40.19	11.54.55	−21	+ 5
14.8.57	4.59.49	14.43.50	5. 0.37	14.44. 1	−48	−11
15.6.35	4.47.41	15.40.51	4.47.45	15.40.55	− 4	− 4
21.6.22	4. 2.32	19.41.49	4. 2.21	19.42. 3	+11	−14
22.6.24	3.59. 2	20. 8.12	3.59.10	20. 8.17	− 8	− 5
24.8. 2	3.55.29	20.55.18	3.55.11	20.55. 9	+18	+ 9
29.8.56	3.56.17	22.20.27	3.56.42	22.20.10	−25	+17
30.6.20	3.58. 9	22.32.28	3.58.17	22.32.12	− 8	+16
Nov. 5.5.53	4.16.30	23.38.33	4.16.23	23.38. 7	+ 7	+26
8.7. 6	4.29.36	24. 4.30	4.29.54	24. 4.40	−18	−10
14.6.20	5. 2.16	24.48.46	5. 2.51	24.48.16	−35	+30
20.7.45	5.42.20	25.24.45	5.43.13	25.25.17	−53	−32
Dec. 7.6.45	8. 4.13	26.54.18	8. 3.55	26.53.42	+18	+36

His exemplis abundè satis manifestum est, quòd motus Cometarum per Theoriam à nobis expositam non minùs accuratè exhibentur, quàm solent motus Planetarum per eorum theorias. Et propterea orbes Cometarum per hanc theoriam enumerari possunt, & tempus periodicum Cometæ, in quolibet orbe revolventis, tandem sciri, & tum demum orbium Ellipticorum latera transversa, & Apheliorum altitudines innotescent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, descripsit orbem, cujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♉ $20^{gr}. 21'$; Inclinatio plani orbis ad planum Eclipticæ erat $17^{gr}. 2'$; Perihelium erat in ♒ $2^{gr}. 16'$; & distantia Perihelia à Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* $16^{d}. 3^{h}. 50'$. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe Cometæ, qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa spatio annorum 75, & axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}: 75\times75$ ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. Et distantia Aphelia Cometæ hujus à Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ à Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si Cometa spatio annorum septuaginta quinque in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur, & altiùs ascendere.

Cæterùm Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum à Sole distantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in se mutuò nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non est expectandum, ut Cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quàm quæ à causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco, more Planetarum, sed inde migrent, & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis suis, ubi tardissimè moventur, quàm longissimè distent ab invicem, & se mutuò quàm minimè trahant. Quâ de causâ Cometæ, qui altiùs descendunt, ideoque tardissimè moventur in Apheliis, debent altiùs ascendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à Sole in Perihelio suo quàm parte sextâ diametri Solis (m); & propter summam velocitatem in viciniâ illâ, & densitatem aliquam Atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad Solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio, ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari potest, & subinde in Solem incidere. Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, & sub initio quàm maximè splendent, & subinde paulatim evanescunt. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ, quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, lustrando illam cœli partem nocte serenâ minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus splendidiorem, & luce suâ vix cedentem Veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; & ex eo tempore paulatim decrescentem, & spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense *Novembri*, ubi primùm apparuit, Venerem luce suâ æquabat. Mense *Decembri*, nonnihil diminuta, Jovem æquare videbatur. Anno 1573, mense *Januario* minor erat Jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evasit æqualis. Mense *Aprili* & *Maio*, stellis secundæ magnitudinis; *Junio*, *Julio* & *Augusto*, stellis tertiæ magnitudinis; *Septembri*, *Octobri* & *Novembri*, stellis quartæ; *Decembri*, & anni 1574 mense *Januario*, stellis quintæ; & mense *Februario* stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, & mense *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, & anni 1573 mense *Martio* rutilans instar Martis aut stellæ Aldebaran; *Maio* autem albitudinem sublividam induxit, qualem in Saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede Serpentarii, quam *Kepleri* discipuli anno 1604, die 30 *Septembris* st. vet. apparere

(m) De Mund. Syst. § 75, 76, 77.

De Mundi Systemate

parere cœpiſſe obſervârunt, & luce ſuâ ſtellam Jovis ſuperâſſe, cùm nocte præcedente minimè apparuiſſet. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtellâ novâ, ſupra modum ſplendente, *Hipparchus* ad Fixas obſervandas, & in catalogum referendas, excitatus fuiſſe dicitur. Sed Fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſuâ fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex Sole & ſtellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in Atmoſphæras Planetarum, & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos; & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypothesis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unuſquiſque radio ad Solem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole. Ut periodica Planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicatâ diſtantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conſerventur, & tranquillè natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus Vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus Cometarum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi Vortices tollantur.

Projectilia, in Aere noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato Aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat; ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc Vacuo

Liber Tertius.

cuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſupra Atmoſphæram Terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrimè moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis, ſecundum leges ſuprà expoſitas, perpetuò revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitus acquirere per leges haſce minimè potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eâdem motûs directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eâdem motûs directione, in planis orbium Planetarum quamproximè. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis Mechanicis; ſiquidem Cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur: quo motûs genere Cometæ per orbes Planetarum celerrimè & facillimè tranſeunt; & in Apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutiùs morantur, quàm longiſſimè diſtant ab invicem, ut ſe mutuò quàm minimè trahant. Elegantiſſima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non niſi conſilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi ſtellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum, hæc omnia, ſimili conſilio conſtructa, ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cùm lux Fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux Solis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne Fixarum ſyſtemata per gravitatem ſuam in ſe mutuò cadant, hic eadem immenſam ab invicem diſtantiam poſuerit.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, ſed ut univerſorum Dominus. Et propter dominium ſuum, Dominus Deus * Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam Deus eſt vox relativa, & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio Dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus Deus eſt Anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt Ens æternum, infinitum, abſolutè perfectum: ſed Ens, utcunque perfectum, ſine dominio, non eſt Dominus Deus. Dicimus enim Deus meus, Deus veſter, Deus *Iſraelis*, Deus deorum, & Dominus dominorum: ſed non dicimus Æternus meus, Æternus veſter, Æternus *Iſraelis*, Æternus deorum; non dicimus Infinitus meus, vel Perfectus

* Id eſt Imperator univerſalis.

fectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad fervos. Vox Deus paſſim † ſignificat Dominum: ſed omnis Dominus non eſt Deus. Dominatio Entis ſpiritualis Deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur Deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & Infinitus, Omnipotens & Omniſciens; id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique; & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cùm unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivè in duratione, co-exiſtentes in ſpatio, neutræ in Perſonâ hominis, ſeu principio ejus cogitante; & multo minùs in ſubſtantiâ cogitante Dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem Deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantiâ ſubſiſtere non poteſt. In ipſo ‡ continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentiâ Dei. Deum ſummum neceſſariò exiſtere in confeſſo eſt: et eâdem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus Deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorſus deſtituitur; ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minimè cognoſcimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores; audimus tantùm ſonos; tangimus tantùm ſuperficies externas; olfacimus odores ſolos; & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nullâ actione reflexâ cognoſcimus; & multo minùs ideam habemus ſubſtantiæ Dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi; & Deus ſine dominio, providentiâ, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quàm Fatum & Natura. A cæcâ neceſſitate metaphyſicâ, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate Entis, neceſſariò exiſtentis, ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem Deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de Deo à rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis diſſerere, ad Philoſophiam Naturalem pertinet.

† *Pocockus* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ* *du* (& in caſu obliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc cenſu principes vocantur dii, *Pſalm*. lxxxiv. 6. & *Joan*. x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod*. iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſò propter defectum dominii.

‡ Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Natura deorum, *lib*. 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius* Georgic *lib*. 4. *v*. 220, & Æneid. *lib*. 6. *v*. 721. *Philo* Allegor. *lib*. 1. ſub initio. *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri, ut *Paulus* in Act. xvii. 27, 28. *Johannes* in Evang. xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7, 8, 9. *Solomon* 1 Reg viii. 27. *Job* xxii. 12, 13, 14. *Jeremias* xxiii. 23, 24. Fingebant autem Idololatræ Solem, Lunam, & Aſtra, animas hominum & alias Mundi partes eſſe partes Dei ſummi, & ideo colendas, ſed falſò.

Hactenus Phænomena cælorum & maris noſtri per vim gravitatis expoſui; ſed cauſam gravitatis nondum aſſignavi. Oritur utique hæc vis à cauſâ aliquâ, quæ penetrat ad uſque centra Solis & Planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum, in quas agit (ut ſolent cauſæ Mechanicæ) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicatâ ratione diſtantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in ſingulas Solis particulas; & recedendo à Sole decreſcit accuratè in duplicatâ ratione diſtantiarum ad uſque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifeſtum eſt, & ad

De Mundi Systemate

ad usque ultima Cometarum Aphelia, si modò Aphelia illa quiescant. Rationem verò harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *Hypothesis* vocanda est; & hypotheses, seu Metaphysicæ, seu Physicæ, seu Qualitatum Occultarum, seu Mechanicæ, in *Philosophiâ Experimentali* locum non habent. In hâc Philosophiâ Propositiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum, & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quòd Gravitas reverâ existat, & agat secundum leges à nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quàm attrahendo corpuscula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Sensatio omnis excitatur; & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus Spiritûs, per solida nervorum capillamenta, ab externis sensuum organis ad cerebrum, & à cerebro in musculos, propagatis. Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritûs accuratè determinari & monstrari debent.

FINIS PRINCIPIORUM.

DE
MUNDI
SYSTEMATE
LIBER.

DE

MUNDI SYSTEMATE

LIBER.

FIXAS in fupremis mundi partibus immotas perfiftere, & Planetas his inferiores circa Solem revolvi, Terram pariter moveri curfu annuo, diurno verò circa axem proprium, & Solem, ceu focum Univerfi, in omnium centro quiefcere, antiquiffima fuit Philofophantium fententia. Sic enim fenferant olim *Philolaus*, *Ariftarchus Samius*, *Plato* ætate maturiore, *Pythagoreorum* turba ([a]), & his antiquior *Anaximander*, & *Romanorum* Rex ille fapientiffimus *Numa Pompilius*. Is in fymbolum Orbis rotundi & ignis Solaris in centro, templum erexit *Veftæ*, formâ rotundâ, & ignem perpetuum in medio affervari fanxit. Ab *Ægyptiis* autem, aftrorum antiquiffimis obfervatoribus, propagatam effe hanc fententiam verfimile eft. Etenim ab illis, & à gentibus conterminis, ad *Græcos*, gentem magis Philologicam quàm Philofophicam,

Cœlos effe fluidos.

Archimedes in Arenario. Ariftot. lib. 2. de cœlo. Plutarch. lib. 3. de placitis Philof. & in Numâ.

([a]) De antiquiffimis Pythagoreis gravem mihi dubitationem movet Timæus Locrus, qui in libro περι ψυχας κοσμω Terram difertiffimè conftituit in centro Mundi: fupra hanc Lunam; fupra Lunam Solem, anni fpatio circulum fuum abfolventem. Hunc æquis ferè paffibus comitari dicit Mercurium et Venerem. Tum Planetis tribus reliquis, Marti, Jovi et Saturno, fuam cuique velocitatem, fuum converfionis fpatium tribuit. Omnes autem intra fphæram Primi Mobilis contineri ait, cujus vertigine, cum alia omnia inferiora, tum Solem ipfum abripi.

cam, Philoſophia omnis antiquior juxtà & ſanior manâſſe videtur: & ſacra *Veſtæ* ingenium *Ægyptiorum* ſapiunt, myſteria, captum vulgi ſuperantia, ſacris ritibus & Hieroglyphicis pingentium. Subinde docuerunt *Anaxagoras*, *Democritus*, & alii nonnulli, Terram in centro mundi immotam ſtare, & aſtra omnia in occaſum aliqua celeriùs alia tardiùs moveri, idque in ſpatiis liberrimis. Namque orbes ſolidi poſtea ab *Eudoxo*, *Caliſpo*, *Ariſtotele*, introducti ſunt; declinante indies Philoſophiâ primitus introductâ, & novis *Græcorum* commentis paulatim prævalentibus. Cum his orbibus malè conſiſtunt Phænomena Cometarum. Hos, inter corpora cœleſtia à multis olim numeratos, *Chaldæi*, rerum Aſtronomicarum peritiſſimi, pro ſtellis errantibus habuere [b]: quaſi ſemel ſingulis revolutionibus, in orbium valdè excentricorum partes infimas deſcendendo, ſe nobis per vices conſpiciendos exhiberent. Eoſdem poſtea, in regiones infra Lunam neceſſariò detruſit iſta orbium ſolidorum hypotheſis; & his iiſdem viciſſim per nuperas Aſtronomorum obſervationes in cœlos Lunâ ſuperiores reſtitutis, confracti ſunt illi orbes, & ex æthere deturbati.

Principium motûs circularis in ſpatiis liberis.

2. Quibus vinculis Antiqui Planetas in ſpatiis liberis retineri, deque curſu rectilineo perpetuò retractos, in orbem regulariter agi docuere, non conſtat. In hujus rei explicationem orbes ſolidos excogitatos fuiſſe opinor. Philoſophi recentiores aut vortices eſſe volunt, ut *Keplerus* & *Carteſius*, aut aliud aliquod ſive impulſûs ſive attractionis principium, ut *Borellus*, *Hookius*, & ex noſtratibus alii. Ex motûs lege primâ certiſſimum eſt vim aliquam requiri. Nobis propoſitum eſt quantitatem & proprietates ipſius eruere, atque effectus in corporibus movendis inveſtigare mathematicè: proinde ne ſpeciem ejus hypotheticè determinemus, diximus ipſam generali nomine centripetam, quæ tendit in centrum aliquod; vel etiam, ſumpto nomine de centro, circumſolarem, quæ tendit in Solem; circumterreſtrem, quæ in Terram; circumjovialem, quæ in Jovem; & ſic in cæteris.

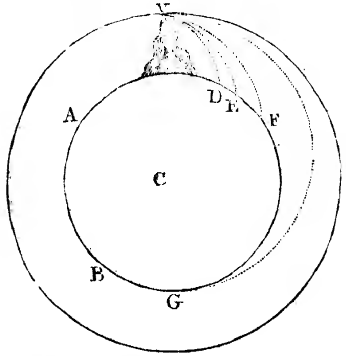
Effectus virium centripetarum.

3. Viribus centripetis Planetas in orbibus certis retineri poſſe, intelligetur ex motibus projectilium. Lapis projectus, urgente gravitate ſuâ, deflectitur de curſu rectilineo, &, curvam lineam in aëre deſcribendo, tandem cadit in terram; ſi motu velociore

[b] Vide Diodor. Sic. Lib. 15. C. L. et Senecæ Quæſt. Nat. Lib. 7.

projiciatur,

projiciatur, pergit longiùs. Augendo velocitatem, fieri poſſet, ut arcum deſcriberet milliaris unius, duorum, quinque, decem, centum, mille; ac tandem ut, pergendo ultra terminos Terræ, non amplius in terram caderet. Deſignet AFB ſuperficiem Terræ; C centrum ejus; & VD, VE, VF, lineas curvas, quas projectile de montis prælalti vertice V, ſecundum lineas horizonti parallelas, auctis cum velocitatis gradibus, ſucceſſivè emiſſum deſcribat. Et ne aëris reſiſtentia, quâ motus cœleſtes vix retardantur, in computum veniat, fingamus hunc omnem tolli, vel ſaltem nil reſiſtere. Et eâdem ratione quâ corpus velocitate minore



deſcribit arcum minorem VD, & majore arcum majorem VE, & auctâ adhuc velocitate pergit longiùs ad F, & longiùs ad G; idem tandem, ſi augeatur ſemper velocitas, ſuperabit totum telluris ambitum, & redibit ad montem, unde fuerat projectum. Cúmque area, quam, radio ad centrum terræ ducto, deſcribit, ſit (per Prop. I. Lib. 1. Princip. Math.) proportionalis tempori, velocitas ejus in reditu ad montem non minor erit quàm ſub initio: ſervatâ autem velocitate, poteſt idem ſæpiùs eâdem lege revolvi. Imaginemur jam corpora de regionibus altioribus ſecundum lineas horizontales projici; puta de locis milliaria quinque, decem, centum, mille vel plura, totidemve Telluris ſemidiametros, altis; &, pro variâ corporum velocitate, & vi gravitatis in ſingulis regionibus exercitâ, deſcribentur arcus Telluri vel concentrici, vel variè excentrici; inque his trajectoriis pergent corpora ad modum Planetarum cœlos tranſcurrere.

Certitudo argumenti.

4. Et quemadmodum ex deſcenſu lapidis demiſſi, demonſtrativè colligitur eundem gravitare, neque minùs certum gravitatis indicium eſt perpetua illa projectorum deflexio in terram: ſic omnis omnium in ſpatiis liberis motorum corporum de recto tramite deviatio, & perpetua in locum quemvis deflexio, certiſſimum eſt indicium, vim aliquam extare, quâ corpora undique in locum illum urgentur. Utque ex conceſſâ gravitate neceſſe eſt corpora

omnia

omnia in his terris inferiora petere; atque adeo, vel rectâ cadere, ſi quieſcentia demittantur, vel de recto tramite perpetuò deflectere in terram, ſi projiciantur obliquè: ita, ex conceſſâ vi in centrum quodcunque tendente, non minùs neceſſarium eſt omnia, in quæ vis illa exercetur, vel rectâ deſcendere ad centrum illud; vel ſi obliquè moveantur, perpetuò de recto tramite in centrum vergere. Quâ autem ratione vires ex motibus, & motus ex viribus colligendi ſunt, copioſè expoſitum eſt in Libris de Motu.

Vires centripetas ad ſingula Planetarum centra tendere.

5. Tendere autem vires centripetas ad corpora Solis, Telluris, & Planetarum, ſic colligo. Gyratur Luna circa Terram noſtram, radiiſque ad ipſius centrum ductis, deſcribit areas temporibus proportionales quàm proximè. Id ex velocitate Lunæ, cum ipſius apparentibus diametris collatâ, certiſſimum eſt: diametro minore, quæ majorem arguit diſtantiam, tardior eſt motus; majore velocior. Motibus magis regularibus gyrantur Satellites Jovis circa Jovem, circulos Jovi concentricos æquabili motu deſcribentes quoad ſenſum. Sic & comes Saturni circa hunc Planetam motu ſatis circulari & æquabili revolvitur, excentricitate vixdum animadverſâ. Venerem & Mercurium circa Solem revolvi, demonſtratur ex eorum phaſibus lunaribus: plenâ facie ſiti ſunt ultra Solem, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem, per diſcum ejus nonnunquam tranſeuntes. Et Venus quidem orbem circularem, Solique concentricum, uniformi motu deſcribit quamproximè. Mercurius autem, motu magis excentrico, ad Solem notabiliter accedit, & inde per vices recedit: ſed velocior ſemper eſt ubi Soli propior, quo fit, ut, radio ad Solem ducto, deſcribat areas temporibus proportionales. Terram denique circa Solem, aut Solem circa Terram, radio intercedente areas deſcribere temporibus exactè proportionales, demonſtratur ex Solis diametro apparente cum ipſius motu apparente collatâ. Hæc ſunt experimenta Aſtronomica: & ex his (per Libri Primi Propoſitiones tres primas & earum Corollaria) conſequens eſt, quòd dentur vires centripetæ, aut accuratè aut ſine errore notabili, ad centra Terræ, Jovis, Saturni, & Solis tendentes. In Mercurio, Venere, Marte, & Planetis minoribus, cùm deſint experimenta, valeat argumentum ex analogiâ.

6. Ex

Vires centripetas decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum à Planetarum centris.

6. Ex Propoſitionis autem quartæ Corollario ſexto conſequitur, quòd hæ vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro Planetæ cujuſque. Nam tempora periodica Satellitum Jovis ſunt inter ſe in ſeſquiplicatâ proportione diſtantiarum à centro hujus Planetæ. In his jam diu notata fuit hæc proportio; eamque tam accuratè obtinere, quàm ſit poſſibile ſenſibus diſcernere, ſignificavit mihi *Flamſtedius* noſter, has diſtantias micrometro & per ſatellitum eclipſes ſæpiùs menſus. Eaſdem, ante inventionem micrometri, *Galilæus*, pergendo ab intimo Satellite ad extimum, definivit eſſe ſemidiametrorum Jovis 6, 10, 16, 28, reſpectivè; *Simon Marius*, 6, 10, 16, 26; *Caſſinus*, 5, 8, 13, 23; *Borellus* magis exactè, $5\frac{2}{3}$, $8\frac{2}{3}$, 14, $24\frac{2}{3}$. Et, poſt inventionem micrometri, *Tounleius*, 5,51. 8,78. 13,47. 24,72; *Flamſtedius* autem, 5,31. 8,85. 13,98. 24,23. & exactiùs per eclipſes 5,578. 8,876. 14,159. 24,903. Sunt autem Satellitum ex obſervationibus *Flamſtedianis* periodica tempora, $1^{d}.\ 18^{h}.\ 28'.\ 36''$; $3^{d}.\ 13^{h}.\ 17'.\ 54''$; $7^{d}.\ 3^{h}.\ 59'.\ 36''$; & $16^{d}.\ 18^{h}.\ 5'.\ 13''$: & ex his derivatæ diſtantiæ ut numeri, 5,578. 8,878. 14,168. 24,968. qui cum diſtantiis obſervatione collectis ſatis accuratè congruunt. In Planetis autem circumſolaribus, Mercurio & Venere, proportio illa obtinet accuratiſſimè; quantum hactenus dimenſiones orbitarum, ex obſervationibus melioris notæ, determinârunt Aſtronomi.

Planetas ſuperiores Solem cingere, & radiis ad ipſum ductis areas deſcribere temporibus proportionales.

7. Martem quoque circa Solem revolvi, demonſtratur ex ipſius phaſibus, & proportione diametrorum apparentium. Nam ex phaſi plenâ prope conjunctionem Solis, & gibboſâ in quadraturis, certum eſt, quòd is Solem ambit: & cùm diameter ejus quaſi quintuplo major appareat in oppoſitione Solis quàm in conjunctione, & diſtantia ejus à Terrâ ſit reciprocè ut diameter apparens, erit diſtantia illa quintuplo minor circiter in oppoſitione quàm in conjunctione; at Martis à Sole eadem circiter erit diſtantia, in utroque caſu, cum diſtantiâ ejus in quadraturis, quæ ex phaſi gibboſâ colligitur. Utque Solem æquabili ferè diſtantiâ, Terram valdè inæquabili cingit: ſic etiam, radio ad Solem ducto, deſcribit aream ſatis uniformiter; at radio ad Terram ducto, nunc velox eſt, nunc ſtationarius, nunc retrogradus. Jovem Marte ſuperiorem eſſe, & motu quoque, quoad diſtantiam & areæ deſcriptionem, ſatis æquabili Solem circuire, ſic colligo. In literis

ad

ad me datis ſcripſit *Cl. Flamſtedius*, omnes intimi Satellitis, quas noverat hactenus accuratè obſervatas, Eclipſes cum theoriâ ſuâ, abſque errore duorum in tempore ſcrupulorum primorum, congruere; extimum non multo magis errare, penextimum vix triplo magis; penintimum verò multo magis; ſed minùs tamen à computationibus ſuis diſſidere, quàm ſolet Luna à Tabulis vulgaribus: ſe verò per ſolos Satellitum motus medios, & æquationem lucis à *Romero* inventam, Eclipſes computare. Ponamus igitur Theoriam à motu Satellitis extimi, hactenus obſervato, minùs diſſidere quàm errore duorum ſcrupulorum primorum: et erit ut Periodus integra dierum 16. 18^{hor}. 5′. 13″, ad tempus 2′, ita circulus integer graduum 360, ad arcum 1′. 48″ (c). Proinde error computi *Flamſlediani*, ad orbitam Satellitis reductus, minor erit quàm 1′. 48″; id eſt longitudo Satellitis, è centro Jovis ſpectati, determinabitur abſque errore 1′. 48″. At longitudo illa, ubi Satelles in medio umbræ verſatur, eadem eſt cum Jovis longitudine heliocentricâ; & propterea hypotheſis quam *Flamſtedius* ſequitur, nempe *Keplero-Copernicæa*, à ſe nuper (quoad motum Jovis) correcta, longitudinem illam rectè exhibet abſque errore 1′. 48″. Hâc longitudine, & notiſſimâ ſemper longitudine geocentricâ, determinatur diſtantia Jovis à Sole: quæ proinde ea ſemper eſt, quam exhibet iſta hypotheſis. Namque maximus ille in longitudine heliocentricâ error, 1′. 48″, inſenſibilis ferè eſt, & planè contemnendus; ſed & ex Satellitis ignotâ excentricitate oriri poteſt. Longitudine autem & diſtantiâ rectè definitis, neceſſe eſt ut Jupiter, radio ad Solem ducto, deſcribat areas eâ lege quam hypotheſis requirit, & propterea tempori proportionales. Idem de Saturno ex hujus affeclâ, per obſervationes *Hugenii* & *Halleji*, colligere licebit; quanquam obſervationum ſeries diuturnior in rei confirmationem & calculum ſatis accuratum deſideretur.

Vim, quâ Planetæ ſuperiores reguntur, non dirigi ad Terram. Eandem dirigi ad Solem.

8. Jupiter igitur, ſiquis hunc ſpectaret à Sole, nunquam appareret retrogradus, nunquam ſtationarius, ut ex Terrâ cernitur, ſed motu ſatis uniformi ſemper progrederetur. Ex motûs apparentis geocentrici inæqualitate ſummâ colligitur, per Propoſitionis tertiæ Corollarium quartum, quòd vis illa, quâ Jupiter deflectere cogitur

(c) Quòd ſi tempus converſionis Satellitis extimi veriùs ſumas 16^{d} – 16^{h} – ′32 – ″9, tamen arcus circularis,

cogitur de motu rectilineo, & in orbem revolvitur, non dirigitur ad centrum Terræ. Et idem valet argumentum in Marte & Saturno. Quærendum eſt, per Prop. II & III. & hujus Corollaria, aliud harum virium centrum; circum quod, radiis intercedentibus, æquabilis ſit arearum deſcripto: et hoc eſſe Solem, jam probatum eſt in Marte quidem & Saturno præterpropter, in Jove verò abundè ſatis accuratè. Fingere licet Solem & Planetas vi quâvis aliâ æqualiter, & ſecundum lineas parallelas, urgeri. Verùm tali vi, per Legum Corol. 6. non mutabitur ſitus Planetarum inter ſe; nullus producetur effectus ſenſibilis: nos autem agimus de cauſis effectuum ſenſibilium. Rejiciatur igitur hujuſmodi vis omnis ut precaria, & ad cœlorum phænomena nil ſpectans; & vis omnis reliqua, quâ ſtella Jovis urgetur, tendet, per Propoſitionis tertiæ Corollarium primum, ad centrum Solis.

Vim circumſolarem per omnes Planetarum regiones decreſcere, in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole.

9. Diſtantiæ Planetarum à Sole eædem prodeunt, ſive Terram cum *Tychone*, ſive Solem cum *Copernico*, collocemus in centro ſyſtematis: & veras eſſe has diſtantias, jam probavimus in Jove. In his definiendis *Keplerus* & *Bullialdus* apprimè navarunt operam: unde & cum cœlis meliùs concordant ipſorum Tabulæ. Sunt autem harum diſtantiarum cubi in omnibus Planetis, in Jove inquam & Marte, Saturno & Tellure, æquè ac in Venere & Mercurio, ut quadrata temporum periodicorum; & propterea, per Corol. 6. Prop. IV. vis centripeta circumſolaris decreſcit, per univerſa Planetarum cœla, in duplicatâ ratione diſtantiarum à Sole. In examinandâ hâcce proportione ſumendæ ſunt diſtantiæ mediocres, ſive orbium ſemiaxes tranſverſi (per Prop. XV.) & negligendæ minutiæ, quæ, in definiendis orbibus, ex inſenſibilibus obſervationum erroribus oriri potuerint, quæve cauſis poſt affignandis tribuendæ ſunt. Sic incidetur ſemper in proportionem præfinitam exactè. Nam cùm diſtantiæ Saturni, Jovis, Martis, Terræ, Veneris & Mercurii à Sole, ex obſervationibus Aſtronomicis collectæ, ſint inter ſe, juxta computum *Kepleri*, ut numeri 951000, 519650, 152350, 100000, 72400, 38806; juxtaque computum *Bullialdi*, ut numeri 954198, 522520, 152350, 100000, 72398, 38585; eædem ex temporibus periodicis col-

circularis, qui ad integrum circuitum rationem habeat quam ſpatium illud temporis ad ſpatium ′2, is amplitudinem ′1 – ″48 non ſuperabit.

 lectæ,

lectæ, ſunt ut numeri 953806, 520116, 152399, 100000, 72333, 38710. Diſtantiæ *Kepleri* & *Bullialdi*, vix differunt ſenſibiliter, & ubi maximè differunt, claudunt inter ſe diſtantias ex temporibus periodicis collectas.

Vim circumterreſtrem decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum à Terrâ. Probatur ex hypotheſi quòd Terra quieſcit.

10. In duplicatâ itidem diſtantiarum proportione vim circumterreſtrem decreſcere, ſic colligo. Lunæ diſtantia mediocris à centro Terræ eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum*, *Keplerum* in Ephemeridibus, *Bullialdum*, *Hevelium*, & *Ricciolum*, 59; ſecundum *Flamſtedium*, $59\frac{1}{3}$; ſecundum *Vendelinum*, 60; ſecundum *Copernicum*, $60\frac{1}{3}$; ſecundum *Kircherum*, $62\frac{1}{2}$; ſecundum *Tychonem*, $56\frac{1}{2}$: verùm *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ, omninò contra naturam lucis, majores quàm Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem; hoc eſt, quaſi duodecimâ, vel decimâ quintâ, parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi 61 ſemidiametrorum terreſtrium; ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, uti ab Aſtronomis definitum eſt: &, per Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ, corpus, revolvendo in aëre noſtro juxta ſuperficiem Terræ quieſcentis, vi centripetâ, quæ eſſet ad vim eandem in diſtantiâ Lunæ in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro Terræ reciprocè, hoc eſt ut 3600 ad 1; revolutionem, ſublatâ aëris reſiſtentiâ, compleret horâ 1, minutis primis 24, ſecundis 27. Pone ambitum Terræ eſſe pedum *Pariſienſium* 123249600, uti à *Gallis* menſurantibus nuper definitum eſt: & corpus idem, ſublato motu ſuo circulari, & urgente eâdem vi centripetâ ac prùis, deſcriberet cadendo pedes *Pariſienſes* $15\frac{1}{12}$ tempore minuti unius ſecundi. Colligitur hoc ex calculo per Propoſitionem XXXVI. inito, & congruit cum experientiâ. Nam factis Pendulorum experimentis, & computo inde inito, demonſtravit *Hugenius*; quòd corpora, omni illâ cujuſcunque generis vi centripetâ, quâ juxta ſuperficiem Terræ urgentur, deſcendentia, deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes *Pariſienſes* $15\frac{1}{12}$.

Probatur ex Hypotheſi quòd terra movetur.

11. Quòd ſi motus concedatur Terræ, gyretur hæc & Luna, per Legum Corol. 4. & Prop. LVII. circa commune gravitatis centrum

centrum. Et Luna (per Prop. LX.) eodem tempore periodico dierum 27, hor. 7. 43′, vi eâdem circumterreſtri diminutâ in duplicatâ ratione diſtantiæ, revolvetur in orbitâ, cujus ſemidiameter eſt ad ſemidiametrum prioris, hoc eſt ad 60 ſemidiametros terreſtres, ut ſumma corporum Terræ & Lunæ, ad primam duarum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus terræ: hoc eſt, ſi ponamus Lunam, ob mediocrem ſuam diametrum apparentem $31'\frac{1}{2}$, eſſe quaſi quadrageſimam ſecundam partem Terræ, ut 43 ad $\sqrt[3]{42 \times 43|^2}$; ſive ut 128 ad 127 circiter: ideoque ſemidiameter hujus orbitæ, hoc eſt diſtantia inter centra Lunæ & Terræ, jam erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut aſſignavit *Copernicus*, non abludentibus obſervationibus *Tychonicis*. In hâc diſtantiâ valet igitur duplicata illa proportio decrementi virium. Augmentum orbitæ ab actione Solis oriundum, ut planè contemnendum neglexi: eo ſubducto, relinquetur vera diſtantia quaſi $60\frac{4}{9}$ ſemidiametrorum terreſtrium.

Decrementum in duplicatâ ratione diſtantiarum à Terrâ & Planetis, probatur ex Planetarum excentricitate & Apſidum motu tardiſſimo.

12. Confirmatur præterea hæc ratio decrementi virium ex Planetarum excentricitate, & Apſidum tardiſſimo motu. Nam (per Corollaria Prop. XLV.) manifeſtum eſt, quòd nullâ aliâ ratione poſſint Planetæ omnes circumſolares, ſingulis revolutionibus, ſemel ad minimam à Sole diſtantiam deſcendere, & ſemel ad maximam aſcendere, atque loca harum diſtantiarum manere immobilia. Parvus error in ratione duplicatâ efficeret motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem. At motus ille in Orbibus Planetarum circumſolarium vixdum poſt innumeras revolutiones ſenſibilis extitit. Aſtronomorum aliqui motum omnem negant; cæteri non majorem ſtatuunt quàm qui ex cauſis poſt aſſignandis facilè oriri poſſit, quique in quæſtione, de quâ agitur, nullius eſt momenti. Sed & motus longe major Aphelii Lunaris, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum trium, contemni poteſt. Hoc motu demonſtratur vim circumterreſtrem decreſcere in ratione diſtantiæ non minori quàm duplicatâ, & longè minori quàm triplicatâ: nam ſi ratio duplicata mutetur gradatim in triplicatam, augebitur motus Aphelii in infinitum, adeoque mutatione perexiguâ ſuperabit motum Aphelii Lunaris. Oritur motus ille tardiſſimus ex actione vis circumſolaris, ut poſthac dicetur.

cetur. Tollendo hanc cauſam quieſcet Apogæum Lunæ, & perveniet ad proportionem duplicatam.

Quantitas virium tendentium ad ſingulos Planetas. Ingens vis circumſolaris.

13. Stabilitâ hâc proportione, conferri jam licet Planetarum vires inter ſe. In mediocri diſtantiâ Jovis à Terrâ, elongatio maxima Satellitis extimi à centro Jovis, ex obſervationibus *Flamſtedii*, eſt 8′. 13″. adeoque diſtantia Satellitis à centro Jovis, ad mediocrem diſtantiam Jovis à centro Solis, ut 124 ad 52012; ad mediocrem verò diſtantiam Veneris à centro Solis, ut 124 ad 7234. Sunt autem eorum tempora periodica $16\frac{3}{4}$ dierum, & $224\frac{2}{3}$ dierum. Et inde, per Corollarium ſecundum Propoſitionis quartæ, dividendo diſtantias per quadrata temporum, deducitur, vim, quâ Satelles urgetur in Jovem, eſſe ad vim quâ Venus urgetur in Solem, ut 442 ad 143: et minuendo vim, quâ Satelles urgetur, in duplicatâ ratione diſtantiæ 124 ad 7234, prodibit vis circumjovialis, in diſtantiâ Veneris à Sole, ad vim circumſolarem quâ Venus urgetur, ut $\frac{13}{100}$ ad 143, ſeu 1 ad 1100. Proinde ad æquales diſtantias vis circumſolaris 1100 vicibus major eſt quàm vis circumjovialis. Simili computo ex Satellitis Saturnii tempore, periodico dierum 15, horarum $22\frac{2}{3}$, & maximâ ipſius à Saturno, mediocriter à nobis diſtante, elongatione 3′. 20″. colligo diſtantiam hujus Satellitis à centro Saturni eſſe ad diſtantiam Veneris à Sole, ut $92\frac{2}{5}$ ad 7234; & inde vim abſolutam circumſolarem majorem eſſe quàm vis abſoluta circumſaturnia, vicibus 2360.

Exigua vis circumterreſtris.

14. Ex regulari Veneris, Jovis, & aliorum Planetarum heliocentrico motu & irregulari geocentrico manifeſtum eſt (per Corol. 4. Prop. III.) quòd vis circumterreſtris collata cum vi circumſolari ſit perquàm exigua. Parallaxin Solis, ex dichotomiâ Lunæ Teleſcopiis notatâ, *Ricciolus* & *Vendelinus* ſeorſim determinare conati ſunt, eamque conſtituêre non majorem dimidio minuti unius primi. *Keplerus* parallaxin Martis acronychi, quæ multo major eſt, tam *Tychonicis* quàm propriis obſervationibus inſenſibilem reperit. *Flamſtedius* eandem micrometro aggreſſus, idque in perigæo Martis, nunquam reperit majorem viginti quinque minutis ſecundis; & inde concludit parallaxin Solis eſſe ſummùm decem minutorum ſecundorum. Unde conſequens eſt, quòd diſtantia Lunæ à Terrâ non habet majorem rationem ad diſtantiam Terræ à Sole, quàm 29 ad 10000; neque majorem ad diſtantiam Veneris

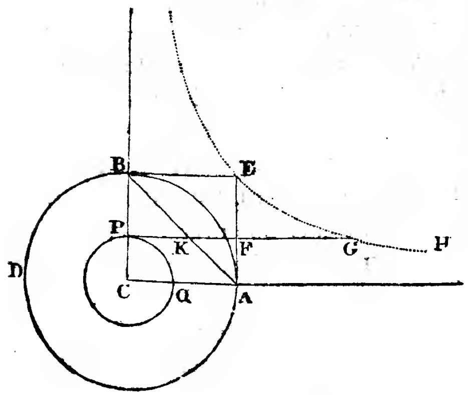
Veneris à Sole, quàm 29 ad 7233. Inde & ex temporibus periodicis, methodo jam expoſitâ, deducetur, quòd vis abſoluta circumſolaris ſit major quàm vis abſoluta circumterreſtris, vicibus 229400 ad minimum. Quòd ſi conſtaret tantùm ex obſervationibus *Riccioli* & *Vendelini*, parallaxin eſſe minorem dimidio minuto primo, tamen inde ſequeretur vim abſolutam circumſolarem ſuperare vim circumterreſtrem vicibus 8500.

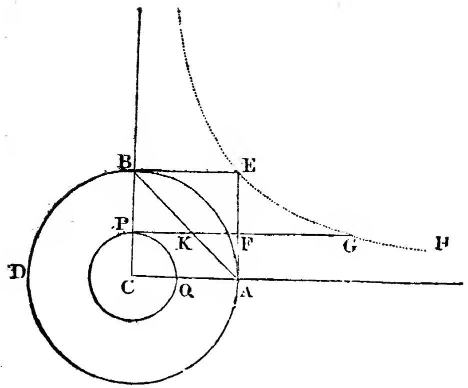
Planetarum diametri apparentes.

15. Similibus computis incidi in analogiam inter vires & corpora Planetarum: ſed antequam hanc expono, definiendæ ſunt Planetarum apparentes diametri in mediocribus diſtantiis eorum à Terrâ. Diametrum Jovis, *Flamſtedius* micrometro menſus eſt 40″ vel 41″, eamque annuli Saturni 50″, & Solis quaſi 32′. 13″. Diameter corporis Saturnii eſt ad diametrum annuli, juxta *Hugenium* & *Halleium*, ut 4 ad 9, juxta *Galletium* ut 4 ad 10, juxta *Hookium* (teleſcopio pedum ſexaginta uſum) ut 5 ad 12. Ex ratione mediocri 5 ad 12 colligitur diameter corporis quaſi 21″.

Correctio diametrorum apparentium.

16. Et hæ ſunt magnitudines apparentes. Verùm puncta omnia lucida, per inæqualem lucis refrangibilitatem, dilatantur in Teleſcopiis, occupantque in foco vitri objectivi ſpatium circulare latitudine quaſi quinquageſimæ partis aperturæ vitri: ita tamen ut lux in circuitu rariſſima vix aut ne vix quidem ſentiatur; in medio verò, ubi conſtipatior eſt, ſenſumque ſatis ferit, lucidum conſtituat circellum, cujus latitudo pro ſplendore puncti lucentis varia ſit, ac tertiam circiter quartamve aut quintam ferè partem latitudinis totius ut plurimum adæquet. Deſignet ABD circulum lucis totius; PQ, circellum luce ſatis conſpicuâ clarentem; C, centrum utriuſque; CA, CB, ſemidiametros circuli majoris rectum continentes angulum C; ACBE, quadratum his diametris comprehenſum; AB, diagonalem ejus; EGH, Hyperbolam





perbolam centro C, asymptotis CA, CB, descriptam; PG, perpendiculum ad ipsius BC punctum quodvis, P, erectum, & occurrens Hyperbolæ in G, rectisque AB, AE in K & F: & lucis densitas in loco quovis P erit, ex computo meo, ut longitudo FG, adeoque in centro infinita, prope circumferentiam quàm minima: lux autem tota intra circellum PQ est ad totam extra, ut area quadrilatera CAKP ad triangulum PKB. Ibi concipe circellum PQ terminari, ubi lucis densitas FG minor esse incipit, quàm quæ sensui movendo sufficit. Et hinc est, quòd ignis trium pedum latitudinis, in distantiâ 191382 pedum, per Telescopium tripedale apparuit *Picarto* quasi 8″ latus, qui solùm 3′. 14″. latus apparere debuisset. Hinc est, quòd Fixarum lucidiores per telescopia apparent latæ 5″. vel 6″; idque luce satis plenâ, luce autem debiliore latiùs excurrunt. Hinc est, quòd *Hevelius*, minuendo aperturam Telescopii, sustulit bene magnam partem lucis in circuitu, effecitque ut discus Stellæ distinctiùs circinaretur, & minor evaderet, verùm tamen etiamnum latus appareret 5″, vel 6″: *Hugenius* autem, vitris juxta oculum fuligine leviter infectis, lucem undique erraticam adeo extinxit, ut Stellæ, punctorum instar, sensibili omni latitudine privatæ viderentur. Hinc est, quòd *Hugenius* latitudine obstaculi quod lucem omnem interciperet, majores exhibuit Planetarum diametros, quàm ab aliis Micrometro definitum est: nam lux erratica, tecto Planetâ, latiùs cernitur, radiis fortioribus non ampliùs obscurata. Hinc denique est, quòd Planetæ in Sole tam graciles appareant, luce dilatatâ attenuati. Neque enim Mercurius *Hevelio*, *Galletio* & *Halleio*, superavit 12″, vel 15″, & Venus *Crabtrio* solùm 1′. 3″, *Horroxio* 1′. 12″, occupare visa est; quæ tamen, juxta mensuras *Hevelii* & *Hugenii* extra discum Solis captas, implere debuisset 84″, ad minimum.

nimum. Sic & Lunæ diameter apparens, quæ anno 1684, paucis diebus ante & post eclipsin Solis, mensurata fuit in Observatorio *Parisiensi* 31′. 30″, in ipsâ eclipsi non superabat 30′, vel 30′. 5″. Igitur diametri Planetarum extra Solem minuendæ sunt, & intra augendæ, minutis aliquot secundis. At in mensuris micrometro captis errores videntur esse solito minores. Semidiametrum Jovis, ex umbræ diametro per Eclipses Satellitum inventâ, *Flamstedius* determinavit esse ad elongationem maximam Satellitis extimi, ut 1 ad 24,903. Unde cùm elongatio illa sit 8′. 13″, diameter Jovis erit $39\frac{1}{2}$. Igitur diameter micrometro inventa, 40″, vel 41″, rejiciendo lucem erraticam, reducitur ad $39\frac{1}{2}$″. Et simili correctione minuenda est Saturni diameter 21″, & statuenda 20″, vel paulo minor. At Solis diameter ob lucem fortiorem paulo magis, ni fallor, minuenda est, & statuenda quasi 32′ vel 32′. 6″.

17. Corpora, magnitudinis tam diversæ, ad analogiam cum viribus tam propè accedere, mysterio certè non caret. Possibile est ut Planetæ ulteriores, defectu caloris, careant substantiis illis metallicis & mineris ponderosis, quibus Terra referta est: utque corpora Veneris & Mercurii, majore Solis calore, magis concocta & coagulata sint. Experimento speculi ustorii constat calorem augeri cum densitate lucis; hæc autem augetur in duplicatâ ratione accessûs ad Solem. Inde colligitur calorem Solis ad Mercurium septuplo majorem esse quàm apud nos tempore æstivo; tanto autem calore aqua ebullit, & graves illi Vitrioli & Mercurii spiritus leniter exhalant, ut thermometro expertus sum: proinde nulli apud Mercurium consistunt liquores nisi graviores, qui magnum sustinent calorem, & ex quibus substantiæ densissimæ nascantur. Quidni si Deus corpora singula, calore temperiei convenienti alenda, in totidem à Sole distantiis locaverit; sintque adeo densiora semper, quæ Soli propriora: eâ ratione constabit optimè, pondera Planetarum omnium esse inter se ut vires. Pervelim verò diametros Planetarum definiri exactiùs. Id fiet, si Lampas ad magnam aliquam distantiam luceat per foramen circulare, & minuatur tum foramen tum lux Lampadis, usque eò ut spectrum per Telescopium appareat instar Planetæ, & iisdem mensuris definiatur. Tum latitudo foraminis erit ad sui ipsius distantiam à vitro objectivo, ut vera Planetæ diameter ad ipsius distantiam à nobis.

Cur Planetæ sint aliqui magis alii minus densi, sintque vires ut quantitas materiæ in singulis.

nobis. Diminui poteſt lux Lampadis interpoſitione pannorum, aut vitri infecti fuligine.

Alia virium & corporum analogia. Probatur in cœleſtibus.

18. Analogiæ jam deſcriptæ affinis eſt altera inter vires & attracta corpora. Quoniam actio vis centripetæ in Planetas decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ, & tempus periodicum augetur in ratione ſeſquiplicatâ; manifeſtum eſt, quòd in æqualium Planetarum æqualibus à Sole diſtantiis, æquales forent actiones, & æqualia tempora periodica: quòdque in æqualibus inæqualium diſtantiis, actiones collectitiæ forent ut Planetarum corpora. Namque actiones, quæ non eſſent ut corpora movenda, non poſſent corpora illa æqualiter retrahere de tangentibus orbitarum; & efficere ut revolutiones, æqualibus temporibus, in Orbitis item æqualibus complerentur. Sed nec motus Satellitum Jovis tam regulares eſſe poſſent, niſi vis circumſolaris æqualiter in Jovem & Satellites omnes, pro ratione ponderum, exerceretur. Eſtque eadem ratio Saturni & Satellitis ipſius; ut & Terræ & Lunæ noſtræ, uti (ex Corol. 2 & 3. Prop. LXV.) manifeſtum eſt. Paribus igitur diſtantiis æqualis eſt actio vis centripetæ in omnes Planetas, pro ratione corporum, ſeu quantitate materiæ in corporibus; atque adeò in omnes etiam ejuſdem quantitatis particulas, ex quibus Planetæ componuntur. Nam ſi actio major eſſet in particulas unius generis, minor in illas alterius, quàm pro ratione quantitatis materiæ, foret etiam actio major vel minor in Planetas, non ſolùm pro ratione quantitatis, ſed etiam pro genere materiæ quæ in uno copioſiùs, in alio parciùs, reperiretur.

Probatur in terreſtribus.

19. Analogiam certè in corporibus diverſorum generum quæ in Terrâ noſtrâ extant, tentavi quàm accuratiſſimè. Actio vis circumterreſtris, corporibus movendis proportionalis, movebit eadem æqualibus temporibus, æquali cum velocitate (per Motus Leg. 2.) facietque tum omnia demiſſa, temporibus æqualibus, per æqualia ſpatia deſcendere; tum omnia, filis æqualibus ſuſpenſa, æqualibus temporibus oſcillari. Actione majore minora erunt tempora, minore majora. Deſcenſus autem corporum omnium (demptâ ſaltem aëris perexiguâ reſiſtentiâ) æqualibus temporibus fieri jamdudum obſervârunt alii: & exactiſſimè notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, ſale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas æquales: unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Æqualibus, pedum undecim, filis pendentes pyxides conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aëris reſiſtentiam omninò paria: & paribus oſcillationibus juxta poſitæ ibant unà, & redibant diutiſſimè. Proinde copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad actionem ejus in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus: & ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuiſſet.

Analogiarum conſenſus.

20. Cùm autem actio vis centripetæ in corpus attractum, paribus diſtantiis, proportionalis ſit materiæ in hoc corpore; rationi etiam conſentaneum eſt, ut ſit etiam proportionalis materiæ in corpore trahente. Etenim actio mutua eſt, facitque corpora conatu mutuo (per Motûs Legem 3.) accedere ad invicem, & proinde ſibi ipſi conformis eſſe debet in corpore utroque. Conſiderari poteſt corpus unum ut attrahens, alterum ut attractum, ſed hæc diſtinctio magis mathematica eſt quàm naturalis. Attractio reverâ eſt corporis utriuſque in utrumque, atque adeo ejuſdem generis in utroque.

Et coincidentia.

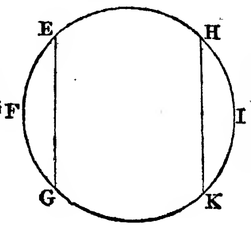
21. Et hinc eſt quòd vis attractiva reperiatur in utroque. Sol trahit Jovem & cæteros Planetas, Jupiter trahit Satellites; & paritate rationis, Satellites agunt in ſe invicem & in Jovem, & Planetæ omnes in ſe mutuò. Et quamvis binorum Planetarum actiones in ſe mutuò diſtingui poſſint ab invicem, &, ut actiones binæ, quibus uterque trahit alterum, conſiderari: tamen quatenus intermediæ ſunt, non ſunt binæ, ſed operatio ſimplex inter binos terminos. Contractione funiculi unius intercedentis poſſunt bina corpora ad invicem trahi. Cauſa actionis gemina eſt, nimirum diſpoſitio utriuſque corporis; actio item gemina, quatenùs in bina corpora: at quatenùs inter bina corpora, ſimplex eſt & unica. Non eſt una operatio quâ Sol v. g. trahit Jovem, & alia operatio quâ Jupiter trahit Solem, ſed una operatio quâ Sol & Jupiter conantur ad invicem accedere. Actione, quâ Sol trahit Jovem, conantur Jupiter & Sol ad ſe mutuò accedere (per Motûs Leg. 3.) & actione, quâ Jupiter trahit Solem, conantur etiam Jupiter

piter & Sol ad ſe mutuò accedere: Sol autem non attrahitur actione duplici in Jovem, neque Jupiter actione duplici in Solem, ſed una eſt actio intermedia, quâ ambo accedunt ad ſe mutuò. Ferrum trahit magnetem, æquè ac magnes ferrum; nam ferrum omne in viciniâ magnetis trahit etiam aliud ferrum. At actio inter magnetem & ferrum ſimplex eſt, & à Philoſophis conſideratur ut ſimplex: operatio ferri in magnetem ipſa eſt magnetis operatio ſeipſum inter & ferrum, quâ ambo conantur accedere ad ſe mutuò. Id ex eo manifeſtum eſt, quòd ſublato magnete ceſſat propè vis tota ferri. Ad hunc modum concipe ſimplicem exerceri inter binos Planetas ab utriuſque conſpirante naturâ oriundam operationem; & hæc eodem modo ſe habebit ad utrumque: adeò proportionalis exiſtens materiæ in uno eorum, proportionalis erit materiæ in altero.

Inſenſibiles eſſe corporum parvorum vires.

22. Dicet fortè quis, corpora omnia hâc lege ſe mutuò trahere debere, contra experientiam in terreſtribus. Sed reſpondeo, quòd experientia in terreſtribus planè nulla eſt. Sphærarum homogenearum attractiones, juxta ſuperficies earum, ſunt (per Prop. LXXII.) ut diametri: unde ſphæra, Terræ homogenea, diametroque pedis unius deſcripta, minùs trahet corpuſculum juxta ſuperficiem ſuam, quàm Terra juxta ſuam, vicibus 20000000 circiter: et vis tantilla nullos edet ſenſibiles effectus. Hujuſmodi globi duo, quartâ tantùm digiti parte ab invicem diſtantes, in ſpatiis liberis, haud minori quàm menſis unius intervallo, vi mutuæ attractionis accederent ad invicem. Globorum minorum coitus eſſet tardior in ratione diametrorum. Sed nec montes toti ſuffecerint ad ſenſibiles effectus: ad radices montis hemiſphæricis alti tria milliaria & lati ſex, Pendulum, vi montis attractum, non deviabit ſcrupulis duobus primis à perpendiculo. Vires haſce in ſolis Planetarum ingentibus corporibus intueri licet; niſi forte de minoribus diſputemus in hunc modum.

Tendere tamen vires ad corpora omnia terreſtria proportionales quantitati materiæ.



23. Deſignet EFGI globum Telluris, ſectum plano quovis EG, in partes duas EFG, EIG. Pars EFG, incumbendo in partem EIG, premit ipſam toto ſuo pondere. Nec poteſt pars EIG hanc preſſionem ſuſtinere, & immota perſiſtere, niſi æquali conatu in contrarium.

contrarium. Partes igitur ponderibus ſuis ſe mutuò æqualiter urgent, id eſt, trahuntur in ſe mutuo æqualiter, ut lex tertia requirit: adeoque diſtractæ ab invicem & demiſſæ caderent in ſe mutuò, cum velocitatibus, quæ eſſent reciprocè ut corpora. Quæ omnia in magnete experiri & intueri licet. Deſignet jam EFG corpus aliquod exiguum in ſuperficie Terræ: & quoniam particulæ hujus & Terræ reliquæ, EIG, attractiones in ſe mutuò ſunt æquales; attractio autem particulæ in Terram (nimirum pondus ejus) eſt ut materia particulæ, uti experimento Penduli probatum eſt; erit etiam attractio Terræ in particulam ut materia particulæ: adeoque corporum omnium terreſtrium vires attractivæ, ut quantitas materiæ in ſingulis.

Probatur eaſdem vires in corpora cœleſtia tendere.

24. Vires autem, quæ ſunt ut materia in omnium formarum corporibus terreſtribus, atque adeo non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus univerſis, tam cœleſtibus, quàm terreſtribus; & in omnibus eſſe proportionales materiæ: eò quòd hæc omnia, non genere ſubſtantiæ, ſed formis & modificationibus ſolummodo, differunt. Id verò ſic etiam probatur in cœleſtibus. Conſtitit actionem vis circumſolaris in omnes Planetas, ad æqualitatem diſtantiarum reductos, eſſe ut materia in Planetas: idem ſimiliter conſtat de actione vis circumjovialis in Satellites Jovis; & par eſt ratio attractionis omnium Planetarum in unumquemque. Inde verò ſequitur (per Prop. LXIX.) quòd eorum vires attractivæ ſunt ut materia in ſingulis.

Decreſcere vires à Planetarum ſuperficiebus extrorſum in duplicatâ ratione, introrſum in ratione diſtantiarum à centris.

25. Igitur ut partes Terræ ſe mutuò trahunt, ſic etiam faciunt partes Planetarum. Si Jupiter & Satellites ejus coirent, & in unum formarentur globum; pergerent ſinguli proculdubio ſe mutuò trahere ut priùs: & vice verſâ, ſi corpus Jovis reſolveretur in globos plures, credendum eſt, quòd hi non minùs traherent ſe mutuò, quàm trahunt Satellites. His attractionibus fit, ut corpora Telluris & omnium Planetarum ſphæricam affectent figuram, utque partes eorum cohæreant, & non ſpargantur per æthera. Oriri verò has vires ex univerſali naturâ materiæ jam conſtitit, & propterea ex particularum viribus componi vim globi totius. Inde verò conſequens eſt (per Corol. 3. Prop. LXXIV.) quòd vis particulæ cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ ab eâdem

particulâ;

particulâ; & (per Prop. LXXIII. & LXXV.) quòd vis globi totius decrescit à superficie suâ extrorsum in duplicatâ ratione, & introrsum in ratione simplici distantiarum à centro, si modò globus ex uniformi materia constat: & quamvis globi in progressu à centro ad circumferentiam non sint uniformes, valebit tamen decrementum in ratione duplicatâ distantiæ extrorsum (per Prop. LXXVI.) si modò similis sit inæquabilitas undique in progressu per circuitum: & hujusmodi globi duo (per eandem Propositionem) se mutuò trahent, vi decrescente in duplicatâ ratione distantiæ inter centra.

Quantitates virium & motuum inde oriundorum in singulis casibus.

26. Est igitur globi cujusque vis absoluta ut quantitas materiæ in ipso. Vis autem motrix, quâ globus unusquisque trahitur in alterum, quamque vulgus in terrestribus per vocem ponderis designat, est ut contentum sub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum distantiæ inter centra (per Corol. 4. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis est quantitas motûs, quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum: vis autem acceleratrix, quâ globus unusquisque pro ratione materiæ suæ attrahitur in alterum, est ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum distantiæ inter centra (per Corol. 2. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis est velocitas, quâ globus attractus, dato tempore, movebitur in alterum. Quibus probè intellectis, jam facile fuerit determinare motus corporum cœlestium inter se.

Planetas omnes circa Solem revolvi.

27. Collatis Planetarum viribus, vidimus circumsolarem cæteris majorem esse mille vicibus & ampliùs. Urgente autem vi tantâ necesse est, ut corpora omnia inter spatium systematis Planetarum, & longè ultra, rectâ descendant in Solem; nisi aliò moveantur. Neque Terra de numero talium corporum excludenda est. Luna certè de genere Planetarum est, & iisdem attractionibus obnoxia cum cæteris Planetis: nam & vi circumterrestri retinetur in orbe suo. Terram verò & Lunam æqualiter trahi in Solem probavimus suprà: sed & corpora omnia communibus attractionum legibus obnoxia esse jam antè probavimus. Quanto autem

(d) Vide Princip. Lib. 1. Prop. XXXVI. Cor. H.

(e) Subductis calculis comperimus casu recto Solem usque delatum iri stellam Veneris spatio dierum

autem tempore corpus unumquodque, motu circumsolari privatum, descenderet, & cadendo perveniret usque ad Solem, innotescit (per Prop. XXXVI.) ex distantiâ ejus à Sole: nimirum dimidio temporis periodici, quo corpus ad distantiam duplo minorem revolvi posset (d); sive tempore quod est ad tempus periodicum Planetæ, ut 1 ad $4\sqrt{2}$. Ut, quòd Venus cadendo perveniret ad Solem, spatio dierum quadraginta; Jupiter spatio annorum duorum & mensis unius; Terra & Luna spatio dierum 66 & horarum 19 (e). Quod cùm non accidit, necesse est ut hæc corpora moveantur aliorsum: nec sufficit motus quilibet; ad impediendum descensum requiritur velocitas satis magna. Et inde valet etiam argumentum in Planetis tardescentibus. Nisi vis circumsolaris decrescat in duplicatâ ratione tarditatis, excessus ejus efficiet ut corpora descendant in Solem: verbi gratiâ, si motus, cæteris paribus, fiat duplo tardior, Planeta parte quartâ vis circumsolaris prioris retinebitur in orbitâ suâ, & excessu cæterarum trium partium quartarum descendet in Solem. Proinde Planetæ, Saturnus, Jupiter, Mars, Venus, & Mercurius, non retardantur verè in Perigæis, neque fiunt verè stationarii, & lento motu retrogradi. Ista omnia sunt apparentia tantùm: & motus absoluti, quibus Planetæ perseverant in orbitis suis, sunt semper directi, & æquabiles quamproximè. Tales autem motus circa Solem peragi probavimus, & propterea Sol, ut centrum absolutorum motuum, quiescit: nam Terræ quies omninò deneganda est, ne Planetæ in Perigæis verè tardescant, & fiant verè stationarii lentéque retrogradi; & sic defectu motûs descendant in Solem. Porrò quoniam Planetæ, Venus, Mars, Jupiter, cæterique, radiis ad Solem ductis describunt orbes regulares, areasque temporibus, uti ostensum est, quoad sensum proportionales: consequens est (per Prop. III. & Corol. 3. Prop. LXV.) quòd Sol nullâ vi notabili urgetur, nisi quâ Planetæ omnes æqualiter, pro corporum quantitatibus, & secundum lineas parallelas, urgentur, adeoque systema totum transfertur in directum. Rejiciatur translatio illa systematis totius, & Sol propemodum quiescet in ipsius centro. Si Sol revolveretur circa Terram, & Planetas reliquos circum se deferret,

dierum 39, cum horis $17\frac{16}{100}$; stellam Jovis spatio annorum duorum cum diebus 35, horis $9\frac{12}{100}$; Tellurem denique nostram spatio dierum 64 cum horis $13\frac{44}{100}$.

deberet

deberet Terra Solem trahere vi magnâ; Planetas autem circumsolares vi nullâ sensibilem effectum habente (omninò contra Corol. 3. Prop. LXV.) Adde, quòd si Terra, ob gravitatem partium, in infimâ mundi regione à plerisque hactenus locata fuit: jam Sol potiori jure, ob vim suam centripetam mille vicibus & ampliùs gravitate terrestri majorem, in locum infimum detrudi debebit, centrumque systematis constitui. Vera autem systematis constitutio sic pleniùs & exactiùs intelligetur.

Planetarum omnium commune gravitatis centrum quiescere, & Solem tardissimè moveri. Definitur motus Solis.

28. Quoniam Fixæ quiescunt inter se, concipiamus Solem, Terram & Planetas, tanquam systema corporum utcunque moventium inter se, & omnium commune centrum gravitatis (per Legum Corollarium quartum) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum. Casu posteriore movebitur etiam systema totum uniformiter in directum. Dura est hæc hypothesis: eâ rejectâ, quiescet commune illud centrum gravitatis. Ab eodem centro Sol nunquam longè recedit. Incidit Solis & Jovis commune gravitatis centrum in superficiem Solis [f]. Si Planetæ omnes ad eandem Solis partem cum Jove locarentur, commune Solis & omnium centrum vix duplo longius à centro Solis recederet [g]. Igitur Sol, pro vario Planetarum situ diversimodè agitatus, & motu quodam libratorio lentè semper errans, nunquam integrâ sui diametro à centro quiescente Systematis totius recedit. Ex Solis autem & Planetarum ponderibus suprà inventis, & situ omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum: eoque dato, locus Solis ad tempus propositum.

Planetas nihilo minus revolvi in Ellipsibus umbilicos habentibus in Sole; & radiis ad Solem ductis areas describere temporibus proportionales.

29. Circa Solem, hoc modo libratum, revolvuntur cæteri Planetæ in Orbibus Ellipticis, & radiis ad Solem ductis describunt areas temporibus proportionales quamproximè, ut (in Prop. LXV.) expositum est. Si Sol quiesceret, & Planetæ cæteri non agerent in se invicem, forent Orbes Elliptici, & areæ temporibus proportionales exactè (per Prop. XI. & Corol. I. Prop. XIII.) Actiones Planetarum in se invicem, collatæ cum actionibus Solis in Planetas, nullius sunt momenti, neque adeò sensibiles errores inducunt: suntque errores illi minores in revolutionibus circa Solem more jam descripto agitatum, quàm in revolutionibus circa Solem quiescentem (per Prop. LXVI. & Corol. Prop. LXVIII.) præsertim si

[f] Vide Princip. Lib. 3. Not. cc.

[g] Ibid.

Orbis

Orbis cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis Planetarum omnium interiorum: nimirum umbilicus Orbis Mercurii in centro Solis, umbilicus Orbis Veneris in communi centro gravitatis Mercurii & Solis, umbilicus Orbis Telluris in communi centro gravitatis Veneris, Mercurii & Solis; & sic deinceps. Hoc pacto umbilici Orbium Planetarum omnium, præter Saturnum, non distabunt sensibiliter à centro Solis; neque umbilicus Orbis Saturni recedet sensibiliter à communi centro gravitatis Jovis & Solis. Proinde centrum Solis non malè statuitur ab Astronomis umbilicus communis Orbium cunctorum. In ipso Saturno error inde ortus non est major quàm 1′. 45″. Si Orbis iste, locando umbilicum in communi centro gravitatis Jovis & Solis, melius congruerit cum phænomenis, inde confirmabuntur hæc omnia quæ diximus.

De Orbium dimensionibus, deque motu Apheliorum & Nodorum.

30. Si Sol quiesceret, & Planetæ nil agerent in se invicem, quiescerent etiam eorum Aphelia & Nodi (per Prop. I. XI. & Cor. Prop. XIII.) & forent Orbium Ellipticorum axes majores ut latera cubica quadratorum temporum periodicorum (per Prop. XV.) adeoque ex datis temporibus periodicis darentur. Mensuranda sunt hæc tempora non à mobilibus æquinoctiorum punctis, sed à stellâ primâ arietis. Ex motu autem Solis augetur semiaxis quilibet, quasi tertiâ parte distantiæ centri Solis à communi centro gravitatis Solis & Planetæ (per Prop. LX.) & actionibus Planetarum exteriorum in interiores nonnihil augentur tempora periodica interiorum, at vix sensibiliter, & Aphelia moventur tardissimè in consequentia (per Corol. 6 & 7. Prop. LXVI.) Sic & actionibus Cometarum, si qui ultra Saturnum versentur, augebuntur periodica tempora Planetarum omnium; & maximè ea exteriorum: & Aphelia omnium movebuntur in consequentia. Progredientibus autem Apheliis, regredientur Nodi (per Corol. 11 & 13. Prop. LXVI.) & regressus eorum, si fortè quiescat planum Eclipticæ, erit (per Corol. 16. Prop. LXVI.) ad progressum Aphelii in Orbe unoquoque, ut regressus Nodorum Lunæ ad progressum Aphelii ipsius quamproximè; hoc est ut 10 ad 21 circiter. Confirmare autem videntur observationes astronomicæ Aphelia tardissimè progredi, & Nodos regredi, respectu Fixarum. Et inde versimile est, Cometas in regionibus ultra Planetas versari. Hi in Orbibus

valde

valde excentricis revoluti, transcurrunt velociter perihelia sua, &, motu in apheliis longè tardissimo, tempus ferè totum conterunt in regionibus supra Planetas, ut posthac fusiùs explicabitur.

Ex principiis allatis derivantur motus omnes Lunares hactenus ab Astronomis notati.

31. Planetas in hunc modum revolventes posse alios, ceu Satellites, aut Lunas, circum se deferre, constat (ex Propositione LXV.) Actione autem Solis fit, ut Luna nostra velociùs moveatur, & radio ad terram ducto describat aream pro tempore majorem, Orbemque habeat minùs curvum, atque adeò propius accedat ad Terram, in syzygiis quàm in quadraturis, nisi quatenus impedit motus excentricitatis. Namque excentricitas maxima est, ubi apogæum Lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde Luna in perigæo velocior est & nobis proprior, in apogæo autem tardior, & remotior in syzygiis quàm in quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili: & Apogæum quidem velociùs progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, &, excessu progressûs supra regressum, annuatim fertur in consequentia. Nodi autem quiescunt in syzygiis suis, & velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis quàm in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio Terræ quàm in ipsius aphelio. Plures inæqualitates in motu Lunari nondum ab Astronomis notantur. Hæ autem omnes consectantur ex principiis nostris (per Corol. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Prop. LXVI.) & in cœlis reverâ extare noscuntur. Id in *Horroxii* hypothesi illâ ingeniosissimâ, &, ni fallor, omnium accuratissimâ, quam *Flamstedius* ad cœlos aptavit, videre licet. Corrigendæ tamen sunt hypotheses Astronomicæ in motu Nodorum. Hi æquationem, seu prosthaphæresin, maximam admittunt in Octantibus suis, estque hæc inæqualitas maximè conspicua ubi Luna in Nodis, atque adeò in Octantibus, versatur. Inde Tycho, & post eum alii, rejecerunt hanc inæqualitatem in octantes Lunæ, eamque fecerunt menstruam. Docent autem rationes à nobis allatæ hanc ad octantes Nodorum referri debere, & annuam constitui.

Ut & alii nonnulli nondum observati motus inæquabiles.

32. Præter inæqualitates ab Astronomis notatas, extant aliæ nonnullæ, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Ve-

locitates

locitates enim, seu motus horarii, Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Estque Variatio præterea in ratione duplicatâ temporis inter quadraturas quamproximè (per Corol. 1 & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI.) Sunt & inæqualitates omnes in parte orbis Solem versus paulò majores quàm in parte oppositâ, sed differentiâ vix aut ne vix quidem sensibili.

Et distantia Lunæ à Terrâ ad tempus datum.

33. Per computationem quandam, quam brevitatis gratiâ non describo, invenio etiam, quòd area, quam Luna radio ad terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, sit quamproximè ut summa numeri $237\frac{3}{10}$, & sinûs versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius est unitas; atque adeò quòd quadratum distantiæ Lunæ à Terrâ sit ut summa illa divisa per motum horarium Lunæ (h). Hæc ita se habent, ubi Variatio in octantibus est magnitudinis mediocris: sin Variatio major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eâdem ratione. Tentent Astronomi, quàm probè distantiæ sic inventæ congruerint cum Lunæ diametris apparentibus.

Derivantur motus Satellitum Jovis & Saturni ex motibus Lunæ.

34. Ex motibus Lunæ nostræ, derivare licet motus Lunarum, seu Satellitum, Jovis & Saturni. Namque motus medius nodorum satellitis extimi Jovialis est ad motum medium nodorum Lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste $8^{gr}.\ 24'$ in antecedentia. Motus medii Nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis satellitis cujusque, in consequentia, est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Æquationes maximæ nodorum & augis satellitis cujusque sunt ad æquationes

(h) Vide Princip. Lib. 3. Prop. XXVI & XXVII.

maximas

maximas nodorum & augis Lunæ respectivè, ut motus nodorum & augis satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio satellitis, è Jove spectati, est ad variationem Lunæ, ut sunt motus toti nodorum temporibus periodicis satellitis & Lunæ ad invicem (per idem Corollarium) adeoque in satellite extimo non superat 5″. 12‴. Parvitate harum inæqualitatum, & tarditate motuum, fit, ut motus satellitum tam regulares reperiantur; utque Astronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut afferant tardissimè retrogradum.

Planetas respectu Fixarum æquabili motu circum axes suos revolvi; hunc motum ad æquationem temporis aptissimum esse.

35. Interea dum Planetæ in hunc modum circum centra longinqua in orbem redeunt, rotantur singuli circum axes proprios; Sol quidem diebus 26; Jupiter horis 9, minutis primis 56; Mars horis $24\frac{2}{3}$; Venus horis 23; idque in planis ad planum Eclipticæ non multùm inclinatis, & secundum ordinem signorum; ut ex maculis in eorum corporibus per vices in conspectum redeuntibus definiunt Astronomi. Similis est revolutio Terræ nostræ facta horis 24. Hos motus actionibus virium centripetarum non accelerari nec retardari constat (per Corol. 22. Prop. LXVI.) Sunt igitur præ cæteris omnibus æquabiles, atque adeo ad mensuram temporis aptissimi. Sed revolutiones ex reditu, non ad Solem, sed ad Stellam aliquam fixam definiendæ sunt æquabiles. Nam situ Planetarum ad Solem inæquabiliter variato, revolutiones eorum à Sole ad Solem redduntur inæquabiles.

Lunam pariter motu diurno circa axem suum revolvi, & inde librationem ipsius oriri.

36. Sic & Luna revolvitur circa axem proprium, motu maximè æquabili respectu Fixarum. Revolvitur autem tempore dierum 27, horarum 7. min. 43. id est mense sidereo; ita ut motus iste diurnus æqualis sit motui medio Lunæ in orbe suo. Proinde eadem Lunæ facies convertetur semper in centrum, circa quod motus iste medius peragitur; hoc est, in orbis lunaris umbilicum exteriorem quamproximè. Inde oritur deflexio faciei de Terrâ, nunc in Orientem quidem, nunc verò in Occidentem, pro situ umbilici quem respicit; estque deflexio illa æqualis prosthaphæresi orbis lunaris, seu differentiæ inter motum medium & verum. Hæc est libratio Lunæ in longitudinem. Est & libratio in latitudinem, orta ab inclinatione axis lunaris ad planum orbis in quo

Luna

Luna circa Terram revolvitur. Servat enim axis ille situm suum ad Fixas quamproximè, & inde poli nobis per vices in conspectum veniunt. Id intelligere licet ex motu Telluris, cujus poli, ob inclinationem axis ad planum Eclipticæ, per vices illustrantur à Sole. Situm axis ad Fixas, & sitûs hujus variationem exactè determinare, Problema est Astronomo dignum.

De præcessione æquinoctiorum, deque motu libratorio axis Telluris & Planetarum.

37. Ex Planetarum revolutionibus diurnis conatur materia recedere ab axibus hujus motûs; & inde partes liquidæ surgunt paulò altiùs juxta Æquatorem quàm juxta Polos, partesque solidas inundabunt nisi pariter surgentes. Ideò Planetæ paulò crassiores sunt juxta Æquatorem quàm juxta Polos, & eorum puncta æquinoctialia propterea regrediuntur; axesque motu oscillatorio bis in singulis revolutionibus nutant, & bis redeunt ad inclinationem priorem; ut in Corol. 18. Prop. LXVI. expositum est. Nam & Jupiter, prælongis tubis visus, non omnino rotundus cernitur, sed illius diameter Eclipticæ parallela paulo est oblongior, quàm quæ à Septentrione in Austrum ducitur.

Mare bis fluere debere & bis refluere singulis diebus, & æstum incidere in horam tertiam ab appulsu luminaris ad meridianum loci.

38. A Telluris etiam motu diurno & attractionibus Solis & Lunæ, mare nostrum singulis diebus, tam Lunaribus, quàm Solaribus, bis intumescere debet, & bis defluere (per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI.) & aquæ altitudo maxima præcedere horam sextam diei utriusque, & sequi duodecimam præcedentem. Tarditate motûs diurni retrahitur æstus ad horam duodecimam; & vi motûs reciprocationis protrahitur idem, & in horam sextæ propiorem differtur. Interea dum tempus per phænomena certiùs determinabitur, quidni, rationem mediocrem tenentes, conjiciamus æstum maximum in horam tertiam? Hoc pacto aqua toto tempore ascendet, quo vis Luminarium ad ipsam attollendam major est; descendetque, toto tempore quo minor est. Namque vis illa major est ab horâ nonâ ad horam tertiam, & minor à tertiâ ad nonam. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm supra: & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad Meridianum loci revolvitur.

Æstus maximos in syzygiis Luminarium ac Terræ, minimos

39. Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum

effectus,

in quadraturis fieri; idque horâ tertiâ ab appulsu Lunæ ad Meridianum loci: ast extra syzygias & quadraturas deviare aliquantulum ab horâ illâ tertiâ in horam tertiam ab appulsu solis.

effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam, ubi Luna deprimit; deprimetque, ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus, qui solâ vi lunari incidere semper deberet ad horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem; compositis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem, in transitu Lunæ à quadraturis ad syzygias.

Majores esse æstus ubi Luminaria sunt in perigæis.

40. Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantiis à Terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis majores sint, & in quadraturis minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in perigæo, singulis mensibus, majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. Unde fit, ut æstus duo omninò maximi in syzygiis continuis se mutuò non sequantur.

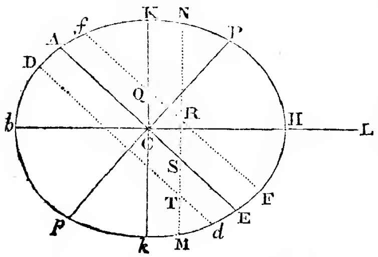
Majores esse æstus circa æquinoctia.

41. Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius declinatione, seu distantiâ ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensione & remissione, adeoque motûs reciprocationem nullam cieret. Igitur Luminaria, recedendo de æquatore polum versùs, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eò quòd Lunæ, jam in æquatore constitutæ, effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias, & minimi in quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque; & æstum maximum

maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit, ut æstus maximi & minimi sæpiùs præcedant Æquinoctium vernum, quàm sequantur; & sæpiùs sequantur autumnale, quàm præcedant.

Æstus extra Æquatorem vicibus alternis majores & minores fieri.

42. Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine.



Designet *ApEP* Tellurem, aquis profundis undique coopertam; C, centrum ejus; P, *p*, polos; AE, æquatorem; F, locum quemvis extra æquatorem; F*f*, parallelum loci; D*d*, parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris; L, locum quem Luna ante horas tres occupabat; H, locum Telluris ei perpendiculariter subjectum; *b*, locum huic oppositum; K, *k*, loca inde gradibus 90 distantia; CH, C*b*, Maris altitudines maximas mensuratas à centro Telluris; & CK, C*k*, altitudines minimas: & si axibus H*b*, K*k* describatur Ellipsis; deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem, H*b*, describatur Sphærois HPK*bpk*; designabit hæc figuram maris quamproximè; & erunt CF, C*f*, CD, C*d*, altitudines maris in locis F, *f*, D, *d*. Quinetiam si in præfatâ Ellipseos revolutione punctum quodvis, N, describat circulum NM, secantem parallelos F*f*, D*d* in locis quibusvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo Maris in locis omnibus R, S, T, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujusvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in Q, horâ tertiâ post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f*, horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in Q, horâ tertiâ post ortum Lunæ: & affluxus posterior, in *f*, erit minor quàm affluxus prior in F. Distinguitur enim mare totum in duos omninò fluxus ingentes & hemisphæricos; unum in hemisphærio KH*k*C, ad boream vergentem; alterum in Hemisphærio opposito K*bk*C; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet. Hi fluctus, semper sibi mutuò oppositi, veniunt per vices ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo

intervallo horarum Lunarium duodecim. Cúmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem. Æſtus autem major, declinante Lunâ in verticem loci, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum Lunæ ad Meridianum ſupra Horizontem, &, Lunâ declinationem mutante, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solſtitiorum; præſertim ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos, & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymutbum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum; obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Per motus impreſſi conſervationem minui differentiam æſtuum, & fieri quoque ut æſtus maximus menſtruus ſit tertius à Syzygiâ.

43. Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motûs impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minores. Unde fit, ut æſtus alterni ad *Plymutbum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ad invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii.

Motus maris impedimento alveorum retardari.

44. Fieri etiam poteſt, ut æſtus omnium maximus ſit quartus vel quintus à ſyzygiis, vel tardiùs adveniat; eò quòd retardantur motus marium in tranſitu per loca vadoſa ad littora. Sic enim æſtus accedit ad littus occidentale *Hiberniæ*, horâ tertiâ lunari; & poſt horam unam & alteram ad portus in littore auſtrali ejuſdem inſulæ; ut & ad *Inſulas Caſſiterides*, vulgo *Sorlings* dictas: dein ſucceſſivè ad *Falmutbum*, *Plymutbum*, *Portlandiam*, *Inſulam Vectam*, *Winchelſejam*, *Doveriam*, oſtium *Tameſis* & pontem *Londinenſem*, conſumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipſius alveis haud ſatis profundis impeditur æſtuum propagatio. Incidit enim æſtus ad *Inſulas Fortunatas*, & ad occidentalia marique *Atlantico* expoſita littora *Hiberniæ*, *Galliæ*, *Hiſpaniæ* & *Africæ* totius, uſque ad *Caput bonæ ſpei*, in horam tertiam lunarem; præterquàm in locis nonnullis vadoſis, ubi æſtus impeditus tardiùs

diùs advenit, inque *Freto Gaditano*, quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æſtuat. Pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras *Americæ*, accedit æſtus primò ad *Braſiliæ* littora maximè orientalia circa horam lunarem quartam vel quintam; deinde ad oſtium *Fluvii Amazonum* horâ ſextâ; ad inſulas verò adjacentes horâ quartâ; poſtea ad *Inſulas Bermudas* horâ ſeptimâ; & ad *Floridæ* portum *S. Auguſtini* horâ $7\frac{1}{2}$. Tardiùs igitur progreditur æſtus per Oceanum, quàm pro ratione motûs Lunæ. Et perneceſſaria eſt hæcce retardatio, ut mare eodem tempore deſcendat inter *Braſiliam* & *Novam Franciam*, aſcendatque ad *Inſulas Fortunatas* & litora *Europæ* & *Africæ*, & vice verſâ. Namque mare aſcendere nequit in uno loco, quin ſimul deſcendat in altero. Lege jam deſcriptâ agitari quoque *Mare Pacificum* veriſimile eſt. Namque æſtus altiſſimi in litore *Chilienſi* & *Peruviano* incidere dicuntur in horam tertiam lunarem; ſed quâ velocitate propagantur inde ad litus orientale *Japoniæ* & ad *Inſulas Philippinas*, cæteraſque regno *Sinarum* adjacentes, nondum reperi.

Ex alveorum & litorum impedimentis varia oriri phænomena: ut quòd mare non niſi ſemel intumeſcat diebus ſingulis.

45. Porrò fieri poteſt ut æſtus propagetur ab Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citiùs tranſeat per aliqua freta quàm per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtum dividi in duos æquales, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam vel tertiam, vel viceſimam ſeptimam, ab impulſu Lunæ ad Meridianum portûs. Si Luna in hocce ad Meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Sin Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet, ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio; & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantùm perveniet ad maximam altitudinem, & ſemel ad

ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad Meridianum, atque Lunâ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum habemus, in portu regni *Tunquini* ad *Batſham* in latitudine boreali 20^{gr}. 50′. Ibi aqua, die tranſitum Lunæ per æquatorem ſequente, ſtagnat; dein, Lunâ ad boream declinante, incipit fluere & refluere, non bis ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum: cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum; dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; &, Lunâ declinationem mutante, ceſſat, & mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ, & afflxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus de Oceano in hunc portum duplex patet: unus rectior & brevior inter *Inſulam Hainan* & litora *Quantungi*, Provinciæ *Sinarum*; alter per circuitum inter Inſulam eandem & litora *Cochini*. Per breviorem citiùs propagatur æſtus ad *Batſham*.

Phil. Tranſ. Num. 162.

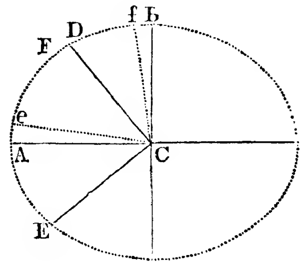
Tempora æſtuum intra fluviorum alveos eſſe magis inæqualia quàm in Oceano.

46. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum curſu. Nam curſus ille faciet aquam tardiùs influere ex mari, & in mare citiùs & velociùs refluere, atque adeò diutiùs refluere quàm influere; præſertim ſi longè in flumen aſcenditur, ubi minor eſt vis maris. Sic in fluvio *Anovæ*, ad tertium lapidem infra *Briſtoliam*, refert *Sturmius* aquam horis quinis influere, ſeptenis refluere: ſupra *Briſtoliam*, ut ad *Caneſham* vel *Bathoniam*, differentia proculdubio major eſt. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam prope Luminarium ſyzygias, vehementior maris motus, faciliùs ſuperando reſiſtentiam fluminum, faciet aquam citiùs ac diutiùs influere, adeoque minuet hanc differentiam. Interea verò dum Luna ad ſyzygias properat, neceſſe eſt ut flumina, ob curſus ſuos per magnitudinem æſtuum impeditos, magis impleantur, & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè poſt Syzygias, quàm proximè antea. Eâ de cauſâ æſtus omnium tardiſſimi non incident in ipſas ſyzygias, ſed paulò præcedent. Dixi æſtus etiam ante ſyzygias retardari vi Solis. Conjungatur cauſa utraque, & æſtuum

æſtuum retardatio et major erit, & ſyzygias magis præcedet. Quæ omnia ita ſe habere colligo ex Tabulis æſtuum, quas *Flamſtedius* ex obſervationibus quàm plurimis conſtruxit.

Æſtus à mari majore & profundiore majores oriri, & majores eſſe ad littora Continentium quàm in medio mari ad inſulas, atque adhuc majores in ſinubus vadoſis, ore lato in Oceanum patentibus.

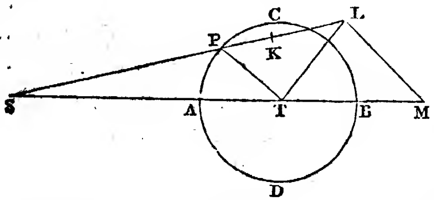
47. Legibus hactenus deſcriptis reguntur æſtuum tempora. Magnitudo pendet à magnitudine marium. Deſignet C centrum Terræ; EADB, ovalem maris figuram; CA, ovalis hujus ſemiaxem majorem; CB, ſemiaxem minorem priori inſiſtentem ad angulum rectum; D, punctum medium inter A & B; & ECF, vel *ecf*, angulum ad centrum Terræ, quem maris, litoribus E, F vel *e*, *f* terminati, latitudo ſubtendit. Verſetur autem punctum A in medio inter puncta E, F, & punctum D in medio inter puncta *e*, *f*; & ſi per differentiam altitudinum CA, CB exponatur quantitas æſtûs in mari profundiſſimo, Terram totam cingente, deſignabit exceſſus altitudinis CA ſuper altitudinem CE vel CF, quantitatem æſtûs in medio maris EF, litoribus E, F terminati; & exceſſus altitudinis C*e* ſuper altitudinem C*f*, quantitatem æſtûs ad litora ejuſdem maris quamproximè. Unde liquet æſtus in medio mari longè minores eſſe quàm ad litora, & æſtus ad litora eſſe propemodum ut maris latitudo EF, arcu quadrantali non major. Et hinc eſt quòd prope æquatorem, ubi mare inter *Africam* & *Americam* anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quàm hinc inde in Zonis Temperatis, ubi maria latè patent, inque *Maris Pacifici* litoribus ferè cunctis, tam *Americanis* quàm *Sinicis*, & inter Tropicos & extra; quódque ad Inſulas medio in mari ſitas vix aſſurgant ultra pedes duos vel tres; in litoribus autem magnarum Continentium ſint triplo vel quadruplo majores, & ultrà: præſertim ſi motus de Oceano patente venientes gradatim contrahantur in ſpatium anguſtum, & aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur: ut ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Angliâ*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgò *Auranches* dictam) in *Normanniâ*; ad *Cambajam* & *Pegu* in *Indiâ orientali*. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat



inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus accedendi vel recedendi priùs frangi poteſt, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes, 40, vel 50, & ampliùs. Sic & freta oblonga, vadoſa, & oſtiis reliquo alveo amplioribus & profundioribus in Oceanum patentia, cujus generis ſunt *Britannicum*, & *Magellanicum* ad introitum orientalem, magis fluent & refluent, curſumve intendent & remittent; eâque de cauſâ altiùs aſcendent ac deprimentur. Ad littora *Americæ auſtralis*, *Mare Pacificum* non rarò in refluxu ſuo remeare dicitur ad milliaria duo, & fugere viſum in litore ſtantis. Unde & ibi æſtus fiunt ſolito altiores. In aquis autem profundioribus ſemper minor eſt fluendi & refluendi velocitas, & propterea minor quoque aſcenſus ac deſcenſus. Nec Oceanus talibus in locis ad pedes pluſquam ſex, octo vel decem, aſcendere noſcitur. Aſcenſus verò quantitatem ſic computo.

Ex Principiis allatis computatur vis Solis ad perturbandos motus Lunæ.

48. Deſignet S Solem; T, Terram; P, Lunam; PADB, orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST, & SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM; & ſi vis mediocris circumſolaris agens in Terram exponatur per diſtantiam ST, vel SK; erit SL vis circumſolaris agens in Lunam.



Ea componitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipſius SM pars TM, perturbat motum Lunæ (ut in Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt). Quatenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur, urgebitur Terra viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas, TM & ML, deſignare. Vis ML, in mediocri ſuâ quantitate, eſt ad vim, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam PT revolvi poſſet, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI.) hoc eſt in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, min. 43, ad dies 365, hor. 6, min. 9, id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Vis, quâ Luna in orbe ſuo circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$, revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ eodem

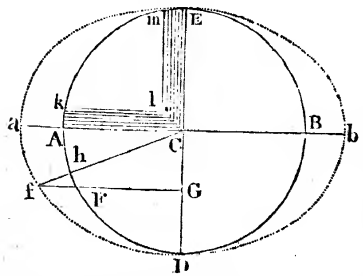
eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60. Ideoque vis mediocris ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Unde datur etiam vis TM, ex proportione linearum TM, ML. Hæ ſunt vires Solis, quibus motus Lunæ perturbatur.

Computatur vis Solis ad mare movendum.

49. Si deſcendatur de orbe Lunæ ad ſuperficiem Terræ, minuentur hæ vires in ratione diſtantiarum $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis ML jam fiet 38604600 vicibus minor quàm vis gravitatis. Hæc vis, Terram undique æqualiter urgendo, vix aut ne vix quidem mutabit motum marium, adeoque in explicatione motûs illius negligi poſſit. Vis altera TM, in locis in quorum Zenith vel Nadir Sol conſtituitur, eſt triplo major quàm vis ML, adeoque 12868200 vicibus minor quàm vis gravitatis.

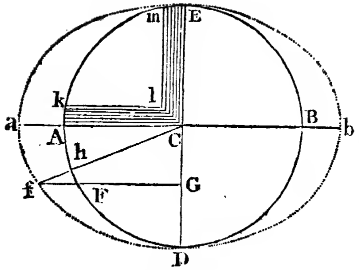
Computatur altitudo æſtûs ſub æquatore ex vi Solis orienda.

50. Deſignet jam ADBE Telluris ſuperficiem ſphæricam; *a*D*b*E, aquam ſupernatantem; C, centrum utriuſque; A, locum cui Sol perpendiculariter imminet; B, locum oppoſitum; D, E, loca inde gradibus nonaginta diſtantia; ACE *mlk*, canalem cylindricum rectangulum tranſeuntem per centrum Terræ.



Vis ML, in loco quolibet, eſt ut diſtantia loci à plano DE, cui recta AC perpendicularis eſt; adeoque in canalis parte EC*lm*, nulla eſt; in parte alterâ AC*lk*, eſt ut gravitas in ſingulis altitudinibus. Nam gravitas in deſcenſu ad centrum Terræ eſt ubique ut altitudo (per Prop. LXXIII.) Igitur vis ML, urgendo aquam ſurſum minuet gravitatem ejus in canalis crure AC*lk* in datâ ratione. Et propterea aqua in hoc crure aſcendet, ut defectus gravitatis compenſetur majore altitudine; neque priùs ſtabit in æquilibrio, quàm gravitas totius æquetur gravitati totius in canalis crure C*lm*E. Quoniam gravitas particulæ cujuſque eſt ut diſtantia ipſius à centro Terræ, creſcet pondus aquæ totius in crure canalis in duplicatâ ratione altitudinis; adeoque altitudo aquæ in crure AC*lk* fiet ad altitudinem aquæ in crure C*lm*E, in dimidiatâ ratione numeri 12868201 ad 12868200; ſive in ratione numeri 25623053 ad

numerum



numerum 25623052; & altitudo in crure alterutro, EC*lm*, ad differentium altitudinum ut 25623052 ad 1. Eſt autem altitudo illa in crure EC*lm* pedum *Pariſienſium* 19615800, ut à *Gallis* nuper definitum eſt: & inde per analogiam illam prodit differentia altitudinum $9\frac{1}{5}$ digitorum hujus pedis. Igitur vi Solis major erit altitudo maris ad A quàm ad E digitis circiter novem ([1]). Et quamvis aqua in canali ACE*mlk* congeletur, & rigeat; manebunt tamen altitudines aquarum, Terræ ſupernatantium, ad A & E, locaque omnia intermedia.

Computatur altitudo æſtûs ſub parallelis ex vi ſolis oriunda.

51. Deſignet A*a* exceſſum illum altitudinis digitorum novem ad *a*; & *bf*, exceſſum altitudinis in alio quovis loco *b*; & ad DC, demittatur normalis *f*G, occurrens ſphæræ in F. Ob ingentem Solis diſtantiam, quâ fit ut lineæ omnes ad Solem tendentes pro parallelis haberi poſſint, eſt vis TM in loco quovis *b* vel *f*, ad vim illam in loco A, ut ſinus FG ad radium AC; adeoque cùm vires illæ tendant ſecundum lineas parallelas in Solem, generabunt hæ parallelas altitudines F*f*, A*a*, in eâdem ratione. Et propterea figura aquæ D*fa*E*b* ſphærois erit, facta per revolutionem Ellipſeos circa majorem axem *ab*. Eſt inſuper altitudo perpendicularis *fb* ad altitudinem obliquam *f*F, ut *f*G ad *f*C, ſeu FG ad AC; & propterea altitudo *fb* eſt ad altitudinem A*a* in duplicatâ ratione FG ad AC; id eſt, in ratione quam habet ſinus verſus anguli DC*f* duplicati ad duplicatum radium, & inde datur. Et hinc Sole circa Terram apparenter revolvente, innoteſcit ratio intumeſcentiæ ac detumeſcentiæ ſingulis momentis in loco quolibet ſub Æquatore. Innoteſcit etiam decrementum æſtûs maris tàm ex latitudine locorum quàm ex declinatione Solis oriundum. Nimirum quòd ex latitudine locorum, aſcenſus & deſcenſus maris in locis ſingulis diminuitur in ratione duplicatâ ſinûs complementi latitudinis; quódque ex declinatione Solis, aſcenſus & deſcenſus ille ſub Æquatore diminuitur in ratione duplicatâ ſinûs complementi declinationis: ſed & extra æquatorem ſemiſumma aſcenſûs matutini

([1]) Princip. Lib. 3. Prop. XXXVI.

&

& aſcenſûs veſpertini, id eſt aſcenſus mediocris, diminuitur in eâdem ratione quamproximè.

Ratio æſtuum ſub æquatore in ſyzygiis & quadraturis ex vi Solis & Lunæ conjunctim.

52. Deſignent S & L vires Solis & Lunæ in Æquatore verſantium, & mediocriter diſtantium à Terrâ; R, radium; T & U, ſinus verſos duplicatorum complementorum declinationis Solis & Lunæ ad tempus datum; D & E, mediocres diametros apparentes Solis & Lunæ; F ac G, earum diametros apparentes ad tempus illud datum; & erunt vires, ad æſtus ſub æquatore ciendos, in ſyzygiis quidem $\frac{VG^3}{2RE^3}L + \frac{TF^3}{2RD^3}S$; in quadraturis autem, $\frac{VG^3}{2RE^3}L - \frac{TF^3}{2RD^3}S$. Si eadem æſtuum ratio obſervetur etiam ſub parallelis, habebimus ex obſervationibus, in boreali noſtrâ regione exactè factis, proportionem inter vires L & S. Et tum demum per hanc regulam prædicere licebit quantitates æſtuum ad ſingulas ſyzygias & quadraturas.

Computatur vis Lunæ ad æſtus ciendos & altitudo aquæ inde oriunda.

53. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali, totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt quaſi pedum 45; in quadraturis autem pedum tantùm 25. Luminarium diametros apparentes, quæ hîc non definiuntur, aſſumamus eſſe mediocres; ut & Lunæ declinationem in quadraturis æquinoctialibus mediocrem eſſe, ſeu graduum $23\frac{1}{2}$; & ſinus verſus duplicati complementi erit 1682 poſito radio 1000. Solis autem in æquinoctiis, & Lunæ in ſyzygiis, declinatio nulla eſt; & ſinus verſus duplicati complementi 2000. Inde fit vis in ſyzygiis L+S, in quadraturis $\frac{1682}{2000}L - S$, æſtuum altitudinibus 45 pedum & 25 pedum, ſeu 9 paſſuum & 5 paſſuum, proportionalis. Et ductis extremis & mediis in ſe, fit $5L + 5S = \frac{15138}{2000}L - 9S$, ſeu $L = \frac{28000}{5138}S = 5\frac{5}{11}S$. Porro tempore æſtivo aſcenſum maris in ſyzygiis eſſe ad aſcenſum in quadraturis ferè ut 5 ad 4 memini me audiſſe. In ipſis ſolſtitiis veriſimile proportionem paulo minorem eſſe, puta 6 ad 5. Inde verò conſectatur eſſe $L = 5\frac{1}{6}S$. Donec aliquid certius ex obſervationibus conſtiterit, aſſumamus $L = 5\frac{1}{3}S$; & cùm æſtus ſint ut vires, vis autem Solaris cieat æſtum altum novem digitos, vis Lunaris ciebit æſtum altum pedes quatuor. Demus altitudinem illam, per vim reciprocationis aquarum, quâ motus ſemel impreſſus aliquamdiu conſervatur, duplicari, vel fortè triplicari;

triplicari; & generabitur æſtuum quantitas illa omnis, quæ in Oceanis reverâ conſpicitur.

Has vires Solis & Lunæ vix aliter quàm per æſtus Maris ſentiri poſſe.

54. Sufficiunt igitur hæ vires commovendo Mari: aſt alios tamen effectus ſenſibiles in hâc Terrâ, quantum animadverto, producent nullos. Nam cùm granum unum in pondere granorum 4000, ope libræ exactiſſimæ, ſentiri vix poſſit, vis autem ſolaris ad ciendos æſtus ſit 12868200 vicibus minor vi gravitatis; & ſumma virium Solis & Lunæ, major exiſtens in ratione $6\frac{1}{3}$ ad 1, ſit 2032890 vicibus minor vi eâdem gravitatis: perſpicuum eſt, quòd conjunctæ illæ vires ſint vicibus quingentis minores, quàm quæ pondus corporis cujuſvis, in librâ appenſi, ſenſibiliter augere vel minuere poſſint; & propterea corpus nullum appenſum movebunt ſenſibiliter. Unde nec in experimentis Pendulorum, Barometrorum, Inſidentium Aquæ ſtagnanti, & Staticis ſimilibus, ſenſibiles edent effectus. Atmoſphæra quidem his viribus fluet & refluet ad modum maris, ſed motu tam exiguo ut exinde ventus nullus ſenſibilis oriatur (m).

Corpus Lunare eſſe quaſi ſextuplo denſius quàm Solare.

55. Si Lunæ & Solis tam effectus in æſtibus ciendis, quàm diametri apparentes, æquarentur inter ſe; forent horum vires abſolutæ ut magnitudines (per Corol. 14. Prop. LXVI.) At lunaris effectus eſt ad effectum Solis, ut $5\frac{1}{3}$ ad 1 circiter: & diameter minor, in ratione $31\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{5}$, ſeu 45 ad 46. Augenda eſt autem vis Lunæ in ratione effectûs directè, inque ratione triplicatâ diametri inverſè: eoque pacto fiet vis Lunæ, collata cum ipſius magnitudine, ad vim Solis collatam cum hujus magnitudine, ut $5\frac{1}{3}$ ad 1 ſemel, & 45 ad 46 ter; id eſt ut $5\frac{7}{10}$ ad 1 circiter. Habet igitur Luna vim abſolutam centripetam majorem in ratione $5\frac{7}{10}$ ad 1 pro magnitudine corporis ſui, quàm Sol pro magnitudine ſui; adeoque denſior eſt in eâdem ratione.

Lunam denſiorem eſſe Terrâ noſtrâ in ratione 3 ad 2 circiter.

56. Tempore $27^{d}. 7^{h}. 43'$, quo Luna revolvitur circa Terram, revolvi poſſet Planeta circa Solem ad diſtantiam 18,954 diametrorum Solis ab ipſius centro, poſito quòd Solis diameter mediocris apparens ſit $32'\frac{1}{5}$. Hoc tempore revolvi poſſet Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam 30 diametrorum terreſtrium. Si idem eſſet numerus diametrorum in utroque caſu, foret vis abſoluta circumterreſtris ad vim abſolutam circumſolarem, ut mag-

(m) Delirant igitur, qui cœli mutationes ex vi Lunæ arceſſunt.

nitudo

nitudo Terræ ad magnitudinem Solis (per Corol. 2. Prop. LXXII.) Quoniam plures ſunt diametri terreſtres in ratione 30 ad 18,954, minus erit corpus Telluris in ratione illâ triplicatâ, hoc eſt in ratione $3\frac{28}{29}$ ad 1. Eſt igitur vis Telluris, pro magnitudine corporis ſui, ad vim Solis, pro magnitudine ſui, ut $3\frac{28}{29}$ ad 1; atque adeo denſitas Terræ ad denſitatem Solis in eâdem ratione. Cùm igitur denſitas Lunæ ſit ad denſitatem Solis ut $5\frac{7}{10}$ ad 1, erit denſitas Lunæ ad denſitatem Terræ ut $5\frac{7}{10}$ ad $3\frac{28}{29}$, ſeu 23 ad 16. Unde cùm magnitudo Lunæ ſit ad magnitudinem Terræ ut 1 ad $41\frac{1}{2}$ circiter, erit vis abſoluta centripeta Lunæ ad vim abſolutam centripetam Terræ, ut 1 ad 29 circiter; nec non quantitas materiæ in Lunâ ad quantitatem materiæ in Terrâ, in eâdem ratione. Hinc datur commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ exactiùs quàm antè: quo cognito, licebit jam diſtantiam Lunæ à Terrâ magis accuratè colligere. Sed malim expectare donec proportio corporum Lunæ ac Terræ ad invicem ex phænomenis æſtûs marini determinetur exactiùs: ſperans etiam interea confore, ut ambitus Terræ ex majoribus ſtationum intervallis menſuretur, quàm hactenus à quoquam factum fuit.

De Fixarum diſtantiâ.

57. Hactenus expoſui Syſtema Planetarum. Stellas autem fixas immenſis intervallis ab hoc ſyſtemate diſtare, colligitur ex defectu parallaxeos annuæ. Hanc minuto primo minorem eſſe certiſſimum eſt, & propterea diſtantias Fixarum ſuperare diſtantiam Saturni à Sole, vicibus pluſquam 360. Qui Terram Planetis, & Solem Fixis annumerant, longiùs amovebunt Fixas argumentis ſequentibus. Ex Telluris motu annuo oriri debet tranſlatio Fixarum inter ſe, parallaxi duplicatæ propemodum æqualis. At Stellæ majores & propiores, reſpectu ulteriorum, quæ per Teleſcopia ſolummodo viſuntur, nondum moveri notantur. Demus motum eorum minorem eſſe minutis viginti ſecundis, & diſtantia Fixarum proximarum ſuperabit mediocrem diſtantiam Saturni vicibus 2000. Rurſus Saturnus diſco ſuo 17″, vel 18″, lato excipit $\frac{1}{2100000000}$ partem circiter lucis Solaris. Namque tanto minor eſt diſcus ille ſuperficie totâ ſphæricâ orbis Saturnii. Si Saturnus reflectere ſupponatur quaſi partem quartam hujus lucis,

lux

lux tota quæ ab ejus hemiſphærio lucido reflectitur, erit quaſi $\frac{1}{4200000000}$ pars lucis totius manantis ab hemiſphærio Solis. Ergo cùm lux rareſcat in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis lucentis, ſi Sol magis diſtaret quàm Saturnus vicibus $10000 \times \sqrt{42}$, hic appareret æquè lucidus ac jam Saturnus apparet, abſque annulo ſuo; atque adeò paulo lucidior foret quàm Stella fixa primæ magnitudinis. Ponamus igitur diſtantiam, quâ Sol luceret ut Fixa, majorem eſſe quàm diſtantia Saturni quaſi vicibus 100000, & ipſius diameter apparens erit $7'''''$. $16''''''$. parallaxis autem à Terræ motu annuo orta $13''''$. Atque tanta erit diſtantia, diameter apparens, & parallaxis Fixarum magnitudinis primæ, Soli noſtro, quoad magnitudinem & lucem, æqualium. Fingere quidem licet partem bene magnam lucis Fixarum, in tranſitu ſuo per tanta ſpatia, ſiſti & interire, adeoque Fixas propiùs admoveri debere: verùm hâc ratione Fixæ ulteriores vix conſpici poſſent. Demus verbi gratiâ tres quartas lucis partes interire in tranſitu à Fixis proximis ad nos, & partes tres quartæ bis interibunt in tranſitu per duplum ſpatium, ter in tranſitu per triplum, & ſic deinceps; adeoque Fixæ quæ ſunt duplo remotiores erunt ſexdecim vicibus obſcuriores; nimirum quadruplo obſcuriores ob diminutam diametrum apparentem, atque rurſus quadruplo obſcuriores ob amiſſam lucem; & eodem argumento Fixæ triplo remotiores erunt $9 \times 4 \times 4$, ſeu 144, vicibus obſcuriores; & Fixæ quadruplo remotiores erunt $16 \times 4 \times 4 \times 4$, ſeu 1024, vicibus obſcuriores. Tanta autem lucis diminutio cum phænomenis, & hypotheſi quòd Fixarum diverſæ ſunt diſtantiæ, neutiquam conſiſtit.

Cometas, quoties in conſpectum veniunt, eſſe Jove propiores, probatur ex parallaxi in longitudinem.

58. Tantis igitur intervallis ab invicem diſtantia ſidera nec trahent ſe mutuò ſenſibiliter, nec à Sole noſtro trahentur. At Cometas vi circumſolari obnoxios eſſe neceſſe eſt: etenim ut defectus parallaxeos diurnæ extulit eos regionibus ſublunaribus, ſic ex parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes, ſub exitu apparitionis, aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores, ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum, ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi Terra

Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ſitu. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometâ & celeriùs fertur, Cometa fit retrogradus; ſi tardiùs, fit ſaltem tardior; & Terra pergente ad contrarias partes, celerior. Et colligendo differentias inter motus celeriores & tardiores, atque ſummas motuum celeriorum & retrogradorum, eaſque cum ſitu & motu Terræ, ex quibus oriuntur, conferendo; prodiit mihi, ex hâc parallaxi, diſtantia Cometarum, quo tempore nudis oculis videri deſinunt, minor ſemper quàm diſtantia Saturni, & ut plurimum minor quàm diſtantia Jovis.

Probatur ex parallaxi in latitudinem.

59. Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis, quamdiu moventur celeriùs; at in fine curſûs, ubi motus apparens à parallaxi oriundus majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas meo computo collocavit diſparentes Cometas ſatis longè infra Jovem. Unde conſequens eſt, quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendant ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Probatur aliter ex parallaxi.

60. Confirmatur præterea tanta propinquitas ex parallaxi orbis annui, quatenus ea præterpropter colligitur per hypotheſin, quòd Cometæ moventur uniformiter in lineis rectis. Nota jam eſt methodus (à *Keplero* tentata, à *Walliſio* & *Wrennio* perfecta) colligendi diſtantiam Cometæ juxta hanc hypotheſin ex quatuor obſervationibus: & Cometæ ad hanc regularitatem reducti tranſire ſolent per medium regionis Planetarum. Ut Cometæ annorum 1607 & 1618 inter Solem & Terram, definiente *Keplero*; ille anni 1664, infra orbem Martis; & iſte anni 1680, infra orbem Mercurii; definientibus *Wrennio* & aliis. Per ſimilem hypotheſin rectilineam, *Hevelius* Cometas omnes, quorum obſervationes extant, locavit infra orbem Jovis. Errant igitur, & abſque calculo Aſtronomico loquuntur, qui, ex regulari motu Cometarum, vel ablegant eos in regiones Fixarum, vel motum Telluri denegant; cùm non poſſint eorum motus ad omnimodam regularitatem ſatis reduci, niſi ex admiſſo tranſitu per regiones Telluri

Telluri moventi vicinas. Et hæc ſunt argumenta ex parallaxi, quatenus ea abſque exactâ cognitione orbium & motuum Cometarum determinari poſſit.

Ex luce capitum probatur Cometas deſcendere ad orbem Saturni.

61. Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à Sole illuſtrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ; in duplicatâ ratione ob auctam diſtantiam à Sole, & in alia duplicatâ ratione ob diminutam apparentem diametrum. Inde intelligitur, quòd Saturnus ob duplam diſtantiam & dimidiam ferè diametrum apparentem, apparere debet quaſi 16 vicibus obſcurior quàm Jupiter; & quòd, ſi diſtantia ejus eſſet quadruplo major, foret lux ejus 256 vicibus minor, adeoque nudis oculis cerni vix poſſet. Cometæ autem non rarò æquant Saturnum luce ſuâ, nec tamen ſuperant ipſum diametris apparentibus. Cometa anni 1678, juxta obſervationem *Hookii*, æquabat luce ſuâ Fixas primæ magnitudinis; & caput ejus, ſeu Stella in medio comæ, per teleſcopium pedum quindecim viſum, apparebat æquè lucidum ac Saturnus propè Horizontem; diameter verò capitis erat ſolummodo 25″, id eſt eâdem ferè cum diametro circuli æquantis Saturnum cum annulo. Coma capiti circumfuſa erat quaſi decuplo latior, nimirum $4\frac{1}{6}$ min. Rurſus Cometæ anni 1682 minima capillitii diameter, per tubum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem, ſeu Stella in medio, vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantùm 11″ vel 12″. Luce verò & claritate capitis ſuperabat Cometam anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Adde quòd Cometa anni 1665, menſe *Aprili*, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſuâ pene Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′; at nucleus cum Planetis, ope Tubi optici, collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Adde annulum, & Saturni facies jam dupla erit; lux verò haud intenſior quàm Cometæ; proindeque Cometa propior erat Soli quàm Saturnus. Ex proportione nuclei ad capillitium,

his obſervationibus patefactâ, & latitudine, quæ rarò ſuperat 8′ vel 12′, patet ſtellas Cometarum, ut plurimum, ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis; lucem verò interea cum luce Saturni non rarò conferri poſſe, eamque aliquando ſuperare. Et inde diſtantias eorum in periheliis vix eſſe majores quàm Saturni. In diſtantiâ duplo majore lux foret quadruplo minor, & fuſco pallore tantum cederet luci Saturni, quantum lux hujus cedit ſplendori Jovis: quæ differentia facilè notari poſſet. In diſtantiâ verò decuplo majore, corpora eorum ſuperarent corpus Solis, lux autem cederet luci Saturni vicibus centum. Inque diſtantiis majoribus corpora longe ſuperarent Solem, at in tenebris profundis conſtituta non amplius cernerentur. Tantùm abeſt ut, Sole noſtro in Fixis numerato, Cometæ ad medias regiones inter Solem & Fixas amoveantur. Ibi certè non multo magis illuſtrari deberent à Sole, quàm nos illuſtramur à maximâ Fixarum.

Ut & longè infra orbem Jovis, & quandoque infra orbem Terræ.

62. Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propiùs ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copiâ lucis, à ſe reflexæ, Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit, Cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, ut ex parallaxi probavimus. Idem verò quàm maximè confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu, minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus, à capite ſemper ortus, per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. Poſteriore, referenda eſt lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Quòd ſi imagineris lucem hanc omnem congregari, & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multò propior. Sic Cometa anni 1679, *Decembris* 12 & 15 ſtylo veteri, quo tempore caudam clariſſimam emittebat, & luci multorum Jovium, per tantum ſpatium diffuſæ, ac dilatatæ, non imparem; magnitudine nuclei (ut obſervabat *Flamſtedius*) cedebat Jovi, adeoque erat Soli longè vicinior. Quinimo

mo minor erat Mercurio: nam die 17 menfis hujus, ubi Terræ propior erat, apparuit *Caffino* per telefcopium pedum 35, paulo minor globo Saturni. Die octavo menfis hujus, tempore matutino, vidit *Hallejus* caudam perbrevem & latam, & quafi ex corpore Solis jamjam orituri exeuntem, ad inftar nubis infolito more fulgentis, nec prius difparentem quàm Sol ipfe inciperet fupra horizontem confpici. Superabat igitur hic fplendor lucem nubium ufque ad ortum Solis; &, immediato Solis fplendori folùm cedendo vincebat longè lucem omnium ftellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipfa Luna, in tantâ Solis orientis vicinitate, cerni folet. Fingas lucem hancce dilatatam congregari, & in orbem nuclei Cometici, Mercurio minorem, coarctari: & fplendore longè fortiori jam reddita magis confpicua, Mercurium longè fuperabit, adeoque erit Soli vicinior. Diebus 12 & 15 ejufdem menfis, cauda hæc, per fpatium longè majus diffufa, apparuit rarior; at luce tamen adeo forti, ut, ftellis fixis vixdum apparentibus, cerneretur; & mox trabis mirum in modum fulgentis fpeciem exhibuit. Ex longitudine quadraginta vel quinquaginta graduum & latitudine duorum quantitatem lucis totius computes.

Idem probatur ex infigni fplendore caudarum in viciniâ Solis.

63. Confirmatur verò tantus Cometarum ad Solem acceffus, ex fitu eorum ubi maximè fulgent. Nam capite per Solem tranfeunte, & fub radiis Solaribus adhuc latente, narrantur caudæ omnium fulgentiffimæ de horizonte ad modum trabium ignearum exiiffe; dein, capite in confpectum veniente & longiùs à Sole recedente, fplendorem femper minui, & in pallorem viæ lacteæ fimilem, fed imprimis multò magis confpicuam, poftea verò languefcentem abire. Talis erat ardentiffimus ille Cometa ab *Ariftotele* defcriptus *lib.* 1. *Meter.* 6. cujus caput primo die non confpectum eft, eo quòd ante Solem vel faltem fub radiis Solaribus occidiffet; fequente verò die, quantum potuit vifum eft. *Nam quàm minimâ fieri poteft diftantiâ, Solem reliquit, & mox occubuit.* Ob nimium ardorem, caudæ fcilicet, nondum apparebat capitis fparfus ignis, fed *procedente tempore* (ait *Ariftoteles*) *cùm* cauda *jam minus flagraret, reddita eft* capiti *Cometæ fua facies. Et fplendorem fuum ad tertiam ufque cæli partem,* id eft ad 60^{gr}. *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & afcendens ufque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Ejufdem generis Cometas duos *Juftinus lib.*

37

37 defcribit, quos ait ita luxiffe, *ut Cælum omne conflagrare videretur, & magnitudine fui quartam Cæli partem occupâffe, & fulgore fui Solis nitorem viciffe.* Quibus ultimis verbis juxtapofitio ardoris Cometici & Solis orientis vel occidentis infinuatur. Accedit Cometa anni 1101, vel 1106, cujus ftella erat parva & obfcura, ut ille anni 1680; *fed fplendor, qui ex eâ exivit, valde clarus, & quafi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat,* ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenfi Monacho:* apparuit initio menfis *Feb.* circa vefperum ad occafum Solis brumalem. Inde & ex fitu caudæ, colligitur caput fuiffe Soli vicinum. *A Sole,* inquit *Matthæus Parifienfis, diftabat quafi cubito uno, ab horâ tertiâ,* rectius fextâ, *ufque ad horam nonam radium ex fe longum emittens.* Cometa anni 1264, menfe *Julio*, aut circa Solftitium, præcedebat Solem orientem, magnâ luce ufque ad medium Cœli verfus occidentem radios fuos emittens. Et initio paulum afcendebat fupra horizontem; fed, progrediente Sole, difcedebat indies ab horizonte, donec tandem ipfum Cœli medium præteriret. Dicitur autem fuiffe principio magnus & clarus, comam habens latam, quæ de die in diem cœpit deficere. Defcribitur autem in *Append. Matth. Paris, Hift. Angl.* in hunc modum. *A. C.* 1265 *apparuit Cometa tam notabilis, ut nullus tunc vivens viderit talem priùs. Ab oriente enim cum magno fulgore furgens, ufque ad medium Hemifphærii verfus occidentem omnia perlucidè pertrahebat.* Anno 1401, vel 1402, Sole infra horizontem demerfo, apparuit in occidente *Cometa lucidus ac clarus, comam erectam explicans ignis flammantis fpecie, non fecus ac haftam ab occafu in ortum radios jaculans; à Sole, infra horizontem demerfo, propriis radiis effufis omnes orbis Terræ terminos coluftrabat; nec aliis ftellis lumen exferere concedebat, aut aerem noctis umbrâ infufcari: quòd ejus lumen aliorum fplendorem vinceret, & ad Cœli verticem flammans protenderetur quamdiu fupra horizontem extabat, &c. Hift. Byzant. Ducæ Michaelis Nepotis, cap.* 16. Ex fitu caudæ, & tempore hujus primæ apparitionis, colligitur caput tunc fuiffe vicinum Soli, & indies à Sole receffiffe: nam Cometa ille tres menfes perduravit. Anno 1527, *Aug.* 11, circa horam quartam matutinam vifus eft per totam ferè *Europam* Cometa terrificus in *Leone*, duravitque per horam unam & quadrantem quotidiè flagrans. A fubfolano ortus eft verfufque

4

verſuſque meridiem, & occidentem aſcendit longitudine immenſâ; ſub ſeptentrione autem maximè conſpicuus fuit, & nube (id eſt caudâ) terribiiis deſcribitur, ex mente plebis formam habens brachii incurvati cum gladio ingentis magnitudinis. Anno 1618, diebus extremis *Novembris*, increbuit rumor apparere ſub ortum Solis trabem candidam, quæ fuit nimirum cauda Cometæ, capite adhuc intra radiorum claritatem deliteſcente. *Novemb.* 24. & deinceps viſus eſt Cometa clarâ luce, capite & caudâ clariſſimis. Longitudo caudæ, quæ primùm graduum erat 20, vel 30, crevit uſque ad *Decemb.* 9, quando evaſerat graduum 75, at luce dilutiore ſemper & rariore quàm ſub initio. Anno 1668, *Mart.* 5, *ſt. n.* horâ ſeptimâ veſp. *Pater Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit horizonti proximum, ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſupra modum fulgente, ut ſtantes in litore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; cauda ſub initio ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela, ſpeciem habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum. Poſtea verò luce decreſcente, aucta eſt magnitudine, quoad uſque Cometa apparere deſiit. Unde & *Caſſinus Bononiæ Martii* 10, 11 & 12, de horizonte exeuntem vidit ad longitudine graduum 32. In *Portugalliâ* verò quartam ferè Cœli partem, id eſt gradus 45, occupâſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenta, nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ manifeſtum eſt, quòd caput à Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, ubi cauda maximè ſplendebat. His omnibus adde Cometam anni 1680, cujus inſignem ſplendorem, in conjunctione capitis cum Sole, jam antè deſcripſi. Arguit autem tantus ſplendor Cometas hujus generis reverâ tranſire per fontem luminis, præſertim cùm caudæ nunquam ita luceant in oppoſitione Solis, neque ibi legantur trabes igneæ apparuiſſe.

Probatur ex luce capitum quatenus ea cæteris paribus major eſt in viciniâ Solis.

64. Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terrâ Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior anni 1665, obſervante *Hevelio*, ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque præterierat perigæum; ſplendor verò capitis

capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa, radiis Solaribus obtectus, deſiit apparere. Cometa anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine menſis *Julii*, ubi primùm conſpectus eſt, tardiſſimè movebatur minutos primos 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur, uſque ad *Sept.* 4, quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat: id quod etiam ex diametro capitis, micrometro menſuratâ, colligitur; quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6, eſſe tantùm 6′. 5″, incluſâ comâ; at *Sept.* 2, eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longè minus apparuit, quàm in fine motûs: at initio tamen, in viciniâ Solis, longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium menſis *Decembris*, & iſte anni 1680, circa finem ejuſdem menſis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in perigæis: verùm ſplendor maximus capitum contigit ante duas ferè ſeptimanas, ubi modò exierant de radiis ſolaribus, & ſplendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate Solis. Die 12 menſis *Decembris*, conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantiâ novem graduum à Sole, id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17, apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velociſſimè motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat *Ori Pegaſi*, ſtellæ tertiæ magnitudinis; *Jan.* 3, apparebat ut ſtella quartæ; *Jan.* 9, ut ſtella quintæ; *Jan.* 13, ob ſplendorem Lunæ creſcentis, diſparuit; *Jan.* 25, vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Caput verò Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1, majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parvum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7, *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Si ſumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita, in longinquis regionibus poſita, luxiſſent ante & poſt æqualiter; id adeo ob æquales diſtantias à Terrâ. Quòd uno caſu maximè luxerunt, altero evanuerunt, vicinitati Solis in priore caſu,

caſu, diſtantiæ ejus in poſteriore aſcribendum eſt. Et ex magna illâ lucis utriuſque differentiâ concluditur magna vicinitas in priore. Nam lux Cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere, ubi capita velociſſimè moventur, atque adeo ſunt in Perigæis; niſi quatenus ea major eſt in viciniâ Solis.

Idem confirmatur ex magno numero Cometarum viſorum in regione Solis.

65. Ex his intellexi tandem, cur Cometæ tantopere frequentent regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus Soli oppoſitis. Forent enim Terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur, & Sol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verùm percurrendo hiſtorias Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio Solem verſus, quàm in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux Solaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à Sole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quàm ſint ipſo Jove propiores. Spatii autem, tantillo intervallo circa Solem deſcripti, pars longè major ſita eſt à latere Terræ, quod Solem reſpicit; inque parte illâ majore, Soli utplurimum viciniores, magis illuminari ſolent. Per orbium quoque inſignem excentricitatem fit, ut Apſides imæ ſint Soli longè propiores, quàm ſi revolutiones in circulis Soli concentricis peragerentur.

Confirmatur etiam ex caudis majoribus & ſplendidioribus poſt conjunctionem capitum cum Sole quam antea.

66. Hinc etiam intelligimus, quare Cometarum caudæ in capitibus ad Solem properantibus raræ ſemper & breves apparent, & vix longitudinem graduum 15 vel 20 ſuperâſſe leguntur; at in receſſu capitum à Sole, fulgent ſæpe ad inſtar trabium ignitarum, & mox ad gradus 40, 50, 60, 70, & ultra, in longum porriguntur. Oritur utique tantus caudarum ſplendor tantaque longitudo ex calore Solis Cometam prætereuntem calefaciente. Et inde colligere videor, Cometas omnes, quorum tales ſunt caudæ, tranſiiſſe per viciniam Solis.

Cauda oriri ex atmoſphæris Cometarum.

67. Inde etiam colligere licet, quòd caudæ oriantur ex Atmoſphæris capitum. Eſt autem de Caudâ opinio triplex: eam vel jubar eſſe Solis, per tranſlucidum Cometæ caput propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite Cometæ in Terram; vel denique nubem, eſſe ſeu vaporem, à capite Cometæ jugiter ſurgentem, & abeuntem in partes à Sole adverſas. Opinio prima

prima eorum eſt, qui nondum imbuti ſunt ſcientiâ rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur à pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: adeoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aëre clariore, tenuius, & ægrè ſenſibile; in Cœlis autem, abſque materiâ reflectente, nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, & eâ ratione res redit ad opinionem tertiam. Nam materia illa reflectens non alibi reperiri debet quàm in regione caudæ, ne Cœlum totum, luce Solis illuſtratum, uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus; qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum, diſtinctè ad nos tranſmiſſa, demonſtrat Medium cœleſte nullâ vi refractivâ pollere. Nam quòd dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſimè contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt; quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt, quòd ſcintillatio in priore caſu generetur, in poſteriore verò ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos, abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat, quòd caudæ non ſoleant videri in Cometis, cùm eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos; & propterea caudas Fixarum non cerni; ſciendum eſt, quòd lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt, & valdè obtuſa. Sic enim Cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſuâ vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus

dus 40, 50, 60, longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28, caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantùm magnitudinis, cauda verò, luce quidem pertenui at ſatis ſenſibili, longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum, vel paulo ultra. Sed & *Feb.* 9 & 10, ubi caput nubis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda orietur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa, in iiſdem cœli regionibus, in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa anni 1680 *Decemb.* 28, hora $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, verſabatur in ♓. 8°. 41′, cum latitudine boreali 28°. 6′; Sole exiſtente in ♑. 18°. 26′. Et Cometa anni 1577, *Decemb.* 29. verſabatur in ♓. 8°. 41′, cum latitudine boreali 28°. 40′, Sole etiam exiſtente in ♑. 18°. 26′, circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ, ex meis & aliorum obſervationibus, declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore verò, ex obſervationibus *Tychonis*, declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur, repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut phænomena Caudarum ex materiâ aliquâ reflectente deriventur. Vapores autem qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum atmoſphæris oriri poſſe ſic facilè intelligetur.

Aeris & vaporum immenſam eſſe raritatem in ſpatiis cœleſtibus: & perexiguam vaporum quantitatem ad phænomena caudarum efficere.

68. Aer, juxta ſuperficiem Terræ, ſpatium occupare noſcitur quaſi 1200 vicibus majus quàm Aqua ejuſdem gravitatis; adeoque aëris columna cylindrica pedes 1200 alta, ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea, ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 1200 dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ pedum 32. Igitur in altitudine pedum 1200, ſeu ſtadiorum duorum, eſt pondus aëris incumbentis minus, atque adeo raritas aëris compreſſi major, quàm juxta ſuperficiem Terræ, in proportione 33 ad 32. Quo

(m) Vide Tractatum Noſtrum de Atmoſphærâ, in Actis Philoſophicis Societatis Regiæ Londinenſis.

Quo cognito computare jam licet raritatem aëris per regiones univerſas (ſubſidio Corollarii Propoſitionis XXII. *Libri Secundi Principiorum*) ex hypotheſi quòd Aeris expanſio ſit compreſſioni reciprocè proportionalis: comprobata eſt enim hæc proportio tum *Hookii* tum aliorum experimentis. Computationem ſubjunximus in Tabulâ ſequente, ubi columna prima deſignat altitudinem Aeris in milliaribus, quorum 4000 æquent ſemidiametrum Terræ; ſecunda, compreſſionem Aeris, ſeu pondus incumbens; ac tertia, raritatem ſeu extenſionem Aeris ejuſdem, poſito quòd gravitas decreſcat in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro Terræ. Latinorum verò characteres numerales hîc uſurpantur pro certo circulorum numero, ut ſcribendo 0,XVII 1224 pro 0,000000000000000001224 & 26956 XV pro 26956000000000000000 (m). Ex hâc Tabulâ liquet Aerem in progreſſu ad ſuperiora rareſieri; ut aëris, qui Terræ proximus eſt, ſphæra, diametro digiti unius deſcripta, & eâdem deinceps rarefactione dilatata, in altitudine ſemidiametri unius Terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones adusque ſphæram Saturni, & longè ultra; atque in altitudine decem ſemidiametrorum Terreſtrium, impleret plus ſpatii quàm cœlum univerſum (juxta computationem ſuperiorem) cis Fixas occupat. Et quamvis ob longè craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque vim centripetam circumſolarem; fieri poſſit, ut Aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat: perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde ſufficere, ex hâc computatione perſpicuum eſt; nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris, luce Solis ſplendens, craſſitudine paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam verò caudarum

A E R I S

Altitudo.	Compreſſio.	Exporrectio.
0	33	1
5	17,8515	1,8486
10	9,6717	3,4151
20	2,852	11,571
40	0,2525	136,83
400	0,XVII 1224	26956 XV
4000	0,CV 4465	73907 CII
40000	0,CXCII 1628	20263 CLXXXIX
400000	0,CCX 7895	41798 CCVII
4000000	0,CCXII 9878	33414 CCIX
Infinita.	0,CCXII 6041	54622 CCIX

nenſis. Vol. LXIV.

 craſſitudinem,

craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur.

Quo pacto Caudæ oriri poſſint ex atmoſphæris capitum.

69. Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum, & progreſſum in partes à Sole averſas, *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere non eſt à ratione prorſus alienum, non obſtante quòd ſubſtantiæ craſſæ, impeditiſſimis in regionibus noſtris, à radiis ſenſibiliter propelli nequeant. Auctor alius particulas tam leves quàm graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à Sole aſcendere. Cùm autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, adeoque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum oriri. Aſcendit fumus in camino, impulſu aëris cui innatat. Aer ille, per calorem rarefactus, aſcendit ob diminutam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media, quæ permeant, niſi in reflexione & refactione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram æthereaam cui implicantur. Illa, calore ſibi communicato, rarefiet; &, ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam quâ prius tendebat in Solem, aſcendet inſtar fluminis (n), & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: impetu etiam lucis ſolaris, ut jam dictum eſt, aſcenſum promovente.

Eaſdem ex his atmoſphæris oriri docetur ex ipſarum variis phænomenis.

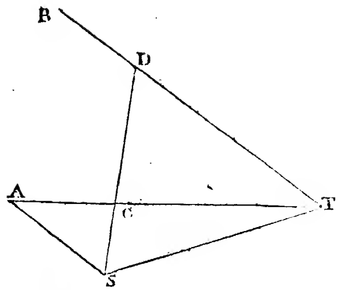
70. Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averſas aſcendere, confirmatur præterea, ex legibus quas obſervant. Ut quòd in planis orbium Cometarum, per Solem tranſeuntibus, jacentes deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quòd ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à Sole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor eſt, ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ; ut & ubi caput ad Solem propiùs accedit. Quòd caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurventur. Quòd curvatura major eſt, ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quòd deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque adeo quòd cauda, convexo ſui latere, partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quòd caudæ, quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulò ſplendidiores, & limite minus indiſtincto terminatæ quàm ad concava. Pendent igitur Phænomena cauda à motu capitis, non autem à regione cœli in quo caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus; ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole, uti jam dictum eſt; & ſuperiora vel rectâ petere, ſi corpus fumans quieſcit, vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit, à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit, ubi aſcenſus vaporis velocior eſt, nimirum in viciniâ Solis & juxta corpus fumans. Namque ibi potentior eſt vis illa Solaris, quâ vapor aſcendit. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna, & quia vapor in columnæ latere præcedente paulò recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſiùs reflectet, & limite minùs indiſtincto terminabitur; vapore ad latus alterum paulatim langueſcente, & ex oculis ſenſim evaneſcente.

(n) Fallor ni auctor ſcripſerit, *inſtar fumi*.

Cometas infra orbem Mercurii quandoque deſcendere probatur ex caudis.

71. Cæterùm rerum naturalium cauſas reddere non eſt hujus inſtituti: vera an falſa fuerint hæc quæ modò dicta ſunt, id falſtem in ſuperioribus confecimus; Radios à caudis Cometarum ſecundum lineas rectas per cœlos propagari, adeoque à partibus cœlorum venire, in quibus caudæ ſpectatoribus ubicumque conſtitutis apparent, quæque adeo à capitibus Cometarum in regiones à Sole averſas, porriguntur. Et hoc fundamento limitem denuò Cometarum diſtantiis in hunc modum ponimus.

Repreſentet S Solem; T, Terram; STA, diſtantiam Cometæ à Sole; & ATB, apparentem longitudinem caudæ. Et quoniam lux propagatur



tur à termino caudæ ſecundum lineam rectam TB, reperietur terminus ille alicubi in lineâ TB. Sit ipſe punctum D, jungeque DS, ſecantem lineam TA in C. Et quia cauda ſemper opponitur Soli quamproximè; & propterea Sol, caput Cometæ, & terminus caudæ jacent in directum: reperietur caput Cometæ in C. Ipſi TB parallelam age SA, occurrentem lineæ TA in A, & Cometæ caput C neceſſariò reperietur inter T & A; eò quòd terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ TB, & lineæ omnes SD, quæ ab S ad lineam TB duci poſſunt, ſecant lineam TA alicubi inter T & A. Quare Cometa non poteſt longiùs abeſſe à Terrâ, quàm intervallo TA; nec à Sole, quàm intervallo SA ultra Solem, vel ST citra. Exempli gratiâ, *Decemb.* 12, 1680, Cometa diſtabat 9^{gr}. à Sole, & longitudo caudæ erat 35^{gr}. ad minimum. Conſtituatur ergo triangulum TSA; cujus angulus T æquetur diſtantiæ graduum 9; & angulus A, angulo ATB ſeu longitudini caudæ graduum 35; & erit SA ad ST, id eſt limes maximæ poſſibilis diſtantiæ Cometæ à Sole, ad ſemidiametrum orbis magni, ut ſinus anguli T ad ſinum anguli A, hoc eſt ut 3 ad 11 circiter. Quare Cometa eo tempore minus diſtabat à Sole quàm $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ Terræ à Sole; & propterea verſabatur aut intra orbem Mercurii, aut inter orbem illum & Terram. Rurſus *Decemb.* 21. diſtantia Cometæ à Sole erat $32\frac{2}{5}^{gr}$. & longitudo caudæ 70^{gr}. Ergo ut ſinus $32\frac{2}{5}^{gr}$. ad ſinum 70^{gr}. hoc eſt ut 4 ad 7, ita erat limes intervalli inter Cometam & Solem ad diſtantiam Terræ à Sole; & propterea Cometa nondum exceſſerat orbe Veneris. *Decemb.* 28. diſtantia Cometæ à Sole erat 55^{gr}. & longitudo caudæ 56^{gr}. Ergo limes intervalli inter Cometam & Solem nondum æquabat diſtantiam Terræ à Sole: & propterea Cometa nondum exceſſerat orbe Telluris. Ex parallaxi autem colligitur, quòd exceſſus ille incidit in *Jan.* 5, circiter, quódque Cometa deſcendebat longè infra orbem Mercurii. Concedamus ipſum in perihelio fuiſſe *Decemb.* 8. quo tempore cum Sole conjungebatur; & in itinere à perihelio ad exitum de orbe Telluris,

4 conſumentur

conſumentur dies 28, adeoque diebus viginti ſex vel ſeptem ſequentibus, quibus oculo inermi videri deſiit, vix duplicabat diſtantiam ſuam à Sole. Iiſdem argumentis limitando diſtantias aliorum Cometarum, pervenitur tandem ad hanc concluſionem: quòd Cometæ omnes, quamdiu ſe nobis oſtendunt, verſantur intra ſpatium ſphæricum centro Sole & intervallo Solis ac Terræ vel duplicato, vel ad ſummum triplicato, deſcriptum.

Cometas moveri in Sectionibus Conicis umbilicum habentibus in centro Solis; & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribere temporibus proportionales.

72. Verſantur igitur Cometæ, toto apparitionis tempore, intra ſphæram activitatis vis circumſolaris, adeoque agitantur ipſius impulſu & propterea (per Corol. 1. Prop. XIII. *Libri* 1. *Princip.*) deſcribunt Conicas Sectiones umbilicos habentes in centro Solis, & radiis ad Solem ductis conficiunt areas proportionales temporibus. Nam vis illa, in immenſum propagata, reget motus corporum longè ultra orbem Saturni.

Sectiones illas Conicas eſſe Parabolis finitimas. Id ex velocitate Cometarum colligitur.

73. Cæterùm de Cometis Hypotheſis eſt triplex: eos vel generari & interire, quoties apparent & evaneſcunt; vel de Fixarum regionibus venientes præterire ſyſtema noſtrorum Planetarum; vel denique circa Solem in orbibus valde excentricis perpetuò revolvi. Caſu primo Cometæ, pro variâ ſuâ velocitate, movebuntur in Sectionibus quibuſcunque Conicis; ſecundo, movebuntur in Hyperbolis; utroque indifferenter frequentabunt regiones omnes tam Polorum quàm Eclipticæ; tertio, motus peragentur in Ellipſibus valde excentricis, & ad ſpeciem Parabolarum quamproximè accedentibus; orbes autem, ſi lex Planetarum ſervetur, haud multum divaricabunt à plano Eclipticæ. Et quantum hactenus animadvertere potui, caſus tertius obtinet. Nam Cometæ maximè frequentant Zodiacum, & vix unquam pertingunt ad latitudinem heliocentricam graduum quadraginta. Moventur etiam in orbibus quamproximè Parabolicis, uti colligo ex eorum velocitate. Nam velocitas quâ Parabola deſcribetur, eſt ubivis ad velocitatem, quâ Cometa vel Planeta in circulo ad eandem à Sole diſtantiam revolvi poſſet, in dimidiatâ ratione numeri binarii ad unitatem (per Corol. 7. Prop. XVI.) Et meo quidem calculo talis circiter reperta eſt Cometarum velocitas. Rem examinavi, colligendo præterpropter velocitates ex diſtantiis, ac diſtantias ex parallaxi & phænomenis caudæ conjunctim. Errores in velocitates exceſſu, vel defectu, haud majores obvenere, quàm qui ex errori-

bus

bus in distantiis, eâ ratione collectis, oriri potuerint. Sed & usus sum hujusmodi ratiocinio.

Quanto tempore Cometæ in Trajectoriis Parabolicis percurrant orbem magnum.

74. Diviso orbis magni radio in partes mille, designent numeri in Tabulæ sequentis columnâ primâ distantiam verticis Parabolæ à centro Solis in his partibus; & Cometa, temporibus in columnâ secundâ expressis, movebitur à Perihelio ad superficiem sphæræ, quæ centro Sole & radio orbis magni describitur; & temporibus in Corol. 3, 4 & 5. expressis duplicabit, triplicabit & quadruplicabit eandem suam à Sole distantiam.

T A B. I.

Distantia inter centrum Solis & perihelium Cometæ.	Tempus transitûs Cometæ à Perihelio ad distantiam à Sole radio Orbis magni											
	Æqualem.			Duplicato æqualem.			Triplicato æqualem.			Quadruplicato æqualem.		
	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.	dies	hor.	min.
0	27.	11.	12	77.	16.	28	142.	17.	14	219.	17.	30
5	27.	16.	7	77.	23.	14						
10	27.	21.	0	78.	6.	24						
20	28.	6.	40	78.	20.	13	144.	03.	19	221.	8.	54
40	29.	1.	32	79.	23.	34						
80	30.	13.	25	82.	4.	56						
160	33.	5.	29	86.	10.	26	153.	16.	8	232.	12.	20
320	37.	13.	46	93.	23.	38						
640	37.	9.	49	105.	1.	28						
1280	. . . .			106.	06.	35	200.	6.	43	297.	3.	46
2560	. . . .			. . . .			147.	22.	31	300.	6.	03

Quo tempore Cometæ ingrediuntur orbem magnum, & egrediuntur eodem.

Quo tempore Cometa ingreditur sphæram orbis magni, vel de eâdem egreditur, innotescit præterpropter ex parallaxi; expeditiùs autem per hanc Tabulam.

T A B.

T A B. II.

Distantia apparens Cometæ à Sole.	Cometæ motus apparens diurnus in orbe suo.				Distantia Cometæ à Terrâ in partibus quarum 1000 sunt radius orbis magni.
	Directus.		Retrogradus.		
gr.	gr.	min.	gr.	min.	
60	2.	18	0.	20	1000
65	2.	33	0.	35	845
70	2.	55	0.	57	684
72	3.	7	1.	9	618
74	3.	23	1.	25	551
76	3.	43	1.	45	484
78	4.	10	2.	12	416
80	4.	47	2.	49	347
82	5.	45	3.	47	278
84	7.	18	5.	20	209
86	10.	27	8.	19	140
88	18.	37	16.	39	70
90	Infin.		Infin.		00

Quâ velocitate Cometæ anni 1680 orbem magnum trajecerint.

75. Incidit ingressus vel egressus in tempus distantiæ Cometæ à Sole in Columnâ primâ è regione motûs diurni expressæ. Sic anno 1681 *Jan.* 4. *st. v.* motus diurnus apparens Cometæ in orbe ipsius erat quasi $3^{gr}. 5'$. Huic respondens distantia est $71\frac{2}{3}^{gr}$. Et assecutus est Cometa hanc à Sole distantiam *Jan.* 4. circa horam sextam pomeridianum. Rursus anno 1680, *Novembris* 11, Cometæ qui tunc apparuit motus diurnus erat quasi $4\frac{2}{3}^{gr}$. & huic respondens distantia $79\frac{2}{3}^{gr}$. incidit in *Novemb.* 10, paulo antè mediam noctem. Hisce quidem temporibus Cometæ assecuti sunt distantiam quam habuit Terrâ à Sole, & Terrâ jam ferè in Perihelio versabatur. Computata est autem Tabula prior pro mediocri distantiâ Terræ à Sole assumpta partium 1000, & major est hæc distantia intervallo, quod Terra quasi spatio diei unius motu suo annuo, vel Cometa spatio horarum 16 motu suo percurrere potest. Ut Cometa reducatur ad mediocrem hanc distantiam partium 1000, addantur tempori priori & auferantur posteriori horæ sexdecim, & tempus prius evadet *Jan.* 4, horâ vespertinâ 10; posterius *Novemb.* 10, horâ matutinâ 6 circiter. Ex motuum diurnorum tenore & progressu colligitur quòd conjungebatur Cometa uterque cum Sole inter *Dec.* 7, & *Dec.* 9. Inde ad

ad *Jan.* 4, hor. 10 vesp. ex unâ parte, & *Nov.* 10, hor. 6 mat. ex alterâ, sunt dies quasi 28. Atque tot dies (per Tab. I.) in trajectoriis Parabolicis consumi debebant.

Cometas hosce non fuisse duos sed unum & eundem Cometam. Quo orbe & qua velocitate hic cœlos trajecit docetur exactius.

76. Cæterum ex coincidentiâ Periheliorum & velocitatum consensu verisimile fit, Cometas hosce, quos ut duos jam consideravi, non duos fuisse sed unum & eundem Cometam. Eâ lege orbita hujus Cometæ vel Parabola erit, vel Conisectio à Parabolâ parum discrepans, & superficiem Solis propemodum tanget in vertice. Namque ex Tabulâ II. distantia Cometæ à Terrâ erat *Novemb.* 10, partium 360 circiter, & *Jan.* 4, partium 360 circiter. Inde & ex longitudinibus & latitudinibus Cometæ colligitur distantiam locorum à se invicem in quibus Cometa tunc versabatur, fuisse partium quasi 280. Hujus dimidium 140 est ordinatim applicatam ad orbitam Cometæ, abscindens partem axis ejus radio orbis magni, seu partibus 1000, æqualem circiter. Et inde dividendo quadratum ordinatæ 140 per axis partem abscissam 1000, invenietur latus rectum 19,6, seu numero rotundo 20: cujus pars quarta 5 est distantia inter verticem orbitæ & centrum Solis. Distantiæ partium 5 in Tabulâ primâ congruunt dies 27, horæ 16, min. 7. Tanto igitur tempore Cometa conficiet iter in orbe Parabolico inter Perihelium suum & superficiem sphæricam orbis magni radio partium 1000 descripti, atque adeo tempus illud duplicatum seu dies 55 & horas $1\frac{1}{4}$ consumet motu suo toto intra orbem magnum. Atque ita se res habet. Namque à *Novemb.* 10, hor. 6 mat. quando Cometa hunc orbem ingressus est ad *Jan.* 4, hor. 10 vesp. quando is eodem egressus est sunt dies 55 & horæ 16. Differentia horarum $7\frac{3}{4}$ in rudi hocce computo contemnenda est, & fortè ex motu paulo tardius in orbitâ Ellipticâ confecto oriri potest. Inter ingressum & egressum tempus medium incidit in *Decemb.* 8. *hor.* 2 *mat.* Igitur hoc tempore debuit Cometa reperiri in Perihelio. Et ecce *Hallejus* hoc ipso die proximè ante ortum Solis caudam perbrevem latam & fulgentissimam, uti diximus, ex horizonte perpendiculariter surgentem vidit. Ex situ caudæ colligitur Cometam jam prætergressum fuisse Eclipticam, & latitudinem borealem habuisse; adeoque Perihelium, quod ex alterâ parte Eclipticæ jacebat, jam tum præterisse, nondum tamen pervenisse ad meridianum Solis. Inter Perihelium itaque & conjunctionem

junctionem Solis Cometa jam consistens versabatur ante horas paucas in Perihelio. Namque in tantâ Solis viciniâ moveri debuit celerrimè & singulis horis gradus fere dimidios apparenter percurrere.

Quâ velocitate Cometæ moventur, docetur pluribus exemplis.

77. Similibus computis colligo quòd Cometa anni 1618 ingressus erat sphæricum limitem orbis magni *Decemb.* 7, ad Solis occasum. Incidit autem ipsius conjunctio cum Sole in *Novemb.* 9 vel 10 circiter; dies intercedunt quasi 28, ut in Cometa superiore: nam & ex caudæ magnitudine, quâ par fuit Cometæ superiori, verisimile est ipsum pariter propemodum rasisse Solare corpus. Fulserunt hoc anno Cometæ quatuor, quorum hic fuit ultimus: secundum, qui primo conspectus est in viciniâ Solis orientis *Octob.* 31, & mox sub radiis Solaribus evanuit, suspicor eundem fuisse cum quarto, qui de radiis Solaribus emersit circa *Novemb.* 9. His adde quòd Cometa anni 1607 sphæram orbis magni ingressus fuit, *Sept.* 14. *st. vet.* & accessit ad minimam suam à Sole distantiam circa *Octob.* 19; dies intercedunt 35. Distantia illa Perihelii à Sole subtendebat angulum apparentem quasi 23^{gr}. ad Terram, adeoque erat partium 390: tot autem partibus in Tab. I. respondent dies 34 circiter. Porrò Cometa anni 1665 in sphæram orbis annui intrabat circa *Mart.* 17, & ad Perihelium accedebat circa *Apr.* 16; intercedentibus diebus 30. Distantia inter Perihelium & Solem subtendebat angulum quasi 7^{gr}. ad Terram, adeoque erat partium quasi 122: & his partibus in Tab. I. respondent dies 30. Rursus Cometa anni 1682 intrabat in sphæram orbis magni circa *Aug.* 11, & in Perihelio versabatur circa *Sept.* 16, à Sole tunc distans intervallo partium quasi 350, quibus in Tab. I. congruunt dies $33\frac{1}{2}$. Quinetiam celebris ille Regiomontani Cometa, qui anno 1472, per regionem poli borealis trajiciendo, confecit uno die iter graduum quadraginta, limitem orbis magni ingrediebatur *Jan.* 21, quo tempore polum præteribat: & inde properans ad Solem occultabatur sub radiis Solaribus in ultimis diebus *Februarii.* Unde verisimile est quòd dies triginta, aut paulò plures, consumpti sint inter ingressum illum & Perihelium Cometæ, quodque adeo Cometa iste reverâ non celerior fuerit aliis Cometis, neque aliunde quàm ex transitu suo per viciniam Terræ tantam affecutus sit celeritatem apparentem.

Gg 2 78. Est

Proponitur inventio Trajectoriæ Cometarum.

78. Est igitur Cometarum velocitas, quatenus ea per hujusmodi computationes nimium rudes definiri queat, ea ipsa quâcum Parabolæ, vel his affines Ellipses, describi debeant: & propterea, ex datâ inter Cometam & Solem distantiâ, datur quamproximè. Et hinc oritur Problema tale.

PROB.

Datur relatio inter velocitatem Cometæ & distantiam ipsius à centro Solis; requiritur Trajectoria.

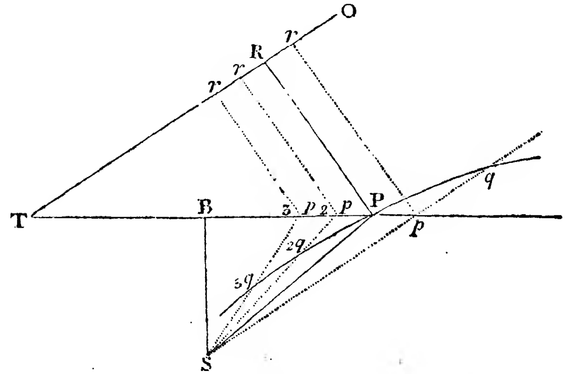
Soluto autem hoc Problemate, habebitur tandem methodus determinandi Trajectorias Cometarum quam exactissimè. Nam si relatio illa bis assumatur, & inde trajectoria bis computetur, deinde ex observationibus inveniatur error Trajectoriæ utriusque; potest assumptio per regulam falsæ positionis corrigi, & sic tertia inveniri trajectoria quæ cum observationibus plane congruet. Et hac methodo determinando Cometarum trajectorias sciri tandem potest exactius quasnam regiones hæc corpora percurrunt, quantæ sint eorum velocitates, cujus generis trajectorias describunt, & quænam sint caudarum veræ magnitudines & formæ pro variis capitum distantiis à Sole. Quin etiam sperandum est quod hac methodo sciri tandem possit, utrum Cometæ statis temporibus in orbem redeant, & quibus temporum periodis revolutiones singulorum compleantur. Solvitur autem Problema colligendo primum ex tribus vel pluribus observationibus motum horarium Cometæ ad tempus datum, deinde ex hoc motu Trajectoriam derivando. Sic pendet inventio Trajectoriæ ab unicâ observatione motuque horario tempore illius observationis, atque adeo seipsam vel probabit vel redarguet: nam concluso, quæ ex motu horæ unius & alterius & hypothesi falsâ deducitur, nunquam congruet cum motibus Cometarum à principio ad finem. Methodus computationis totius ita se habet.

LEMMA I.

In Problematis solutionem præmittuntur Lemmata.

Datas positione duas rectas OR, TP, *tertiâ* RP *ad rectum angulum* TRP *secare, eâ lege ut si ad datum aliquod punctum* S *ducatur recta* SP, *datum sit contentum Solidum sub ductâ illâ* SP *& quadrato rectæ* OR *terminatæ ad datum punctum* O.

Confit graphicè sic. Sit contentum illud datum $M^2 \times N$. Ad rectæ OR punctum quodvis r erige perpendiculum rp occurrens ipsi TP in p. Et per puncta S, p, age Sq æqualem $\frac{M^2 \times N}{OR^2}$. Simili Methodo age tres vel plures rectas S$2q$, S$3q$, &c. & per puncta

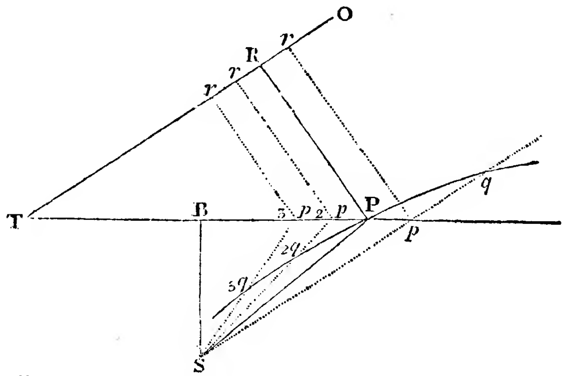


omnia q, $2q$, $3q$ acta linea regularis q, $2q$, $3q$ secabit rectam TP in puncto P, à quo demittendum est perpendiculum PR. Q. E. F.

Trignometricè sic. Assumatur linea novissimè inventa TP, & inde in triangulis TPR, TPS dabuntur perpendicula TR, SB, & in triangulo SBP latus SP & error $\frac{M^2 \times N}{OR^2} - SP$. Fac ut error iste puta D sit ad errorem novum puta E, ut error $2p2q \pm 3p3q$ ad errorem $2p3p$, vel error $2p2q \pm D$ ad errorem $2pP$; & error ille novus additus vel subductus longitudini TP dabit longitudinem correctam $TP \pm E$. Electio additionis vel subductionis inspectione Schematis dirigitur. Siquando opus fuerit ulteriore correctione, operationem repete.

Arithmeticè sic. Puta factum, sitque lineæ TP graphicè inventæ correcta longitudo $TP + e$: & correctæ longitudines linea-

rum OR, BP & SP erunt $OR - \frac{TR}{TP}e$, $BP + e$ & $\sqrt{SP^2 + 2BPe + ee} = \frac{M^2 \times N}{OR^2 + \frac{2OR \times TR}{TP}e + \frac{TR^2}{TP^2}ee}$. Unde per methodum ſerierum conver-

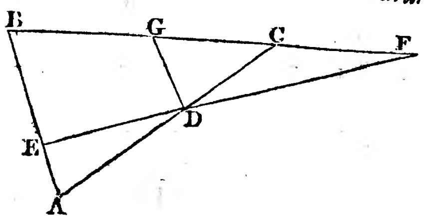


gentium fit, $SP + \frac{BP}{SP}e + \frac{SB^2}{2SP^3}ee$ &c. $= \frac{M^2N}{OR^2} + \frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2N}{OR^3}e + \frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2N}{OR^4}ee$ &c. Pro datis $\frac{M^2N}{OR^2} - SP$, $\frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2N}{OR^3} - \frac{BP}{SP}$, $\frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2N}{OR^4} - \frac{SB^2}{2SP^3}$, ſcribe F, $\frac{F}{G}$; $\frac{F}{GH}$, & ſignis probe ob ſervatis fiet $F + \frac{F}{G}e + \frac{F}{GH}ee = 0$, & $e + \frac{ee}{H} = -G$. Hinc, neglecto termino perexiguo $\frac{ee}{H}$, prodit $e = -G$. Si error $\frac{ee}{H}$ non eſt contemnendus, pone $-G - \frac{GG}{H} = e$.

Et notâ quòd his inſinuatur Methodus generalis ſolvendi difficiliora Problemata tam Trigonometricè quam Arithmeticè abſque perplexis illis computis & reſolutionibus affectarum æquationum quæ hactenus in uſu fuerunt.

LEMMA II.

Datas poſitione tres rectas quartâ ſecare, cujus partes interceptæ datam habeant proportionem ad invicem, quæque tranſeat per punctum quod in unâ earum datur.



Dentur poſitione AB, AC, BC, & in AC detur punctum D. Ipſi AB agatur parallela DG occurrens BC in G; capiatur GF ad BG in datâ illâ ratione,

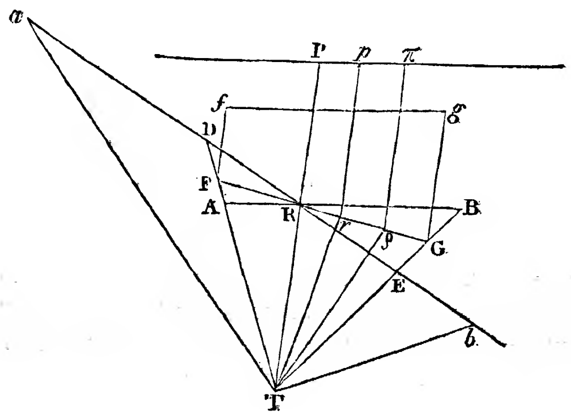
ratione, & agatur FDE: erit FD ad DE ut FG ad BG. Q. E. F.

Trigonometricè ſic. In triangulo CGD dantur anguli & latus CD, & inde latera reliqua, & ex datis rationibus dantur lineæ GF & BE.

LEMMA III.

Ad datum tempus invenire & graphicè exponere motum horarium Cometæ.

Ex obſervationibus probæ fidei dentur tres Longitudines Cometæ. Sunto harum differentiæ ATR, RTB, & requiratur motus horarius ad tempus obſervationis longitudinis intermediæ TR. Ducatur (per Lemma II.) recta ARB, cujus partes interceptæ AR, RB



ſint ut tempora inter obſervationes. Et ſi corpus tempore toto totam percurrat lineam AB uniformiter, & interea ſpectetur de loco T, is erit motus ejus apparens circa punctum R qui fuit Cometæ tempore obſervationis TR quamproximè.

Idem accuratius.

Dentur longitudines hinc inde magis diſtantes T*a*, T*b*, & (per Lemma II.) ducatur *a*R*b*, cujus partes *a*R, R*b* ſint ut tempora inter obſervationes *a*TR, RT*b*. Secet hæc lineas TA, TB, in D & E; æ quoniam error inclinationis TR*a* creſcit quaſi in duplicatâ ratione temporis,

temporis inter obſervationes, age FRG, eâ lege ut vel angulus DRF ad angulum ARF, vel linea DF ad lineam AF ſit in duplicatâ ratione temporis totius inter obſervationes αTb ad tempus totum inter obſervationes ATB, atque loco lineæ AB ſuperius inventæ uſurpetur linea jam inventa FG.

Convenit angulos ATR, RTB, αTA, BTb haud minores adhiberi quam decem vel quindecim graduum, ac tempora ipſis reſpondentia haud majora quam dierum octo vel duodecim, atque longitudines capi ubi Cometa celerrimè movetur. Hoc enim pacto errores obſervationum minorem habebunt rationem ad differentias longitudinum.

LEMMA IV.

Ad data tempora invenire longitudines Cometæ.

Fit capiendo in linea FG diſtantias Rr, Rρ temporibus proportionales, & ducendo lineas Tr, Tρ. Operatio trigonometrica palam eſt.

LEMMA V.

Invenire latitudines.

Ad radios TF, TR, TG erigantur normaliter tangentes obſervatarum latitudinum Ff, RP, Gg. Ipſi fg parallela ducatur PH. Huic occurrentia perpendicula rp, ρπ, tangentes erunt latitudinum quæſitarum ad radios Tr, Tρ.

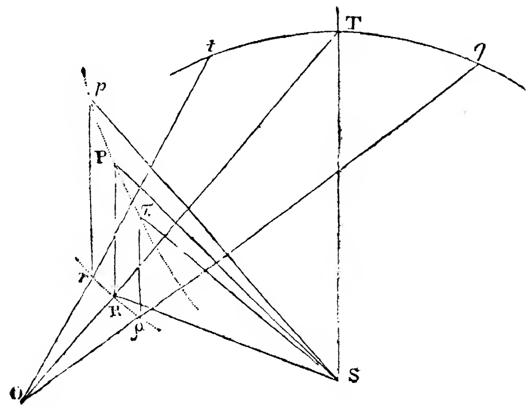
PBOB. I.

Ex aſſumpta ratione velocitatis determinare Trajectoriam Cometæ.

Solvitur Problema.

Deſignet S Solem; t, T, τ loca tria æquidiſtantia Telluris in ipſius Orbitâ; p, P, π loca totidem reſpondentia Cometæ in ipſius Trajectoria, interpoſitis inter ſingula intervallis horæ unius; pr, PR, πρ, perpendicula demiſſa ad planum Eclipticæ, & rRρ veſtigium Trajectoriæ in hoc plano. Jungantur Sp, SP, Sπ, SR, ST, tr, TR, τρ, TP, & coeant tr, τρ in O: converget TR ad idem O quamproximè, error ſaltem contemnendus erit. Per Lemmata præcedentia dantur anguli rOR, ROρ & proportiones pr & tr, PR ad TR,

TR, πρ ad τρ. Datur etiam figura tTτO magnitudine & poſitione, una cum diſtantiâ TS & angulis STR, PTR, STP. Aſſumamus velocitatem Cometæ, in loco P, eſſe ad velocitatem Planetæ gyrantis in circulo ad eandem à Sole diſtantiam SP, ut v ad 1; & deter-



minanda erit linea pPπ hâc lege; ut ſit ſpatium à Cometâ duabus horis deſcriptum pπ, ad ſpatium $v \times t\tau$, hoc eſt ad ſpatium quod Tellus eodem tempore deſcribit multiplicatum per numerum v, in dimidiatâ ratione diſtantiæ Telluris à Sole ST ad diſtantiam Cometæ à Sole SP; utque ſit ſpatium pP, horâ primâ à Cometâ deſcriptum, ad ſpatium Pπ horâ ſecundâ à Cometâ deſcriptum, ut velocitas in p ad velocitatem in P; hoc eſt in dimidiatâ ratione diſtantiæ SP ad diſtantiam Sp, ſive in ratione 2SP ad SP+Sp. Minutias enim toto hoc opere negligo, quæ errorem ſenſibilem creare nequeunt.

Imprimis igitur, ut in reſolutione æquationum affectarum Mathematici primâ vice radicem conjecturâ colligunt, ſic in hoc opere analytico, conjecturam faciendo, aſſequor, ut poſſim, diſtantiam quæſitam TR, & (per Lemma II.) duco rρ, primùm ita ut rR & Rρ æquentur; deinde (ubi proportio SP ad Sp hinc innotuerit) ita ut ſit rR ad Rρ, uti 2SP ad Sp+SP: & invenio rationes linearum pπ, rρ, & OR ad invicem. Ponatur eſſe M ad $v \times t\tau$ ut OR ad pπ; &, ob proportionalia $p\pi^2 : \overline{v \times t\tau}|^2 :: ST : SP$, erit ex æquo $OR^2 : M^2 :: ST : SP$; adeoque contentum ſolidum $OR^2 \times SP$ æquale dato $M^2 \times ST$.

Unde, si triangula STP, PTR, jam locentur in eodem plano, dabuntur TR, TP, SP, PR (per Lemma I.) Hæc omnia perago primum graphicè, opere celeri & rudi; dein graphicè majori cum diligentiâ; ultimò per computationem numeralem. Tum denuò situm linearum $r\varrho$, $p\pi$, determino accuratissimè una cum nodis & inclinatione plani $sp\pi$ ad planum Eclipticum; inque plano illo $sp\pi$ (per Prop. XVI. Libri I. Princip. Math.) describo Trajectoriam, in quâ corpus movebitur emissum de dato loco P, secundum datam rectam $p\pi$, eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem Telluris ut $p\pi$ ad $v \times t\tau$. Q. E. F.

PROB. II.

Assumptam velocitatis rationem & inventam Trajectoriam corrigere.

Adhibeatur observatio Cometæ sub finem motûs, aliave aliqua quàm longissimè distans ab observationibus priùs adhibitis; & radii, qui in illâ observatione ad Cometam ducitur, planique $sp\pi$ quæratur intersectio, ut & locus Cometæ in trajectoriâ ad tempus illius observationis. Si intersectio ista incidit in hunc locum, argumento est Trajectoriam rectè inventam esse. Sin minus, sumendus erit novus numerus v, & trajectoria nova invenienda; dein locus Cometæ in hâc Trajectoriâ, tempore observationis illius probatoriæ, & intersectio radii cum plano Trajectoriæ determinandi ut priùs. Et ex variatione erroris, collatâ cum variatione aliarum quantitatum, colligetur, per regulam auream, quantæ debeant esse variationes seu correctiones illarum aliarum quantitatum, ut error evadat quàm minimus. Quibus adhibitis correctionibus, habebitur Trajectoria exactè satis; posito quòd computatio innixa fuit observationibus exactis, quòdque non multum erratum fuit in assumptione quantitatis v. Nam si multum erratum fuit, iterandum est opus eousque dum Trajectoria inveniatur exactè satis. Q. E. F.

THEORIA LUNÆ.

OBSERVATORIUM *Grenovicense* occidentalius est *Parisiensi* $2^{gr}. 19'$; *Uraniburgo* $12^{gr}. 51'. 30''$; & *Gedano* $18^{gr}. 48'$. Epochæ motûs medii Solis et Lunæ.

2. Solis & Lunæ motus medios ab æquinoctio verno, in meridiano *Grenovicensi*, pono sequentes: nempe *anno* 1680, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis est $9^{sig}. 20^{gr}. 34'. 46''$. Apogæi Solis $3^{sig}. 7^{gr}. 23'. 30''$. Motus medius Lunæ $6^{sig}. 1^{gr}. 35'. 45''$. Apogæi Lunæ $8^{sig}. 4^{gr}. 28'. 5''$. Nodi ascendentis Orbitæ Lunaris $5^{sig}. 24^{gr}. 14'. 35''$. Et *anno* 1700, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis est $9^{sig}. 20^{gr}. 43'. 50''$. Apogæi Solis $3^{sig}. 7^{gr}. 44'. 30''$. Motus medius Lunæ $10^{sig}. 15^{gr}. 19'. 50''$. Apogæi Lunæ $11^{sig}. 8^{gr}. 18'. 20''$. & Nodi ascendentis $4^{sig}. 27^{gr}. 24'. 20''$. Viginti enim annis *Julianis*, sive diebus 7305, Solis motus est $20^{rev}. 0^{sig}. 0^{gr}. 9'. 4''$. Motus Apogæi Solis $21'. 00''$. Lunæ Motus est $247^{rev}. 4^{sig}. 13^{gr}. 34'. 5''$. Apogæi Lunaris Motus $2^{rev}. 3^{sig}. 3^{gr}. 50'. 15''$. Nodi Motus $1^{rev}. 0^{sig}. 26^{gr}. 50'. 15''$. Omnes prædicti Motus sunt à puncto æquinoctii verni. Quòd si ab illis subducatur ipsius æquinoctialis puncti motus, in antecedentia interea factus, sc. $16'. 40''$; manebunt motus respectu Fixarum in annis 20 *Julianis*: nempe Motus Solis $19^{rev}. 11^{sig}. 29^{gr}. 52'. 24''$. Apogæi Solis $4'. 20''$. Lunæ $247^{rev}. 4^{sig}. 13^{gr}. 17'. 25''$. Apogæi Lunæ $2^{rev}. 3^{sig}. 3^{gr}. 33'. 35''$. Nodi Lunæ $1^{rev}. 0^{sig}. 27^{gr}. 6'. 55''$.

3. Secundum hunc computum Annus Tropicus est $365^{dier}. 5^{hor}. 48'. 57''$. Annusque Sidereus $365^{dier}. 6^{hor}. 9'. 14\frac{1}{2}''$. Annus.

4. Motus Medii Luminarium suprapositi variis afficiuntur inæqualitatibus.

Et

Et primò ſunt annuæ æquationes dictorum motuum mediorum Solis & Lunæ, & Apogæi Nodique lunæ.

Æquationes Annuæ.

5. Æquatio annua Motûs medii Solis pendet ab excentricitate Orbitæ Telluris circa Solem, quæ eſt partium $16\frac{11}{12}$, qualium mediocris diſtantia Solis à Terra eſt 1000; indeque vocatur Æquatio Centri: eſtque, cùm maxima, $1^{gr}.\ 56'.\ 20''$.

Maxima æquatio annua motûs medii Lunæ eſt $11'.\ 49''$; Apogæi ejus, $20'$; Nodique $9'.\ 30''$.

Atque quatuor iſte æquationes annuæ ſunt ſemper ſibi mutuò proportionales. Ideoque cùm earum aliqua eſt maxima, tres reliquæ ſunt etiam maximæ; diminutâ verò quâvis, minuuntur etiam & reliquæ in eâdem ratione: unde datâ æquatione annuâ centri Solis, dantur & tres reliquæ annuæ æquationes congruæ; illius igitur Tabula ſufficit. Nam ſi æquatio annua centri Solis, tempori cuivis congrua, inde deprompta vocetur P; & fiat $\frac{1}{10}P=Q$, $Q+\frac{1}{60}Q=R$, $\frac{1}{6}P=D$, $D+\frac{1}{30}D=E$, & $D-\frac{1}{60}D=2F$; erit æquatio annua eidem tempori congrua Lunæ quidem R; Apogæi Lunaris, E; & Nodi, F. Adnotandum, ſi æquatio centri Solis eſt addenda, æquationem Lunæ prædictam eſſe ſubducendam, Apogæi Lunaris æquationem addendam, Nodi verò æquationem ſubducendam; & è contra, ſi æquatio centri Solis eſt ſubducenda, addenda erit Lunæ æquatio, Apogæi verò ſubducenda, & Nodi addenda.

Æquatio Lunæ Prima.

6. Alia eſt æquatio motûs medii Lunæ, pendens à ſitu apogæi Lunaris reſpectu Solis; quæ maxima eſt, cùm apogæum Lunæ verſatur in octante cum Sole; & nulla, cùm illud ad ſyzygias vel quadraturas pervenerit. Æquatio hæc, quando maxima, ad $3'.\ 56''$. aſcendit, Sole in perigæo verſante; ſi verò Sol apogæum teneat, non ultra $3'.\ 34''$. In aliis diſtantiis Solis à Terrâ æquatio hæc maxima eſt reciproce ut cubus iſtius diſtantiæ. At cùm Lunæ apogæum eſt extra octantes, æquatio dicta evadit minor; eſtque ad maximam, poſitâ eâdem diſtantiâ Terræ & Solis, ut ſinus duplæ diſtantiæ lunaris apogæi à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium. Additur hæc motui Lunæ, dum lunæ Apogæum tranſit à Solis quadrato ad ſyzygiam; ſed inde ſubducitur, in tranſitu Apogæi à ſyzygiâ ad quadratum.

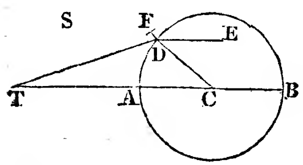
Æquatio Lunæ ſecunda.

7. Alia porro eſt motûs Lunæ æquatio, pendens ab aſpectu Nodorum

dorum orbitæ lunaris cum Sole: eſtque maxima, cùm nodi in Solis octantibus verſantur; evaneſcitque, cùm hi ad ſyzygias aut aſpectum quadratum appellunt. Æquatio hæc proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ, cúmque maxima ad $47''$ aſcendit. Additur hæc motui Lunæ, dum Nodi tranſeunt à Solis ſyzygiis ad ejuſdem quadraturas; & ſubducitur, in eorum tranſitu à quadraturis ad ſyzygias.

Argumentum Annuum, Eccentricitas, et Æquatio ſecunda Apogæi.

8. A Solis loco vero aufer motum medium apogæi Lunæ æquatum, ut ſuprà eſt oſtenſum; reſiduum erit argumentum annuum dicti apogæi. Exinde computentur lunæ Excentricitas & ſecunda æquatio ejus Apogæi, modo ſequenti. Referat T Terram; TS, rectam conjungentem Terram & Solem; TACB, rectam à Terrâ ductam ad locum medium Apogæi lunaris, ut ſuprà æquatum; angulus STA, argumentum annuum dicti apogæi; TA, lunaris orbitæ Excentricitatem minimam; TB, ejuſdem Excentricitatem maximam. Biſeca AB in C; centro C per A deſcribe circulum ADB; fiat angulus BCD æqualis duplo argumento annuo: juncta recta TD erit lunaris orbitæ Excentricitas, angulusque BTD erit ſecunda Apogæi lunæ æquatio. Ad horum determinationem ſit mediocris diſtantia Lunæ à Terrâ, ſive orbitæ lunaris ſemidiameter, partium 1000000: ejus maxima excentricitas, TB, erit partium 66782, & minima TA earundem 43319; adeo ut maxima orbis ejus æquatio, cum ſc. apogæum eſt in ſyzygiis, ſit $7^{gr}.\ 39'.\ 30''$, vel forſan $7^{gr}.\ 40'.\ 00''$ (ſuſpicio enim eſt hanc mutari pro ſitu apogæi in ♋ vel ♑); cùm verò illud in Solis quadrato hæret, dicta maxima æquatio ſit $4^{gr}.\ 57'.\ 56''$; & ut maxima apogæi æquatio ſit $12^{gr}.\ 15'.\ 4''$.



Æquatio centri Lunæ.

9. Conſtructâ ex hiſce principiis Tabulâ æquationum Apogæi lunæ & Excentricitatum ejus orbitæ ad ſingulos gradus argumenti annui; unde excentricitas TD & angulus BTD (ſc. æquatio ſecunda & præcipua apogæi) dato tempori congruentes facilè poſſint depromi: ad locum apogæi Lunæ primò æquatum, ut ſuprà, addatur æquatio modò inventa, ſi argumentum annuum minus ſit 90^{gr}, aut majus 180^{gr}, minus verò quàm 270^{gr}; ſecus verò

verò ab eo ſubducatur: ſumma vel differentia erit Apogæi lunaris locus ſecundò æquatus; quo ſubducto ex Lunæ loco tertiò æquato, relinquitur lunæ Anomalia Media dato tempori congrua. Porro, ex hâc anomaliâ Lunæ mediâ & modò inventâ orbis excentricitate habebitur (ope Tabulæ æquationum centri Lunæ ad ſingulos anomaliæ mediæ gradus, & aliquot excentricitates *v. g.* 45000, 50000, 55000, 60000 & 65000 fabricatæ) proſthaphæreſis ſive æquatio centri Lunæ, ut vulgò; quâ ſubductâ, in priori anomaliæ mediæ ſemicirculo, additâ verò in poſteriori, ad locum Lunæ hactenus ter æquatum, prodit Lunæ locus quartò æquatus.

Variatio.

10. Maxima Lunæ variatio, ſc. quæ contingit cùm Luna eſt in octantibus Solis, eſt ferè reciprocè ut cubus diſtantiæ Solis à Terrâ. Capiatur ea 37′. 25″ cùm Sol eſt in Perigæo, & 33′. 4″ cùm in Apogæo: fiantque Variationis hujus in octantibus differentiæ reciprocè ut differentiæ cuborum diſtantiarum Solis à Terrâ, & exinde conſtruatur Tabula prædictæ Variationis lunæ in octantibus Solis (ejuſve logarithmi) ad ſingulos denos vel ſenos vel quinos gradus Anomaliæ Mediæ: et pro Variatione extra octantes, fiat ut radius ad ſinum duplæ diſtantiæ Lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ita ſuprà inventa Variatio in octante ad Variationem dato aſpectui congruam; quæ addita loco Lunæ ſuprà invento, in primo & tertio quadrante (computando à Sole) aut ab eodem ſubducta, in ſecundo & quarto, exhibet Lunæ locum quintò æquatum.

Æquatio Lunæ ſexta.

11. Rurſus, ut radius ad ſinum ſummæ diſtantiarum Lunæ à Sole & Apogæi lunæ ab Apogæo ſolis (vel ſinum exceſſus iſtius ſummæ ſupra $360^{gr.}$) ita 2′. 10″ ad ſextam loci Lunæ æquationem; ſubducendam, ſi prædicta ſumma, vel dictus exceſſus, minor ſit ſemicirculo; addendam, ſi major.

Æquatio Lunæ ſeptima.

12. Fiat etiam ut radius ad ſinum diſtantiæ Lunæ à Sole ita 2′. 20″ ad æquationem ſeptimam. Hanc aufer, quando Lunæ lumen augetur; &, è contra, adde cùm illud minuitur; & prodibit Lunæ locus ſeptimò æquatus, quique eſt locus ejus in propriâ orbitâ. Notandum æquationem, quæ hîc effertur per mediocrem quantitatem 2′. 20″, non eſſe ejuſdem ſemper magnitudinis, ſed augeri & minui pro ſitu lunaris Apogæi. Nam ſi apogæum lunare

nare conjunctum fuerit cum Solis apogæo, prædicta æquatio eſt circiter 54″ major; ſin illi oppoſitum, tantundem minor: libratque inter maximam quantitatem 3′. 14″ minimamque 1′. 26″. Atque hæc obtinent, ubi Apogæum lunare eſt in Solis ſyzygiis; ubi verò illud in Solis quadrato hæret, minuenda eſt æquatio prædicta 50 circiter ſcrupulis ſecundis; aut integro ſcrupulo primo, quando apogæum lunæ & ſolis apogæum conjuncta ſunt; ſi verò ſunt oppoſita, propter obſervationum penuriam affirmare nequeo augendane ſit illa, an minuenda. Immo de ſuprapoſitis incremento & decremento æquationis 2′. 20″, propter obſervationum ſatis accuratarum defectum, certo ſtatuere non auſim.

13. Si æquationes ſexta & ſeptima augeantur vel minuantur in ratione reciprocâ diſtantiæ Lunæ à Terrâ, hoc eſt, in directâ ratione parallaxis horizontalis Lunæ; accuratiores fient. Atque iſtud prompte fiet, ſi priùs Tabulæ fuerint conſtructæ ad ſingula ſcrupula dictæ parallaxis, ſinguloſque ſenos vel quinos gradus cum argumenti æquationis ſextæ pro æquatione ſextâ, tum diſtantiæ Lunæ à Sole pro ſeptimâ.

Emendatio æquationum ſextæ ſeptimæque.

14. A loco Solis vero aufer medium motum Nodi aſcendentis Lunæ æquatum, ut ſuprà; reſiduum erit Nodi argumentum annuum; unde ejus æquatio ſecunda computabitur modo ſequenti. In figurâ præcedente referat ut priùs T Terram; TS, rectam jungentem Terram & Solem: referat porro TACB lineam ductam ad locum Nodi aſcendentis lunæ, ut ſuprà æquatum; & STA, argumentum annuum nodi. Capiatur TA ad AB ut 56 ad 3, ſive $18\frac{2}{3}$ ad 1. Biſeca BA in C; & centro C, intervallo CA, vel CB, deſcribe circulum ADB; fiatque angulus BCD æqualis duplo argumento nodi annuo, ut ſuprà invento; eritque BTD angulus æquatio ſecunda Nodi aſcendentis, addenda in tranſitu Nodi à Solis quadrato ad ſyzygiam, ſubducenda in ejuſdem tranſitu à ſyzygiâ ad quadraturam. Atque ſic habetur locus verus Nodi orbitæ lunaris: unde ex Tabulis, methodo vulgari conſtructis, ſupputabitur Lunæ latitudo & reductio Lunæ ab orbitâ ſuâ ad eclipticam, poſitâ inclinatione orbis lunaris ad planum Eclipticæ $4^{gr.}$ 59′. 35″, cùm nodi ſunt in Solis quadrato; & $5^{gr.}$ 17′. 20″ cùm iidem in ſyzygiis verſantur. Ex modò inventis longitudine & latitudine,

Æquatio Nodi ſecunda.

latitudine, & datâ obliquitate eclipticæ 23^{gr}. 29′, Lunæ afcenfio recta & declinatio eruentur.

Lunæ Parallaxis horizontalis, Motus horarius, et Diameter.

15. Lunæ in fyzygiis, mediocriter diftantis à Terrâ, parallaxin horizontalem pono 57′.30″; Motum horarium, 33′. 32″. 32‴; & diametrum apparentem 31′. 30″. In quadraturis verò, mediocriter à Terrâ diftantis parallaxin pono 56′. 40″; Motum horarium, 32′. 12″. 2‴; & diametrum apparentem 31′. 3″. Lunæ in Solis octante, mediocriter diftantis, centrum diftat à centro Terræ quafi $60\frac{2}{9}$ femidiametrorum Terræ.

Solis Parallaxis horizontalis et diameter.

16. Solis parallaxin horizontalem pono 10″; & 32′. 15″ apparentem ejus diametrum in mediocri diftantiâ à Terrâ.

Umbra Atmofphæræ terreftris.

17. Telluris atmofphæra, refringendo & diffipando Solis lumen, umbram projicit, perinde ac fi opaca foret, ad altitudinem minimùm 40 aut 50 milliarium geographicorum: (Milliare geographicum appello partem fexagefimam gradûs magni circuli in telluris fuperficie): umbra hæc, in eclipfi lunari in lunam incidens, telluris umbram auctiorem reddit. Et fingulis milliaribus atmofphæræ terreftris refpondent fingula fcrupula fecunda in lunæ difco. Adeoque umbræ terreftris femidiameter, in Lunæ difcum projecta, augenda eft 50 circiter fecundis; aut, quod eodem recidit, in eclipfi lunari Lunæ parallaxis horizontalis augenda eft in ratione circiter 70 ad 69.

LECTIONES OPTICÆ

Annis MDCLXIX, MDCLXX & MDCLXXI.

IN

SCHOLIS PUBLICIS CANTABRIGIENSIUM

EX CATHEDRA LUCASIANA HABITÆ.

ARGUMENTA CAPITUM

PARTIS PRIMÆ LECTIONUM OPTICARUM.

OPTICÆ PARS PRIMA.

DE RADIORUM LUCIS REFRACTIONIBUS.

SECTIO PRIMA.

Radiorum diversam esse Refrangibilitatem.

INVENTIO Telescopiorum nupera plerosque Geometras ita exercuit, ut nihil in Opticâ non tritum, nullum inventioni præterea locum aliis reliquisse videantur. Et insuper, cùm Dissertationes, quas hîc non ita pridem audivistis, tantâ rerum Opticarum varietate, novarum copiâ, & accuratissimis earundem demonstrationibus fuerint compositæ; frustranei forte videantur conatus & labor inutilis, si ego scientiam hanc iterum tractandam suscepero. Verùm cùm Geometras in quâdam Lucis proprietate, quæ ad Refractiones spectat, hucusque hallucinantes videam, demonstrationes suas in hypothesi quâdam Physicâ, haud bene stabilitâ, tacitè fundantes; non ingratum me facturum judico, si principia scientiæ hujus examini severiori subjiciam; & quæ ego de iis simul excogitavi, & experientiâ multiplici habeo comperta, subnectam iis, quæ Reverendus meus Antecessor hîc [a] loci postrema dixit.

[a] Barrovius.

Imaginantur

Radiorum diverſa

Imaginantur Dioptricês ſtudioſi, quòd Perſpicilla ad quemlibet perfectionis gradum perduci poſſent, modò vitris, dum perpoliuntur, geometricam, quam vellent, figuram communicare concederetur; & in eum finem Inſtrumenta varia fuêre excogitata, quibus vitra in figuras Hyperbolicas, vel etiam Parabolicas, contererentur. Sed exacta iſtarum figurarum fabricatio nemini hucuſque ſucceſſit: ſcilicet aratur litus, & ne labores ſuos in negotio deſperato diutius inſumant, iis polliceri audeo, quòd, licet omnia fierent feliciter, nihil minùs tamen quàm votis ſuis reſponderent. Etenim vitra, licet efformentur ſecundum figuras in iſtum finem optimas, quæ poſſunt excogitari, tamen non duplo plus præſtabunt, quàm ſphæricæ æquali politurâ perfectæ. Hæc autem non ideo loquor, quaſi peccatum eſſe à ſcriptoribus Opticês contenderem; illi enim omnia, pro intentione demonſtrationum ſuarum accuratè quidem & veriſſimè dixerunt; ſed aliquid tamen, idque maximi momenti, reliquerunt poſteris inveniendum; ſcilicet in refractionibus irregularitatem quandam reperio, quæ omnia perturbat; & non ſolùm efficit, ut figuræ conicarum ſectionum ſphæricas non multum ſuperent, ſed etiam ut ſphericæ multo minùs præſtent, quàm præſtarent, ſi dicta refractio eſſet uniformis.

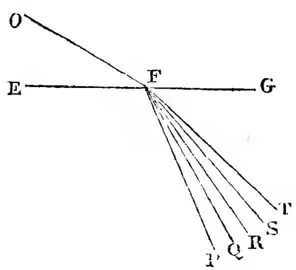
Itaque in Dioptricâ pedem figo, non ut eam pertractarem de integro, ſed tantùm ut hanc de naturâ Lucis proprietatem rimarer primò; deinde ut oſtenderem, quantum ex hâc proprietate perfectio Dioptricês impeditur; & quo pacto incommodum iſtud, quatenus natura rei ſinit, devitetur. Ubi & nonnulla proferam, quæ ad Teleſcopiorum juxtà & Microſcopiorum tum Theoriam tum Praxin ſpectant; oſtendens, quòd Opticês ſumma perfectio, præter opinionem receptam, ex Dioptricâ & Catoptricâ mixtis petenda eſt. Ac interea diſcrimen Colorum, & eorum geneſin à priſmatibus, & corporibus etiam coloratis, fuſè explicabo.

Quòd omnium Radiorum non ſit eadem Refrangibilitas.

2. De Luce itaque compertum habeo, quòd Radii ejus, quoad quantitatem refractionis, ab invicem differant. Ex iis, qui omnes habent eundem angulum incidentiæ, alii angulum refractionis aliquanto majorem, alii minorem habebunt. Plenioris illuſtrationis gratiâ, ſit EFG ſuperficies quælibet refringens, puta vitrea;

trea; & ducatur quævis OF huic occurrens in F, & cum eâ efficiens angulum OFE acutum. Concipe etiam radios ſolares per iſtam lineam OF ſibi continuò ſucceſſivos fluere, ita ut alii poſt alios in punctum F impingant, ibidemque in medium denſius refringantur; vel ſi mavis, finge parallelos radios indefinitè parum diſtare ab OF, & incidere in puncta ipſi F viciniſſimâ. Jam ex opinione receptâ, hi radii, eandem habentes incidentiam, eandem quoque refractionem omnes habere debent; puta in lineam FR. At contrarium compertum habeo; ſcilicet, quòd poſtquam refringuntur, divergant ab invicem; quaſi quidam refringerentur in lineam FP; alii in lineam FQ; & alii in lineas FR, FS, & FT; ac alii etiam innumeri per ſpatia intermedia; ut & ultra citraque nonnulli pervagantes, prout radius quilibet ad refractionem majorem minoremve patiendum ſit aptus. Invenio præterea, quòd Radii FP maximè refracti colores Purpureos producant; & illi FT minimè refracti Rubros; qui autem hiſce intermedii, FQ, FR, FS, pergunt, colores intermedios; nempe Cæruleos, Virides & Flavos generant: & ſic Radii, prout apti ſunt, ut alii aliis magis atque magis refringantur, hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum, & Purpureum generant, unà cum omnibus intermediis, quos in Iride liceat conſpicere; unde productio colorum Priſmatis & Iridis facilè patebit. Sed his jam perfunctoriè notatis, quæ de Coloribus dicenda ſunt, in poſterum differam.

Refrangibilitas.

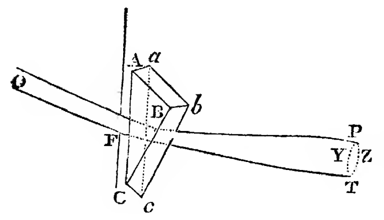


EXPER. I.

Probatur experimento vulgari per longitudinem imaginis ſolaris refractæ.

3. Sententiâ noſtrâ de hâc re ſic breviter explicatâ, ne putetis fabulas pro veris enarratas eſſe, rationes & experimenta, quibus iſthæc innituntur, continuò proferam. Et quoniam experimentum quoddam Priſmatis valde obvium mihi primò dedit occaſionem excogitandi reliqua, iſtum primum explicabo. Sit F foramen aliquod in pariete vel feneſtrâ cubiculi, per quod radii ſolares OF trajiciantur; reliquis ubique foraminibus diligenter obturatis,

Radiorum diverſa turatis, ne lux alibi ingrediatur. Iſta autem obſcuratio cubiculi non eſt prorſus neceſſaria, ſed efficit tantùm, ut experimentum evadat aliquanto evidentius. Deinde Priſma triangulare vitreum, AaBbCc, ad foramen iſtud applicetur; quod radios, OF, per ſe trajectos, refringat verſus PYTZ; quos radios oppoſito pariete, vel papyro aliquâ, ad diſtantiam à Priſmate ſatis magnam, objectâ, terminatos videbis in figuram PYTZ, cujus nempe longitudo PT ſit quadruplex latitudinis YZ, & amplius. Et hinc evinci certo videtur, quòd radiorum, æqualiter incidentium, alii majorem aliis refractionem patiuntur. Nam ſi contrarium eſſet verum, prædicta Solis imago appareret ferè orbicularis, & in quâdam poſitione Priſmatis ad ſenſum orbicularis conſpiceretur; id quod contra omnem experientiam eſt. Quocunque enim ſitu Priſma diſpoſui, nunquam tamen potui efficere, quin longitudo imaginis eſſet latitudinis pluſquam quadrupla; angulo ſcilicet priſmatis ACB, vel *acb*, exiſtente graduum plus minus ſexaginta.



Caſus in quo radii æque refrangibiles faciunt imaginem orbicularem.

4. Quòd autem datur quædam Priſmatis poſitio, in quâ Imago Solis, ex opinione de refractionibus receptâ, appareret orbicularis, ſic oſtendo. Juxta foramen, in feneſtrâ cubiculi factum, Priſma collocetur foras; vel, quod eodem recidit, ſit EG (*vid. Tab. fig.* 1.) corpus aliquod opacum, citra Priſma locatum, in quo ſit F foramen indefinitè parvum & orbiculare; per quod radii refracti, in parietem directè oppoſitum, ad imaginem PYTZ ibi depingendam, trajiciantur: & ponatur ABC eſſe planum ſecans A*ac*C, B*bc*C plana refringentia perpendiculariter, atque etiam tranſiens per foramen F, ut & per centrum Solis DIHV, quem biſecet ſecundum diametrum ejus DH, à cujus extremitatibus radii DK & HN, in eodem plano jacentes, adveniant; qui poſtquam refringuntur (DK in K*n* & *n*T, atque HN in N*k* & *k*P) utrinque pergant per centrum foraminis F; & præterea ſit talis inclinatio priſmatis ad iſtos radios, ut anguli AKD & B*k*F fiant æquales. Deinde ſit IV alia Solis diameter, prædicto plano ABC perpendicularis; à cujus

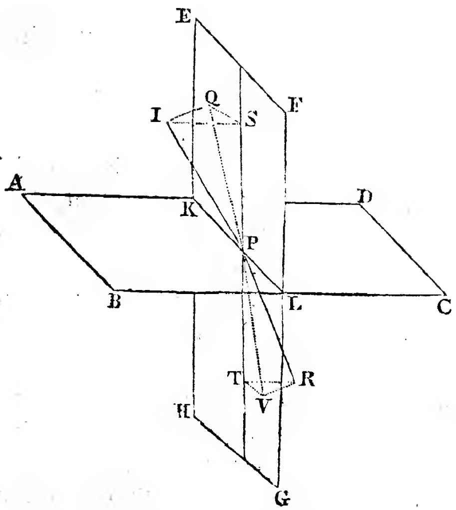
Refrangibilitas. jus extremitatibus alii duo radii, VL & IM, adveniant; alter IM cis planum ABC, qui refringatur in M*l* & *l*Y; alter verò VL ultra planum iſtud, qui refringatur in L*m* & *m*Z: & prædicti quatuor radii ſeſe omnes decuſſent in medio foraminis F. Denique ponatur, quòd imago lucida PYTZ foramen directè reſpiciat, ita ſcilicet ut FP & FT, item FY & FZ, æquales fiant. Dico jam, quòd in iſtâ poſitione priſmatis, anguli PFT ac YFZ æquales eſſent, ſuppoſito radios omnes æquè refringi, qui eundem habent angulum incidentiæ; & proinde quòd imago iſta ſenſui ſaltem deberet eſſe orbicularis; utpote cujus diametri PT & YZ ſeſe decuſſant perpendiculariter, & æquales iſtos angulos ſubtendunt.

Demonſtratio caſus iſtius. Pars I.

5. Angulos autem iſtos PFT & YFZ æquales eſſe, ſic demonſtro. Concipe radium aliquem à P per *k* & N retrocedere, dum alius radius pergit à D per K & *n*; itaque, cùm anguli AKD & B*k*F ſupponantur æquales, erunt etiam anguli per primas refractiones facti, AK*n* & B*k*N, æquales; unde triangula CK*n* & C*k*N erunt ſimilia, & eorum anguli externi *k*NA, K*n*B æquales; & proinde anguli per ſecundas refractiones facti ANH & B*n*F ſunt æquales. Quare, cùm anguli AKD & B*k*F, item ANH & B*n*F ſint æquales, eorum differentiæ erunt etiam æquales; hoc eſt, angulus *n*F*k* ſive PFT æqualis angulo, quem radii DK & HN comprehendunt, ſive diametro ſolari. Quare, cùm demonſtratum fuerit, quòd angulus YFZ æquatur eidem diametro, liquebit propoſitum. Iſtud autem ut fiat, Theorema quoddam, more Lemmatis, præſternendum eſt.

Lemma ad ſecundam partem demonſtrationis.

6. Sint duo plana ABCD & EFGH (*fig. p.* 258) ſibimet perpendicularia, quorum communis interſectio ſit KL; & ſit IP radius quilibet, qui, in planum ABCD incidens ad punctum P, ab eo refringitur in PR; dico, quòd ſinus anguli, quem radius incidens, IP, efficit cum plano perpendiculari FH, ſit ad ſinum anguli, quem radius refractus, PR, efficit cum eodem plano, ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, & proinde in ratione datâ. Sumptis enim radiis IP & PR æqualibus, & demiſſis IQ & RV ad planum FH perpendicularibus; & præterea ad punctum incidentiæ P erectâ SPT perpendiculari ad planum refringens BD (quæ ideo cum altero plano FH coincidet) & ad iſtam demiſſis IS & RT iterum perpendicularibus; erit



erit IPQ angulus, quem radius incidens IP efficit cum plano perpendiculari FH, & RPV angulus, quem radius refractus PR efficit cum eodem plano. Item IPS angulus incidentiæ, & RPT angulus refractionis. Quare, ſi IP vel PR ſupponatur radius circuli, erunt IQ, RV, & IS, RT dictorum angulorum ſinus. Sed IQ & RV ſunt paralleli (6. 10. Elem.) propterea quòd eidem plano FH ſunt perpendiculares. Item IS & RT ſunt paralleli (28. 1. Elem.) quia jacentes in eodem plano, ISPTR, eidem rectæ, ST, perpendiculariter inſiſtunt. Hoc eſt, rectæ IQ, IS, quæ angulum QIS comprehendunt, ſunt parallelæ rectis RV, RT, conprehendentibus angulum VRT. Quare iſti anguli, QIS & VRT, ſunt æquales (10. 11. Elem.) Ductis autem QS & VT, fient anguli IQS & RVT recti (Def. 3. 11. Elem.) quia rectæ IQ & RV plano FH perpendiculariter inſiſtunt. Ergo triangula IQS & RVT ſunt ſimilia (4. 6. Elem.) & IQ.RV :: IS.RT; hoc eſt, ſinus angulorum, quos radius incidens & refractus efficiunt cum plano aliquo FH ad refringens planum BD perpendiculari, ſunt ut ſinus incidentiæ & refractionis, & proinde in ratione datâ. Quippe ſinuum iſtorum rationem eſſe datam Carteſius edocuit, & alii deinde fuerunt experti.

Quinetiam Theorematis jam demonſtrati veritas manebit ſalva, licet planum FH plano refringenti BD alibi perpendiculariter inſiſtat, quàm ad punctum refringens P. Exinde enim neque anguli cum radiis & plano FH effecti, neque ideo ſinus iſtorum angulorum immutabuntur.

Pars ſecunda Demonſtrationis. 7. Hiſce ita præmonſtratis, ad propoſitum jam revertar; demonſtraturus ſcilicet angulum YFZ (*vid. Tab. fig.* 1.) diametro Solis, ac proinde angulo PFT æquari. Ex ſuprà poſitis liquet, quòd planum

planum KDHN*k*F*n* biſecat angulum radiis IM & VL utrinque jacentibus contentum. Itaque, cùm iſte angulus æquetur diametro ſolari; angulus, quem radiorum alter, puta IM, cum dicto plano faciet, æquabitur ſemidiametro ſolari, cujus eſto ſinus A; & B ſinus anguli, quem radius iſte refractus M*l* facit cum eodem plano. Jam, cùm planum iſtud ſupponatur perpendiculare ad Priſmatis refringens planum A*c*, erit ex præcedenti Lemmate, ſinus A ad ſinum B ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis è Medio rariori in Medium denſius. Vel è contra ſicut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis è Medio denſiori in rarius, ita erit B ad A. Quare, cùm dictum planum DHF etiam perpendiculare ſit ad alterum Priſmatis planum BC, quod radios è medio denſiori in rarius refringit; & inſuper, cùm B ſupponatur anguli ſinus, quem radius incidens M*l* facit cum plano iſto perpendiculari DHF, erit (per Lemma præcedens) A ſinus anguli, quem radius refractus *l*F facit cum eodem plano DHF; ſed A ponitur ſinus ſemediametri ſolaris, ergo ille angulus, quem radius *l*F facit cum plano DHF, æquetur ſemidiametro ſolari, & ejus duplus *l*F*m* ſive YFZ toti diametro; &, cùm ſuprà fuerit oſtenſum, quòd angulus PFT ſit eidem diametro æqualis, iſti duo anguli YFZ & PFT erunt æquales. Q. E. D.

Jam, ſi planum YFZ eſſet perpendiculare plano imaginis PYTZ, æquè ac planum PFT, iſtæ quatuor lineæ FP, FT, FY & FZ, quæ angulos æquales comprehendunt, eſſent omnes inter ſe æquales; & proin ſubtenſæ PT & YZ etiam æquarentur. Sed qui rem ſerio perpendit, inveniet radios collaterales VL*m*FZ & IM*l*FY duobus reliquis, DK*n*FT & HN*k*FP, paulo minus refringi; & idcirco planum YFZ paulo magis declinabit à radio FP quàm ab FT, ſecans lineam PT infra medium ejus punctum X; & ſic divaricans à perpendiculari EX (quam concipe ductam) erit aliquantulum obliquum ad planum imaginis PYTZ; & eâ de cauſâ lineæ FY & FZ erunt paulo majores quàm FP & FT, & ſubtenſa YZ paulo major quàm ſubtenſa PT. Sed hujus rei demonſtrationem, utpote nimis longam & propoſito meo non omnino neceſſariam, prætermitto. Etenim non multum refert, utrum planum YFZ ſit rectum ad planum imaginis PYTZ vel nonnihil obliquum, hoc eſt, utrum YZ ſit æqualis vel major quàm PT; ſufficit, quòd nequit eſſe minor. Imo cùm

cùm propter iſoſcelea triangula PFT & YFZ, ſit FP.FY : : PT.YZ, atque FP & FY ſint quàm proxime æquales, tantilla erit inter PT & YZ differentia, ut quoad ſenſum pro æqualibus haberi poſſint.

In iſto tamen caſu longitudo imaginis pluſquam quadruplex eſt latitudinis. Unde varia refrangibilitas evincitur.

8. Oſtenſus itaque caſus eſt, in quo longitudo ſolaris imaginis, per priſma trajectæ, conſpiceretur æqualis ejuſdem latitudini, & proinde in quo imago iſta quaſi orbicularis appareret, modò vera eſſet opinio vulgaris. Quinimo, licet poſitio priſmatis alia ſit, atque deſcripſi, modò radii utrinque refractionem non valde inæqualem patiantur, figura tamen imaginis eapropter vix immutabitur: nec multum intereſt, an corpus opacum EG, foramine F ad radios tranſmittendos terebratum, citra priſma collocetur vel ultra; neque figura foraminis multum curanda eſt, modò ſit exigua. Etenim tam parvæ variationes haud plus mutabunt imaginem, quàm decimâ forte vel quintâ parte diametri ſuæ; ſicut cogitanti patebit. Atque ita, ut paucis tandem comprehendam omnia, liquet, quòd imago Solis refracta ut plurimum deberet eſſe ſenſui quaſi orbicularis; ſi modò ejuſdem incidentiæ in idem Medium refractio ſemper foret eadem. Sed prius repugnat Experientiæ, longitudine ſcilicet ejus latitudinem pluſquam quatuor vicibus, ut dictum fuit, excedente. Ergo poſterius repugnat Veritati, & ejuſdem Incidentiæ Refractio eſt varia.

Ejuſdem rei demonſtratio brevior.

9. Ex eodem experimento potui propoſitum ſic breviùs indicaſſe; nempe, cùm ita diſpoſuiſſem Priſma, ut refractio radiorum tum ingredientium tum egredientium foret quaſi æqualis, angulos PFT & YFZ (fig. 1. Tab.) dimenſus ſum; & inveni quidem angulum YFZ ſemiſſi gradûs, ſive diametro Solis, æqualem. At angulus PFT eandem diametrum quater & ampliùs ſuperavit, cui tamen æqualis eſſe debuiſſet ex parte priori præcedentis demonſtrationis; & inde planiſſimè liquet propoſitum. Verùm in eorum gratiam, quæ mox ſequentur, oporteret demonſtraſſe, quod illi radii, quorum refrangibilitas non eſt diſpar, efformabunt imaginem ferè orbicularem; & eâ de re mihi viſum fuit demonſtrationem iſtam etiamſi longiuſculam, in illuſtrationem hujus Experimenti, hîc adduxiſſe.

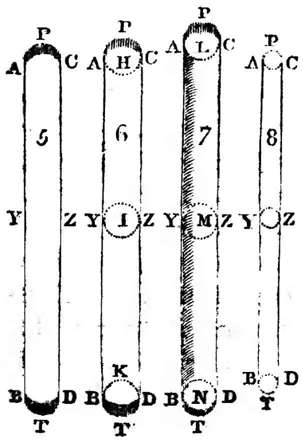
Quo pacto priſma facile ſtatui poteſt in ſitu ad experienda prædicta requiſito.

10. Verùm, cùm in experiendis prædictis eam eſſe poſitionem priſmatis ſuppoſuerim, ut Radii ad utramque faciem priſmatis æqualiter refringantur; concluſionis loco, dicam, quâ ratione iſtud cità

citò fiat & facilè. Si priſma teneatur in luce ſolari, & motu lento circa axem ſuum convertatur, videbis colores, quos efficit, de loco in locum continuo motu tranſlatos eſſe, ita quidem ut aliquando progredi, deinde verò regredi videantur. Obſervabis itaque medium inter iſtos contrarios motus, quando colores modò progreſſi, & ſtatim regreſſuri, videntur quieſcere; quod ubi vides, ſiſte priſma, idque in iſto ſitu fige. Dico factum. Scilicet in eo ſitu ſumma refractionum utrobique factarum, ſive radii Emergentis ad Incidentem inclinatio, evadit omnium minima *. Quod cùm accidit, refractiones utrobique ſunt æquales; uti poſthac demonſtrabitur.

Imaginis præfatæ figura deſcribitur, quæ partim rectis, partim ſemicirculis comprehenſa eſt.

11. Cæterum Experimenti hujus varias circumſtantias, non minus jucundas experienti, quàm propoſiti noſtri indicativas, proſequi jam animus eſt. Et primum notandum venit, quòd Imaginis iſtius figura, ſecundum longitudinem ſuam lineis rectis terminata fuit, & ſecundum latitudinem duobus (ut ex viſu potui judicare) ſemicirculis.



In figura 5ta. ſit PT imago ſolis priſmate refracta; hanc obſervabam ad latera duabus lineis, AB & CD, quoad ſenſum rectis & ſibi parallelis, terminari; ad extremitates autem, duobus ſemicirculis APC & BTD; cujus quidem eventûs cauſa ex præmonſtratis ſic determinatur.

Quomodo talis evadit per circulares imagines (quas unumquodque genus radiorum æquabiliter refrangibilium facit) in longum diſpoſitas.

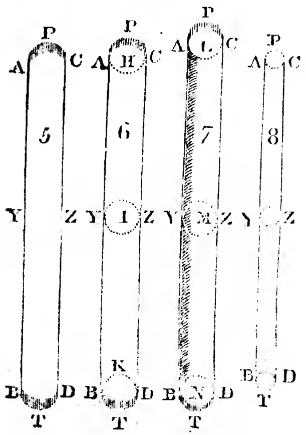
12. Semicirculi illi terminantes in circulos compleantur, ut vides in figurâ ſextâ, & alius inſcribatur circulus, YZ, iſtis intermedius. Jam concipe radios quoſdam à Sole provenientes, qui apti ſunt, ut æqualiter incidentes etiam æqualiter refringantur. Illi per Priſma trajecti, ex ſuprà demonſtratis, imaginem quoad ſenſum (ſi ſola poſſet videri) circularem depingent, puta BD. Deinde concipe alios ejuſdem Solis radios, ſibi etiam conformes, qui apti ſunt ut prioribus paulo magis refringantur; illi itaque aliam imaginem depingent circularem, puta YZ. Et alios etiam radios adhuc ma-

* Lege *maxima*. Vid. Sect. III. Prop. XXV.

gis-

Radiorum diversa

gis refrangibiles concipe, qui tertiam circularem imaginem AC efficient. Denique alios innumeros cogita, prædictis plus & minus refrangibiles; & illi alias etiam innumeras circulares imagines, prioribus tum intermedias tum extremas, efformabunt, illuminantes oblongum spatium PYTZ, rectis lineis, AB & CD, duobusque semicirculis contentum. Verùm, cùm imagines illæ sint omnes ejusdem pene magnitudinis, & inter lineas AB & CD in directum dispositæ, istæ lineæ AB & CD pro rectis sibi parallelis haberi possunt, & ad sensum tales videbuntur; & sic totum spatium PYTZ, radiis ex eâdem incidentiâ variè refractis illuminatum, partim parallelis rectis & partim semicirculis oppositis terminabitur; sicut Experientiâ compertum est.



Exinde deducitur Experimentum, quo termini recti fiant distinctissimi.

13. Hanc autem conjecturam ut penitus probarem, cogitabam de imagine Solis per foramen aliquod sine ullâ refractione ad distantiam magnam trajectâ; scilicet quòd male definitur, termino existente inter lucem & tenebras minimè distincto: at si radii isti per lentem convexam transeant, cujus focus ad imaginem est, imago terminabitur distinctissimè. Simili modo de radiis æquè refrangibilibus intellexi, quòd, si per Prisma trajicerentur ad distantiam magnam, depingerent imaginem circularem malè definitam; cujus tamen terminus, mediante lente convexâ, distinctissimus evaderet. Itaque, cum vidissem terminos imaginis refractæ PYTZ non admodum distinctos; de imaginibus BD, YZ, AC & reliquis circularibus, oblongam istam formantibus, conjiciebam, quòd multo distinctius terminarentur per lentem convexam trajectæ quàm aliter; & experienti res patuit. Nam rectas AB & CD, in quas imagines omnes istæ circulares utrinque terminantur, vidi admodum distinctas, quas antea confusas videram.

Quare termini circulares semper apparent confusi.

14. Sed, quod notatu valdè dignum videtur, termini circulares, APC & BTD, imaginis illius semper apparuere maximè confusi, luce paulatim deficiente donec tandem in tenebras desiit. Scilicet

Refrangibilitas.

Scilicet intermedii circuli, ut YZ, miscentur aliis circulis utrinque cadentibus; quibuscum ex aliquâ sui parte coincidunt. At extremi quidem circuli, AC & BD, ex unâ tantùm parte cum aliis concurrunt; & eorum concursus continuò fit rarior, & exinde lux usque remissior, dum ad extremitates P ac T deventum est. Sed & alia prodit istius rei causa; scilicet quòd radiorum maxima copia apta sit, ut mediocrem refractionem patiatur, & sic in medium imaginis incidat; & quòd eorum numerus continuò minor existat, quibus competit gradus refrangibilitatis alterutrinque magis extremus.

Admonitio de figurâ & situ Lentium & Prismatum.

15. Cæterùm ad isthæc experienda lentes adhiberi vellem, quarum foci sint longinqui, sex fortè vel duodecim pedibus à lentibus distantes, modò tales præsto sint: saltem non sint minùs distantes quàm duobus. Atque etiam latera prismatis debent esse accuratè plana; sin latera ejus sint aliquatenus convexa, tum præstat adhibere lentem, cujus focus ad pedes tantùm duos vel tres à se remotus est. Quibus paratis, lentem Prismati ex utrâvis parte colloca vicinam; ita scilicet ut radios, per se trajectos, directè respiciat. Deinde radii in papyrum aliquam excipiantur, quam ultro citroque transfer, donec imaginem coloratam utrinque rectis parallelis distinctissimè terminatam videas.

Deque imagine quâdam orbiculari.

16. Sed observandum est, quòd, cùm Prisma collocatur ultra foramen F (ut in Tab. fig. 1.) vel ipsi quàm proximè citra, & lens magis distat ab isto foramine, quàm focus lentis, quem radii in eam parallelos incidentes efficerent, distat à lente; duplicem invenies casum, in quo imago in papyrum projecta evadet distincta: alter, quando radii omnes homogenei, qui in lentem paralleli incidunt, ita refringuntur, ut ad papyrum istam in eodem puncto concurrant; quod fit, quando vides imaginem coloratam oblongam, & parallelis rectis distincte terminatam: alter casus est, quando radii omnes homogenei ab uno puncto foraminis F divergentes, postquam à lente refringuntur, ad unum iterum punctum dictæ papyri convergunt. Id autem accidit, cùm imaginem albam, orbicularem, & undique benè definitam vides. De quo fusè dicetur alibi. Sufficeat hoc monitum hìc dedisse, ne quis propriis oculis hæc experturus, per ambiguitatem effectûs incautè decipiatur, & exinde prædicta in dubium revocet.

17. Juvat

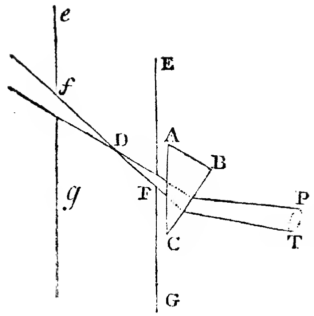
Ac de umbris nebularum ſolem intercedentium.

17. Juvat annotare præterea, quòd nebulæ aliquæ tenuiores interceperunt diſcum Solis, eum non penitus obſcurantes, & umbras in hanc imaginem PT projecerunt non ſui ſimiles, ſed in longum protenſas, & imaginis terminis rectilineis parallelas. Id quod ratiociniis modò allatis accuratè convenit. Nam concipe nebulam aliquam in diſco Solis ad inſtar maculæ conſpicuam eſſe; & ea, ſi radii maximè refrangibiles circuloque AC (fig. 7.) circumſcripti ſpectentur, umbram projiciat in locum L, ita ut circulus AC cum umbrâ L diſcum Solis, nebulâ deficientem, referat. Quo poſito, ſi radii minimè refrangibiles circuloque BD circumſcripti ſpectentur, umbra nebulæ ab iis projicietur in locum N, cujus talis erit ſitus in circulo BD, qualis eſt ipſius L in circulo AC; quippe hic etiam diſcum ſolis, nebulâ deficientem, refert. Atque idem porro diſcurſus de circulo quolibet intermedio cum umbrellâ ejus M intelligatur; adeo ut propter indefinitam multitudinem circulorum, ſpatium integrum ABDC occupantium, nebula ſuas umbras per totam longitudinem LN diſpergat, eamque reddat obſcuram; & ſic, cùm plures nebulæ, vel nubium ſinus, Soli interveniant, imago ejus plurimis umbris in longum diffuſis & parallelis obſcurabitur.

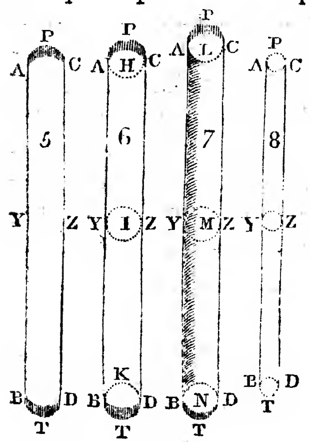
EXPER. II.

Ab imaginis figurâ aliud etiam experimentum deducitur, quo fiat multum oblongior.

18. Ut dictas proprietates Lucis, quâ potui diligentiâ, perſcrutarer, ſequentem præterea modum excogitavi, quo illas examini ſubjicerem. Nempe (in fig. 6.) cum magnitudo circulorum AC, YZ, BD dependeat à magnitudine ſolari, ſi diameter Solis fieret aliquanto minor, quàm nunc reverâ exiſtit, tum illi etiam circuli fierent minores, diſtantiâ centrorum H, I, K, non omnino mutatâ, ut videre eſt in fig. 8. Et ſic latitudo imaginis, ad ejuſdem longitudinem comparata, multo minor evaderet quàm antea, utrâque ſcilicet per eandem quantitatem diminutâ. Hæc probaturus effeci, ut radii Solis per duo parva foramina, ab invicem longè diſtantia, tranſirent, antequam inciderent Priſmati; quo pacto radii ab extremis partibus Solis venientes excludebantur, & res perinde ſucceſſit, quaſi diameter Solis reverâ eſſet diminuta. Illuſtrationis gratiâ, ſit *efg* feneſtra, parvo foramine *f* penetrata, per quod radii ſolares cubiculum, aliàs obſcuratum, ingrediantur;



diantur; deinde ſit EFG corpus aliquod opacum perforatum ad F, & in medio cubiculo ita locatum, ut radii iterum permeent foramen iſtud, antequam Priſma ABC, ponè locatum, attingant. Jam foraminum iſtorum diametro exiſtente $\frac{1}{8}$ digiti, & eorundem diſtantiâ, *f*F, 12 pedibus (ita ſcilicet ut maxima radiorum, utrumque foramen permeantium, inclinatio foret angulus ferè minutorum 6, hoc eſt, quaſi quinta pars diametri ſolaris) atque etiam imagine PT projectâ in papyrum, decem pedes à Priſmate diſtantem, prout anguſtia cubiculi tulit: inveni longitudinem imaginis eſſe pluſquam quatuor digitorum cum ſemiſſe, & latitudinem trientis digiti; hoc eſt longitudinem pluſquam quatuordecim vicibus majorem latitudine, ſicut ex prædictis oportet eveniſſe. Etenim cùm iſti tantùm radii mittuntur intro, qui minus quàm quintâ parte ſolaris diametri ad ſe invicem inclinantur, diametri AC, YZ & BD diminutæ diametro foraminis F, debent eſſe quintuplo minores quàm ſecundum priora contingeret; ut videre eſt in fig. 6 & 7. quaſi à Sole eſſent effectæ, cujus diameter ſit quinquies minor diametro Solis noſtri. Verùm, ſi corpus opacum *fg* tolleretur, ut radii per unum ſolummodo foramen F ad Priſma tranſirent, ſicut in prioribus factum eſt, latitudo imaginis evaderet $1\frac{1}{6}$ digitorum, & longitudo pluſquam 5 dig. angulo nempe Priſmatis exiſtente 60 grad. vel paulo majori. Itaque diameter circulorum, AC, YZ & BD, qui eo, quo dictum eſt modo, imaginem conſtituunt, eſſet $1\frac{1}{6}$ dig. à quâ ſubducatur diameter foraminis, nempe $\frac{1}{8}$ dig. & manebit $1\frac{1}{24}$ dig. cujus quintæ parti rurſus adjungatur eadem foraminis diameter ſive $\frac{1}{8}$ dig. & prodibit $\frac{1}{3}$ dig. diameter circulorum AC, YZ, & BD in fig. 8. quæ minor eſt quàm diameter circulorum iſtorum in fig. 6, quantitate

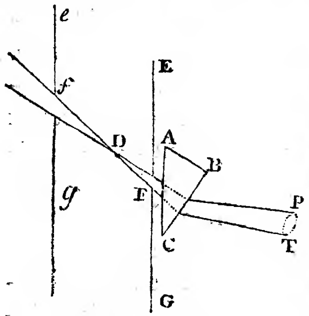


Radiorum diversa

$\frac{1}{6}$ dig. Quamobrem figura 8 quaquaverſum eſt minor quàm ſexta, quantitate $\frac{5}{6}$ dig. Atque ideo longitudo ejus fit pluſquam 4 dig. latitudo autem digiti triens. Id quod cum experientiâ modò recenſitâ quadrat. Ad eundem modum, ſi foramina f & F adhuc minora forent, vel ſi diſtantia fF foret major, imago PT oblongior evaderet. Quod idem quoque quadantenus contingeret, ex imagine PT à Priſmate longiùs diſſitâ. Cæterùm notandum eſt, quòd foramina f & F ad radios directè reſpicientia ſupponam; licet non multum refert, an ſitus eorum ſit parum obliquus, ut in appoſitâ figurâ nonâ factum eſt.

Experimentum iſtud promovetur.

19. Porro ſi in hoc experimento convexam lentem ut priùs adhibueris, cujus focus ad imaginem cadit, foramine F (ſi placet) dilatato, vel opaco corpore EG prorſus ablato, ut radii per foramen longinquum f ſolummodo tranſeant, &, ſi foramen iſtud f effeceris anguſtius quàm antea, cæteris ut priùs ſtantibus; imaginem valdè oblongam, &, pro longitudine, lucidiorem videbis quàm in caſu priori. Exempli gratiâ, ſi diameter foraminis ſit pars digiti vigeſima, & ſi pedibus ab inde duodecim priſma cum lente diſpoſueris, videbis longitudinem imaginis pluſquam octoginta vel centum vicibus latitudine majorem. Sed in his experiendis oportet cubiculum quaquaverſus benè obturatum eſſe; ne lux alibi quàm per foramen f ingreſſa perturbet imaginem, & juxta circulares ejus extremitates obſcuram reddat: et præterea, ſi ſuperficies Priſmatis ſint accuratè planæ, præſtat adhibere lentem, quæ focum ad diſtantiam magnam projicit; puta, ad 12 vel 20 pedes, modò loci amplitudo ſinat, quo pacto de proportionibus imaginis melius judicium proferas. Quòd ſi latera Priſmatis ſint aliquantulum convexa, ut iis nonnunquam contingit, quæ vulgò venduntur, licebit iſtud abſque ullâ lente ſolum adhibere; & ejus convexitas radios, vice lentis, ad magnam diſtantiam congregabit. Quinimo, ſi cum Priſmate quolibet lentem parvam adhibeas, cujus focus non ſit duobus tribuſve pedibus longinquior, imaginem conſpicies ſatis longam quidem,



sed

ſed cujus latitudo haud ſenſibilis exiſtit. Id quod propoſito noſtro non minùs inſervit, quàm ſi poſſes de proportione longitudinis ad latitudinem ejus accuratè judicare. In iſtis etiam experiendis notetur præterea, quòd lens non debet ita longè poſt Priſma locari, quin poſſet ad omnes radios ſimul tranſmittendos extendi, ne imaginem ſucceſſivè per partes tantùm obſervare ſis coactus: et notetur denique, quòd ſi foramen F citra Priſma locaveris, & lentem deinceps citra foramen iſtud, ad diſtantiam majorem ab eo quàm focus radiorum, à foramine f longinquiori manantium, abeſt à lente; duplex erit caſus, in quo imago in papyrum projecta conſpicietur diſtincta: prout radii venientes à ſingulis punctis foraminis F, aut à ſingulis punctis foraminis f, in totidem itidem punctis papyri colliguntur. In uno caſu imago erit alba & orbicularis, ut prius (§ 16) commonui, in alterâ autem oblonga & colorata, ſicut præſens experimentum exigit.

Refrangibilitas.

20. Jam liquet ex præfatis, quòd imaginis PT latitudo ſemper evadit eo minor, quo foramen longinquum f factum eſt anguſtiùs; ut nihil dubitandum ſit, quin dicta latitudo prorſus evaneſceret, ſi vice foraminis iſtius tranſlucidi unum duntaxat punctum ibi lucidiſſimum exiſteret: atque iſtud ſic futurum eſſe confirmatur ex obſervatione non diſſimili, quam habui quondam de ſtellâ Veneris. Cubiculo nempe quaquaverſus obturato, excepto foramine paulo pluſquam duos digitos lato, ut tenebroſiſſimum efficeretur: in iſto foramine vitrum objectivum Perſpicilli ſeptempedalis collocavi; latitudine ejus, ad ſufficientem radiorum copiam tranſmittendam, duos digitos & amplius apertâ. Deinde ad diſtantiam ſeptem pedum papyro tranſverſè poſitâ, in eam vidi ſideris imaginem ad inſtar puncti lucidi projectam; & interpoſito Priſmate ad diſtantiam pedis unius duorumve ab iſtâ papyro, per quod radii trajecti aliò refringerentur: pro puncto illo lucido ad diſtantiam inde pluſquam pedalem, vidi lineolam, licet non valdè lucidam, facilè tamen conſpicuam, & cujus longitudo ſemiſſem digiti ſuperavit, latitudo autem fuit quoad ſenſum nulla, ſaltem haud major quàm ut ſentiretur. Atque idem credo de ſtellis primæ magnitudinis, uti de Sirio liceat obſervare; præſertim ſi lens adhibeatur quatuor vel ſex digitos lata, ut plures radios tranſmittat.

Magis adhuc promovetur per imaginem ſtellæ Veneris;

 21. Hoc

& applicatur descriptioni refractionis ad fig. 1. traditæ.

21. Hoc experimentum, quàm benè convenit cum explicatione nostrâ, quam de Refractione radiorum, ad eundem angulum incidentium variâ, sub initio dedi, operæ pretium videatur adnotare. In figurâ pag. 255, suppofui complures radios per eandem rectam in superficiem aliquam refringentem successivè delatos esse, ibidemque alios aliis paulo magis gradatim refringi. Quod si fieri concipiatur, abundè sequeretur, quòd radii sic refracti, si corpore deinceps opaco quovis, ut papyro, interciperentur, lineolam ibi lucidam depingerent. Jam licet radii à stellâ aliquâ venientes non omnes in eâdem rectâ pergant, tamen, quod tantundem est, pro parallelis haberi possunt; & quòd à lente convexâ effecti sunt convergentes, antequam attingant Prisma, hoc adeo non destruit analogiam, ut eam maximè confirmet. Etenim pro singulis in eâdem rectâ pergentibus, debes tantùm concipere tot radiorum penicillos, qui omnes habeant eundem axem, & idem punctum concursûs; & quòd istorum penicillorum alii magis aliis à Prismate refringuntur, ita ut eorum puncta concursûs, sive foci, qui prius coincidêre, jam singuli cadant seorsim, lineam rectam conficientes. Ac proinde, quòd axes penicillorum, qui radiis puta successivis, eousque coincidebant, donec attigere Prisma, ibi per variam refractionem sint effecti divergentes; ut ad focos penicillorum, in lineâ rectâ jacentes, pergant.

Circumstantia variata eidem descriptioni rursus applicatur.

22. Si Prisma stellæ Veneris vicinius quàm lentem collocaveris, ut radii per illud trajiciantur primò, & à lente deinde convergentes fiant, eandem lineolam ut priùs videbis, licet minùs conspicuam & inventu difficilliorem. Jam in hoc specimine, cùm radii omnes adveniant paralleli, si æqualiter refringerentur transeuntes prisma, manerent postea paralleli, usque dum lenti inciderent, & in eâ proinde sic refringerentur, ut omnes deinceps ad idem punctum pergerent, & sic punctum lucidum conspiceretur. Quare, cum vice puncti istius apparet linea, concludendum est, quòd omnes radii non æqualiter refringuntur.

Quod in adductis experimentis refractiones non casu fiunt inæquales, neque aliâ causâ

23. Si jam objiciat aliquis, quòd in refractionibus quidem detur irregularitas, sed eam esse contingentem, & non ex prævià radiorum dispositione, vel ullis certis legibus ortam; respondeo, quòd imago Solis præfata, si radiis nullâ certâ lege refractis fieret oblonga, non posset in lineas rectas secundum longitudinem suam distinctè

distinctè terminari, sicut ad figuram quintam ostensum est. Quinetiam non omnino deberet esse oblonga, sed parte ejus mediâ & magis splendidâ in morem orbis effingi; sensibilique termino distingui ab erraticâ luce debiliori quaquaversum dispersâ: perinde ut Sol apparet, cùm nubibus penè obscuratur; vel ut ejus imago cernitur, cùm trajicitur per laminam vitream parallelis planis terminatam, & halitu vel fumo levitur obductam, ut lux inter refringendum paululum conturbetur. Adhæc, si duo Prismata similia ABC & *abc* (vid. Tab. fig. 2.) juxtà ponantur, secundum longitudines suas parallela, cum lateribus planis AC & *ac*, ut & BC & *bc* parallelis; & si Sol transluceat utrumque in locum Z, ubi corpus opacum luci directè opponitur, radiis tamen ejus per orbiculare foramen F priùs trajectis: lux incidens in dictum Z apparebit distinctè orbicularis, non secus quàm si directè tenderet ab F, prismatibus non omnino interpositis. Fatendum est itaque, quòd utriusque Prismatis conjunctim refractiones sunt regulares, & proinde etiam refractiones alterutrius. Scilicet radii illi similiter incidentes, non omnes æquè refringuntur in primo prismate ABC, ut neque in secundo *abc*; tamen cùm ea refractionis inæqualitas non contingens sit, sed oriatur ex prævià radiorum dispositione; ideo licet varii radii variè refringuntur, tamen ejusdem radii eadem erit refractionis quantitas in utroque Prismate, & quantùm incurvatur à priori ABC, tantum recurvabitur à posteriori *abc*; unde radius quilibet, utcunque sit refrangibilis, postquam ex utroque Prismate emerserit, sibimet ipsi, cùm nondum iis inciderat, fiet parallelus. Atque ideo, cùm omnes ad easdem plagas tendant, ad quas liberè tenderent, si Prismatibus non interciperentur; necesse est, ut eandem orbicularem imaginem ad Z exhibeant, quàm illuc liberè tendentes exhiberent. Quòd si imago oblonga, per refractionem unici Prismatis (ut dictum est) effecta, figuram suam à radiis nullâ certâ lege divaricantibus, sed forte fortunâ huc illuc vagè refractis, acquireret; cùm refractiones binis Prismatibus geminentur, errores etiam radiorum duplo plures evaderent, ut & duplo majores; & exinde imago ad Z fieret multo oblongior; quæ tamen, experientiâ teste, in orbem contrahitur.

quàm inæquali refrangibilitate.

24. Nonnullis forte in suspicionem veniet, quòd terminatio Lucis, sive quiescentis Medii confinium, diversitatem refractionis efficiat;

Radiorum diversa refrangibilitas.

efficiat; sed huic dubitationi in promptu est remedium, efficiendo nempe ut lux à posticâ parte prismatis (sicut ad fig. 1. Tab.) solummodo terminetur, ne fiat umbræ confinis priusquam fuerit refracta. Et propterea, ne suspicio sit de variâ crassitie vitri, potest refractio ejus ad varias crassities tentari, promovendo Prisma transversè juxta lucis ingressum parallelo motu: ita ut lux primò ad aciem ejus trajiciatur; deinde ad partes crassiores; & in quovis casu persimilis erit colorum apparitio. Neque multùm interest, si foramen, per quod lux ingreditur, sit latius vel angustius; nam exinde nihil aliud eveniet quàm lucis, colores exhibentis, augmentatio vel diminutio, ac tanta dilatatio vel contractio imaginis, quanta est foraminis.

25. Experimento duorum parallelorum Prismatum jam antè descripto constat etiam, quòd hæc imaginis in longitudinem distractio non oritur ex ejusdem cujusque radii diffusione vel distractione in complures divergentes radios; siquidem illi per iteratam diffusionem vel distractionem, in transitu per secundum Prisma tunc resolvi deberent in longè plures & magis divergentes radios. Quin & iisdem omnibus objectionibus adversatur experimentum, ubi posterius Prisma non statuitur parallelum anteriori sed perpendiculariter transversum. Nam in isto casu, si anterius Prisma distraheret imaginem in longitudinem, ob aliam quamcunque causam quàm diversam refrangibilitatem diversorum radiorum, tunc posterius Prisma, per transversam refractionem, distrahere deberet illam oblongatam imaginem in latitudinem, & sic quadrilateram efficeret. Sed experimentum tentanti res secus evenit, imagine scilicet non secundum latitudinem dilatatâ, sed solum obliquatâ per majorem refractionem extremitatis violaceæ quàm rubræ. Quemadmodum videre est ad fig. 3. Tab. ubi imago PT, per secundi Prismatis refractionem, transfertur ad *pt*. Ex dictis, opinor, satis superque constat id, quod initio proposui demonstrandum: quoniam autem jucunditatem intellectui & assensum plerunque firmiorem harmonia rerum plurium affert, quam unici licet maximè scientifici argumenti testimonium; non erit abs re, si in aliud experimentorum genus, præcedentibus affinium, experturos breviter introducam.

EXPE-

EXPERIMENTA VARIA.

Perstringuntur alia experimenta præcedentibus affinia.

26. In fig. 4. Tab. sit F foramen valdè exiguum, per quod lumen Solis trajiciatur; deinde ad distantiam pro lubitu magnam statuatur Prisma ABC, per quod radii transeant refracti, prout in prioribus explicui; tum oculo ponè admoto, circularis foraminis F videbis imaginem PT oblongam; cujus longitudo, ad latitudinem collata, tanto major erit, quanto foramen F fiet angustius; & exinde pateat, quòd radiorum alii, tendentes ad oculum per H, quasi manâssent à P, sunt magis refracti, quàm alii tendentes per I, quasi à T venissent; & radiis sic in oculum non secus ingressis, quàm si profluxissent ab oblongo spatio PT, necesse est, ut spatium istud longum appareat luminosum.

Sed cavendum est, ne foraminis F tanta sit apertura, ut nimiæ lucis introitu lædatur oculus; imo ne tanta sit, quin ut possis nudo oculo particulam Solis per foramen istud, quasi punctum lucidum, distinctè & absque ullâ circumradiatione transpicere. Verùm, si lumen Solis censeatur nimium huic experiendo, lumen à nubibus transmissum sufficiat; modò talis sit oculi tui dispositio, ut foramen sine radiis circumcirca superfluis distinctum cernas, antequam interponas prisma: aliàs imaginem ejus non cernes distinctam, neque debitâ longitudine deductam.

Adhæc, liceat tandem observare, si filum albens interposito Prismate aspicias; etenim filum multo latius apparebit, cùm in situ ad longitudinem prismatis parallelo, quàm cùm in transverso statuitur.

Cæterùm, ut in uno comprehendam omnia, si stellam fixam primæ magnitudinis mediante Prismate intuearis, ejus etiam imago conspicietur longa. At, cùm radii stellarum pro parallelis habeantur, si omnes æquè refringerentur, manerent etiam paralleli, postquam egrediuntur è Prismate; & oculum sic ingressi efficerent imaginem omnino similem stellæ, vel puncto lucido, nullatenus oblongam; perinde ut fit, cum stella parallelos radios in oculum directè mittit. Videbis itaque, quòd radii paralleli, superficiebus planis refracti, fiunt inclinati; unde necesse est, ut inæqualem refractionem patiantur. In transitu autem notetur, quòd Telescopio, si placeat, primùm adhibito, tum ut copia lucis

ad

Radiorum diverſa

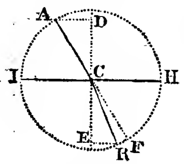
ad oculum tranſmittatur, tum ut ſcintillatio, quâ Fixæ ſolent quaſi coronâ cingi, minuatur, & Priſmate deinceps interpoſito, videbis albicantem lineam diſtinctiorem quàm prius, cum latitudine vix aut ne vix quidem conſpicuâ. His paucis de Radiorum diverſâ Refrangibilitate narratis, quorum ſenſus plenior in ſequentibus, ubi de Coloribus agitur, eluceſcet; reſtat, ut refractionum Quantitates & Menſuræ jam determinentur.

SECTIO SECUNDA.

De Menſurâ Refractionum.

De menſurâ refractionis dati generis radiorum, è quâvis incidentiâ datâ.

27. Refractiones, ope angulorum, quos incidentes & refracti radii cum perpendiculo refringentis plani conſtituunt, quaſi datam rationem habentium, à Veteribus determinatæ fuerant. Quemadmodum ſi IH ſit planum refringens, cui linea DCE ad aliquod ejus punctum C perpendiculariter inſiſtit, & in illud C radius quilibet AC incidat, & refringatur ad R: poſito refractum radium CR in plano ACI jacere, quod refringenti plano perpendiculare eſt; ſuppoſuere Veteres, quòd angulus incidentiæ ACD, angulus refractionis RCE, & angulus refractus RCF ſemper ſint in datâ quâdam ratione; vel potius hypotheſin credidêre ſatis accuratam eſſe, ubi radii à perpendiculo non multum divaricant. Sic in Vitro ſtatuerunt angulum refractionis quaſi triplum eſſe anguli refracti. At illa refractionum æſtimatio minus exacta deprehenditur, quàm ut pro fundamento Dioptricês debet ſtatui; & Carteſius aliam Regulam primus [a] excogitavit, quâ iſtud exactius determinarentur; ponendo dictorum angulorum ſinus eſſe in ratione datâ. In fig. ſup. ſi centro C & diſtantiâ quâlibet AC circulus deſcribatur, ſecans radios præfatos in A & R, & ab iſtis punctis ad plani perpendiculum DCE demittantur normales AD & RE, ipſarum AD & RE proportio erit eadem perpetuò. Cujus rei veritatem auctor non ineleganter demonſtrâſſet, modo de cauſis Phyſicis, quas aſſumpſit, nullum dubitandi locum reliquiſſet. Ut & quoniam inſtrumentis, in iſtum finem

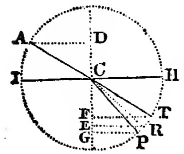


(a) Veram refractionum legem omnium primus invenit Snellius; qui horum angulorum ſecantibus datam rationem intercedere primus intellexit. Inde verò facile efficiendum erat ſinuum etiam rationem dari. Vide Princip. Lib. I. Prop. XCVI. Schol.

De Menſurâ Refractionum.

finem accuratè inſtructis, examinârunt aliqui, & veritati (quoad ſenſum) exactè convenientem adinvenerunt, non dubitamus pro fundamento ſtatuere; hoc ſolum adhibito moderamine, quòd, cùm is de quibuſlibet radiis indifferenter affirmârit, quaſi omnium perſimilis fuiſſet refractio, nos tantùm affirmamus de ſingulis eorum generibus ſeorſim ſpectatis; ponendo quòd radiorum æquè refrangibilium ſinus refractionis ſunt ut ſinus incidentiæ.

Concipiamus aliquot genera radiorum ſecundum lineam AC eſſe allapſa ad punctum C, ibique refracta per ſuperficiem IH; puta mediocriter refrangibiles radios in CR, minimè refrangibiles in CT, & maximè refrangibiles in CP, ac innumeros alios, gradibus intermediis plus minus refrangibiles, per totum ſpatium TCP diffuſos eſſe. Jam ſi ducatur DCG perpendicularis ad planum refringens IH, & centro C diſtantiâ quâvis AC circulus (ut priùs) deſcribatur, ſecans radios dictos in A, P, R, T, atque ex iſtis punctis demittantur perpendiculares, AD, PG, RE, TF, pro ſinubus angulorum ACD, PCG, RCE, TCF; pono, quòd, utcunque radii incidant, tamen ſemper erit AD ad PG in eâdem ratione; quâ ſemel cognitâ, Regulam habes pro refractione radiorum maximè refrangibilium in eandem ſuperficiem, ad angulum quemvis incidentium, menſurandâ: et ſic ſemper erit AD ad TF in eâdem ratione; quâ cognitâ, Regulam habes quâcum refractio minimè refrangibilium in quâvis incidentiâ determinabitur. Atque idem de ratione ipſius AD ad RE, & ad ſinum cujuſvis intermedii generis concipiatur.



De conferendis refractionibus radiorum diverſi generis.

28. Porro autem, cùm ſinus PG, RE, TF cæterique datam habeant rationem ad ſinum AD, datam quoque rationem inter ſeſe habebunt; atque adeo, ſi ex unicâ obſervatione proportionem ſinuum PG, RE, TF & reliquorum ad radios ex eâdem incidentiâ refractos pertinentium cognoveris; Regulam exinde habebis, quâcum ex ſinu refractionis cujuſvis generis radiorum & in iſtam ſuperficiem utcunque incidentium dato, cæterorum omnium, ex eâdem incidentiâ prolabentium, ſinus elicias, licet quænam ſit eorum incidentia non innotuerit. Quinimo, ſi omnium AD, TF, RE,

De Mensura

RE, PG, &c. proportiones inter se semel cognoscantur, habito respectu ad eadem Media refringentia, Regulam habes pro cæteris omnibus exquirendis ex unico quovis unquam dato. Itaque, quo rationes istorum sinuum investigentur, convenit, ut in aliquo radiorum genere proportio sinûs incidentiæ ad sinum refractionis primùm exquiratur; deinde, ut proportiones sinuum refractionis pro radiis diversorum generum, ad eundem angulum incidentium, determinentur.

Ad sinus incidentiæ & refractionis conferendos adhibetur mediocre genus radiorum.

29. Ad sinus incidentiæ cum sinubus refractionis conferendos, commodum erit, ut medium genus eligatur; puta genus illud radiorum, qui Viriditatem, vel potius colorem viridi & cæruleo intermedium, exhibent. Credo enim illos, qui refractiones antehac mensuravêre (sive id factum sit, ut jam dicta hypothesis Cartesii probaretur, sive aliis de causis) credo illos, inquam, mensuram instituisse ad medietatem refractæ Lucis; hoc est, si spatium à coloribus occupatum spectemus, ad confinium Viridis & Cærulei: aut si spectemus quantitatem lucis, ad medietatem Viridis; & præterea punctum istud pro principali foco lentium habendum esse videtur, in quod intermedium genus radiorum convergit. Atque etiam, si quando de radiis indistinctè differendum est, ut hactenus apud Opticæ peritos consueverit, genus mediocre, commodius quàm extremorum aliquod, pro omnibus haberi potest.

Modus explorandi sinuum istorum rationes.

30. Porro, cùm forte desideretur accuratius examen dictæ Regulæ Cartesianæ, quàm antehac instituebatur, dum varia radiorum refringibilitas experientes latuit, primò dicam, quo pacto id non incommodè fiat. Quoniam Fluidi pellucidi superficies refringentes facilè possint inclinari ad quemvis datum angulum, quod Solido non est concessum, Fluida in hunc finem fuerunt adhibita; sed instrumento magis laborioso, quàm opus erat, & erroribus fortè magis obnoxio, quàm si omni apparatu privaretur, demptâ trabe cui vasculum aquæ plenum affigitur.

Sit itaque HK *in fig*. 5. *Tab*. vectis ligneus duas tresve ulnas longus aut ampliùs; satis crassus ne ob longitudinem & pondus minimè inflecti queat; quadrilaterus, rectangulus & rectus, cum lateribus oppositis exactè parallelis. Tum lamellæ duæ, HI & KL, super unum ejus latus, ad angulos rectos, erigantur; KL proximè ad unam extremitatem, & HI quasi quatuor digitos ab alterâ distans, quarum longitudo

Refractionum.

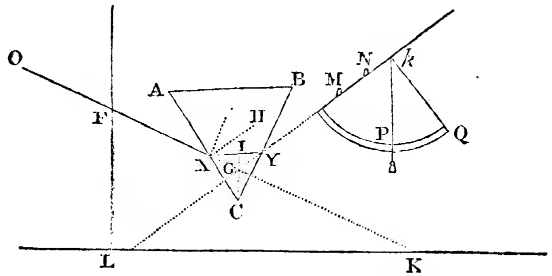
gitudo sit trium digitorum quatuorve, latitudo autem duorum vel trium. Deinde sumatur vasculum aliquod cylindricum, vel prismiforme, CF, duos tresve digitos latum, longum verò quatuor vel quinque. Ejus basis super lamellam HI, cemento aliquo duro & tenaci, figatur; ac in eo situ firmetur ope trabis HK ultra lamellam dictam HI productæ. Tum trajiciatur ejus fundum in medietate, & lamella simul, parvo foramine F, puta decimâ parte digiti lato; & juxta foramen istud in alterâ lamellâ notetur punctum R, quod æquè distat à trabe ac dicti foraminis centrum; ita scilicet ut linea FR, per centrum foraminis ad R ducta, sit parallela longitudini trabis. Denique sumatur lamella vitrea, plana, polita & uniformiter crassa, eaque applicetur ad planitiem lamellæ HI, vasculo CF obversam, super foramen F; & cemento figatur ita, ut vasculum istud aquæ (quâ repleatur) non sit pervium; & cum normâ aliquâ fiat periculum, an illa vitrea lamella perpendiculariter insistat trabi. Quod si non contingat, corrigatur situs, donec sit exactè perpendicularis. In cujus rei gratiam convenit, ut dicta lamella vitrea sit tres vel quatuor digitos longa & lata, quo de situ ejus meliùs judicare liceat. Instrumento hoc sic fabricato, & aquâ vasi CF plusquam ad medietatem ejus infusâ, illud in radiis solaribus ita statuatur, ut in superiori superficie aqueâ refracti perpendiculariter emergant ad foramen F, rectâque progrediantur versus laminam KL, Rubedine ad T, Purpurâ ad P, & Viridi, vel confinio Cærulei & Viridis, ad K incidentibus. Convenit autem, ut dicta lamina KL dealbetur, aut albente papyro vestiatur, quo de Coloribus judicium certius feras. Interea verò cum quadrante aliquo amplo & exactè fabricato, *ekr*, quæratur inclinatio trabis, HK, ad horizontem; & habebis angulum refractionis *ekr*, & ejus sinum *er*. Tum Solis altitudo statim inquiratur, ejusque complementum ad 90 grad. A*k*D erit angulus incidentiæ, & AD sinus. Quibus sinubus ad invicem collatis, & experimento ad diversas Solis altitudines repetito, constabit, an sinuum ratio semper sit eadem. Quòd si velis, ut experimenta varia simul fiant, aut ad minorem incidentiam, quàm sit complementum maximæ altitudinis solaris, vice radiorum à Sole directè manantium possis adhibere reflexos.

Modus explorandi vim refractivam

31. Cum eandem sinuum incidentiæ & refractionis rationem alicui radiorum generi, utcunque in eandem quamvis superficiem incidenti,

Solidi cujuſvis Aere circundati.

incidenti, perpetuò competere ſat exploratum fuerit, proponatur exquirere rationem illam ad ſuperficiem data quælibet Media diſterminantem, idque unico experimento. Si Aer ſit unum ex datis Mediis, & Liquor quilibet alterum; inſtrumentum noviſſimè deſcriptum non incommodè poteſt adhiberi. Sin Mediorum alterum ſit ſolidum, res expeditè perficitur ad diagramma appoſitum.



In ejus explicationem præmittantur duo ſequentia Lemmata.

LEMMA I.

Sit ABC Priſma, ex materiâ quâvis pellucidâ confectum, cujus axis ſit Horizonti parallelus & perpendicularis ad radios Solis; & præterea ſit ejus poſitio talis, ut dictos radios OX æquè refringat, ingredientes ad X & egredientes ad Y. Iſtud autem, quo pacto debet fieri, oſtenſum fuit ad § 10. Jam dico, quòd angulus refractionis, ad alterutram refringentem ſuperficiem ut AC factæ, ſit æqualis dimidio verticalis anguli priſmatici ACB: ſcilicet ad punctum incidentiæ X erigatur perpendicularis HX, erit HXY angulus refractionis ad ſuperficiem AC. Porro demittatur CI perpendicularis in radium XY; & iſta biſecabit angulum YCX, propterea quòd triangulum YCX (ob æqualitatem refractionis in X & Y) ſit iſoſceles. Dico itaque, quod anguli HXY & ICX æquantur: nam ang. AXY = ang. XIC + ICX (per 32. I. Elem.) ſed anguli AXH & XIC ſunt recti. Ergo reſidui HXY & ICX æquantur. Q. E. D.

LEMMA II.

Adhæc, ſi radius incidens OX & emergens YN indefinitè producantur, occurrentes in G; & præterea, ſi recta quævis KL, Horizonti parallela, radiis iſtis interjiciatur, conſtituens triangulum GKL; &,

Tom. III. p. 276.

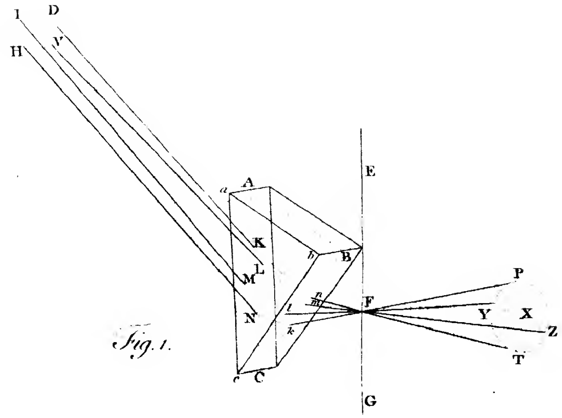


Fig. 1.

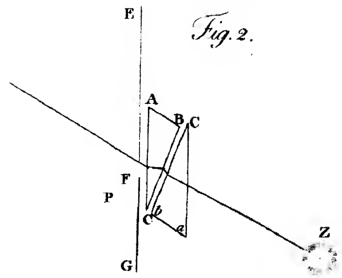


Fig. 2.

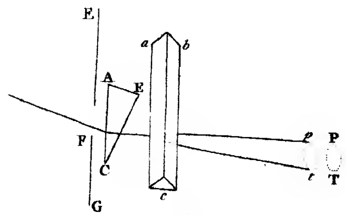


Fig. 3.

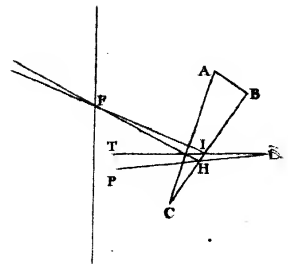


Fig. 4.

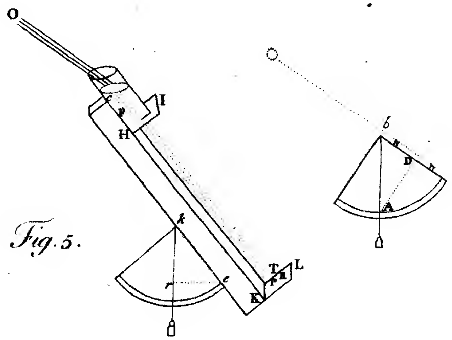


Fig. 5.

Basire sc.

&, cùm refractus radius YN tendit ſurſum, ſi ſumma angulorum LKX & KLY ſumatur; aut eorum differentia, cùm iſte YN tendit deorſum: dico, quòd illius ſummæ vel differentiæ dimidium, unà cum angulo refractionis HXY, æquabitur angulo incidentiæ HXG. Nam dicta ſumma vel differentia æquatur angulo NGK (per 31. 1. Elem.) hoc eſt angulis GXY+GYX; &, cùm triangulum GYX ſit iſoſceles, dictæ ſummæ vel differentiæ dimidium æquabitur angulo refracto, GXY; qui cum angulo refractionis, YXH, conſtituit angulum incidentiæ. Q. E. D.

De Menſurâ Refractionum.

His præmiſſis, Problema propoſitum ſic perficitur. Primò menſuretur angulus verticalis Priſmatis ACB, & ejus dimidium erit angulus refractionis. Dein priſmate in poſitione præfatâ diſpoſito, per quod radii trajiciantur ingreſſi foramen F; ope quadrantis MNPQ ampli & accurati (puta cujus pinnarum M & N diſtantia ſit pedis unius ad minimum) exploretur angulus YLK vel P*k*Q, quem refracti radii, YMN, cum Horizonte conſtituunt; faciendo, ut mediocriter refrangibiles per pinnas M & N, ad diſtantiam decem aut viginti pedum à Priſmate trajiciantur, & ſimul obſervetur Solis altitudo, XKL: qui duo anguli addantur, ſi refracti radii YMN ſurſum tendant, ſicut in ſchemate deſcribitur, alias minor ſubſtrahatur à majori; & ſummæ vel differentiæ dimidium unà cum angulo refractionis, priùs invento, erit angulus incidentiæ, ut pateat per Lemma ſecundum. Denique ex angulis Incidentiæ & Refractionis ſic datis, dantur eorum ſinus. Q. E. F.

32. Sic in Priſmate quodam vitreo dimenſus ſum angulum ejus maximum, ACB, & inveni 63 grad. 12 min. cujus dimidium, HXY, eſt 31. gr. 36 min. ejuſque ſinus 5240, poſito ſinu 90 gr. 10000. Deinde, cùm altitudo Solis, OKL, obſervabatur eſſe 14 gr. 4 min. alter angulus, MLK, à radio YN ad medium Viriditatis tendente conflatus, erat 30 gr. 52 min. quorum ſumma eſt 44°. 56′. ejuſque dimidium, YXK, 22°. 28′. quod unà cum angulo refractionis, HXY, facit 54°. 4′. angulum incidentiæ, cujus ſinus eſt 8097. Denique conferendo ſinus jam inventos, ut eorum proportio in minimis terminis haberetur, inveni eſſe ut 11 ad 17 ferè. Quare pro Regulâ generali ſtatuendum eſt, quòd radiorum Viriditatem exhibentium ſinus incidentiæ ex Aere in Vitrum quodvis, æquè refractivum ac illud Priſma, ſit ad ſinum refractionis ut 17 ad 11.

Exemplum in refractione cujuſdam generis vitri.

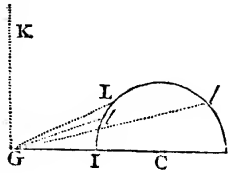
Haud

De Mensura Refractionum.

Haud secus dimetiendo refractionem radiorum, colorem inter Viridem & Caeruleum exhibentium, investigatur 45°. 8′. pro duplo anguli refracti; cujus dimidium, 22°. 34′, unà cum angulo refractionis, 31°. 36′, dat angulum incidentiae 54°. 10′; ejusque sinus, 8107, est ad sinum refractionis, 5240, ut 82 ad 53 proximè.

Modi praefati commoditas.

33. Hujus autem modi commoditas in mensurandis refractionibus ex eo conjicietur, quòd Instrumento nullo hîc opus est, dempto Quadrante & Prismate cujus refractio desideratur; quòd Refractionem, dum geminetur, factam ad X & Y, exinde certiùs metiri possis; & quòd facillimum sit Prisma in desiderato situ disponere, ut suprà ostenditur § 10: imo quòd parvus error à situ desiderato fere nihil sit; dum quoad sensum haud inde mutabitur angulus refractus MGK, ut experienti patebit. Quippe angulus iste hîc minimus est; & quantitatum, per motum generatarum, cùm maximae existant vel minimae, hoc est in momento regressûs, motus ut plurimum sunt infinitè parvi.



Sic verbi gratiâ, si centro C describatur circulus *lLl*, & extra eum sumatur punctum quoddam G, ducaturque GIC, & erigatur normalis GK: deinde, si concipiatur, quòd punctum *l* moveatur uniformiter in illius circuli circumferentiâ, per quod punctum recta quaedam G*l*, circa centrum G rotata, perpetuò transeat: manifestum est, quòd quo major sit angulus CG*l*, sive quo minor angulus KG*l*, eo minor erit motus angularis ipsius G*l*; & cùm angulus CG*l* sit maximus, sive angulus KG*l* minimus, hoc est in momento regressûs (recta G*l* tunc circulum in L tangente) motus ejus erit infinitè parvus, & quoad sensum nullus; parvusque error à puncto contactûs, L, nullam sensibilem variationem in angulis istis KGL & CGL, producet. Et ad eundem ferè modum, parva convolutio Prismatis haud omnino mutabit angulum MGK, cùm iste sit minimus, sive complementum ejus maximum. Quòd si Prisma disponeretur in quovis alio situ, quàm hîc describitur (puta cùm radii perpendiculariter ingressi ad egressum duntaxat refringuntur) minimus error ab isto desiderato situ multum mutaret angulum refractum, & sic experientia foret incertudini & erroribus multo magis obnoxia.

34. In

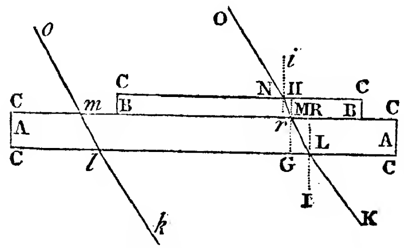
Regula de investigandâ refractione Mediorum sibi ipsis contiguorum, quorum, Aeri contiguorum, refractiones cognoscantur.

34. In majorem hujus rei copiam, quia dantur aliqui casus, ubi refractiones per modos jam descriptos haud possint mensurari (ut cùm refractio fit ex Vitro in Crystallum, ex Aquâ in Vitrum, vel ex uno liquore in alium) & nequa omnino sit refringens superficies, cujus refractio nequit investigari; Problema sequens lubet proponere.

PROBLEMA.

Datis refractionibus, quas duo Media alicui tertio contigua conficiunt; illorum, sibi ipsis contiguorum, refractiones invenire.

Sunto duo Media proposita A & B, quorum superficiei distermininantis refractio quaeritur; & sit C Medium tertium, cujus superficiei, ipsis A & B contiguae, refractiones dantur. Sitque sinus incidentiae ad sinum refractionis ex Medio C in Medium A sicut I ad R; & sinus incidentiae ad sinum refractionis ex eodem Medio C in alterum Medium B sicut *j* ad *r*. Dico, quòd sit I×*r*:R×*j*::sinus incidentiae ad sinum refractionis ex Medio B in Medium A.



Verbi gratiâ, si proponatur investigatio refractionis ex Aquâ in Vitrum, datâ refractione ex Aere in utrumque; sitque sinus incidentiae ex Aere in Vitrum ad sinum refractionis ut 17 ad 11, & sinus incidentiae ex Aere in Aquam ad sinum refractionis ut 4 ad 3. Quare sinus istos multiplicando reciprocè, erit ut 17×3 ad 11×4, sive ut 51 ad 44, ita sinus incidentiae ex Aquâ in Vitrum ad sinum refractionis. Et sic cognitâ refractione ex Aere in quaevis alia Media proposita, possis adipisci eorum refractionem inter se; & è contra.

35. Caeterum demonstratio hujus non est omittenda, in quem finem praesternatur Lemma sequens.

Regulae ejus demonstratio.

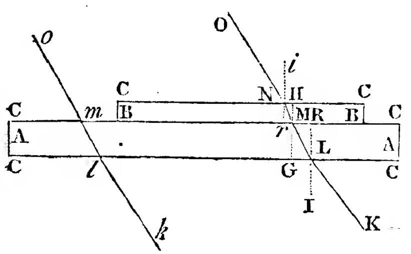
Si Media duo proposita A & B concipiantur esse planis parallelis terminata, contigua, & dicto Medio tertio (puta Aere) circumdata, & radius quilibet ON, oblique incidens ad N, refringatur primò ad M, ac deinde ad L, & emergens pergat ad K: dico radium incidentem

ON

De Menſura

ON ſibi emergenti LK parallelum eſſe: cujus quidem aſſertionis veritas experientiâ patet. Etenim ponatur Medium A eſſe Vitrum, & Medium B eſſe Aquam; Mediumque tertium circundans eſſe Aera: et laminæ vitreæ A ſuperficies, rMR, tenuiter illinatur aquâ B, & ſtatuatur parallela ad horizontem; ut aqua conſiſtat uniformiter craſſa. Quo facto videbis, quòd radii, per utrumque medium, A & B, trajecti, tendent ad eaſdem plagas, verſus quas tenderent à Sole directi.

Præmiſſo hoc, erigantur iNr, HMG, & RLI, perpendiculares ad refringentia puncta N, M & L; eſt ergo j ad r ut ſinus anguli ONi ad ſinum anguli MNr, ſive NMH; & multiplicando rationem antecedentem per I, fiet $I \times j$ ad $I \times r$ ut ſinus ipſius ONi ad ſinum ipſius NMH. Porro eſt I ad R, ut ſinus anguli KLI, ſive ONi, ad ſinum anguli MLR, ſive LMG. Et, multiplicando rationem antecedentem per j, fiet $I \times j$ ad $R \times j$, ut ſinus anguli ONi ad ſinum ipſius LMG. Jam permutando terminos utriuſque proportionis, fiet $I \times j$: ſin. ONi :: $I \times r$: ſin. NMH; & $I \times j$: ſin. ONi :: $R \times j$: ſin. LMG. Quare ex æqualitate rationis eſt $I \times r$. $R \times j$ :: ſin. NMH. ſin. LMG[b]. Q. E. D.



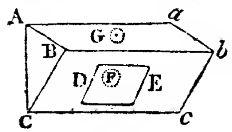
Modus dimetiendi refractiones Solidorum ad Fluida accommodantur.

36. Ex hiſce ſic oſtenſis, Problema non inutile proficiſcitur, quo refractiones Fluidorum eodem modo metiri poſſis, ac de Solidis oſtenſum eſt § 31. non adhibito inſtrumento HLK quod in fig. 5. Tab. deſcribitur. Scilicet ex laminis vitreis, in morem cunei connexis, vaſculum priſmiforme conficiatur; cujus acies, ſive angulus verticalis, ſit grad. 80 circiter, vel 90. Iſtius autem anguli quantitatem exactiſſimâ menſurâ cognitam habebis, ejuſque dimidii ſinum pro ſinu refractionis ſemper ſtatues. Quo peracto, cùm liquoris alicujus vis refractiva deſideratur, vaſculum cum illo liquore impleatur, & in tali ſitu diſponatur, ut acies ejus à concurſu refringentium planorum conſtituta, ſit parallela ad horizontem, & perpendicularis ad radios ſolares; atque ut illi radii, per præfata

(b) Vel brevius, cùm ſit $I \times r : I \times j =$ ſin. NMH : ſin. ONI. Et $I \times j : R \times j =$ ſin. ONI : ſin. LMG erit ex æquo $I \times r : R \times j =$ ſin. NMH : ſin. LMG. Q. E. D.

Refractionum.

præfata refringentia plana trajecti, refractiones ad ingreſſum & egreſſum æquales patiantur. Et ope Quadrantis, ut oſtenſum erat ad fig. 16. exploretur angulus incidentiæ; cujus ſinus ad præfatum ſinum refractionis erit ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis ex Aere in Liquorem propoſitum.



Refractio aquæ, prout ipſe dimenſus ſum, in ſpecimen ejus rei adducitur.

37. Inſtantiæ gratiâ, quo Aquæ refractionem cognoſcerem, curavi, ut Priſma ligneum conficeretur, quale eſt ABc; cujus ille angulus ACB, quem pro verticali deſignabam, foret rectus, cæterique duo ſemirecti; & effeci, ut refringentia plana Ac & Bc per meditullium trajicerentur foramine F, parallelo ad baſem Ab, per quod foramen lux itura eſſet; & ut tertium planum, Ab, fœderetur in G, uſque dum aditus ad foramen F tranſverſè pertingeret. Dein ſumptis duabus ex Vitro lamellis, quas ſpeculum confractum mihi ſubminiſtravit, unam, DE, ſuper meditullium plani Bc cæmento fixi; & alteram ſuper meditullium alterius plani Ac, ut meatus F utrinque clauderetur. Tum aquam pluvialem per orificium G in excavatum ſpatium infudi, & cum operculo, ex ſubere conciſo, clauſi. Atque adeo aqua, duabus vitreis lamellis ad angulum rectum inclinatis interjecta, vices ſubibat aquei priſmatis habentis angulum rectum. Eas autem laminas rectum angulum exactè comprehendere ex applicatione normæ cognovi, cujus ideo dimidium grad. 45 pro angulo refractionis habendum eſt. (Lem. I. § 31.) Hoc Priſma dein ita ſtatuebam ad ingreſſum lucis in obſcurum cubiculum, ut eadem foret utrinque refractionis quantitas; & ex altitudine Solis, & refractorum radiorum, Viriditatem exhibentium, inclinatione ad Horizontem, inveni angulum refractum eſſe 51°. 16′; cujus dimidium, 25°. 38′, unà cum angulo refractionis, 45°, dabit angulum incidentiæ 70°. 38′. Horum verò angulorum, 70°. 38′ & 45°, ſinus ſunt 9434 et 7071 reſpectu ſinûs 90 grad. ſeu 10000; quorum quidem numerorum ratio eſt paulo minor quàm Carteſiana, 250 ad 187, & paulo major quàm 4 ad 3; nempe 4,002 ad 3; quæ tamen à ratione $\frac{4}{3}$ tam parvâ differentiâ recedit, ut error fuit*inſenſibilis, ſi poſuerim eſſe ut 4 ad 3; idque maximè

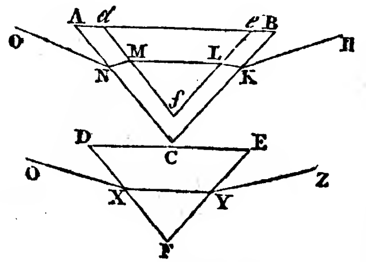
* Lege *fuerit*.

De Mensura

mè cùm Aquæ refractio non perpetim eadem maneat, sed à caloris vicissitudine nonnihil patiatur, variosque densitatis gradus induat. Quod idem & Aeri circumdanti contingit, qui à vaporibus etiam non solùm variè incrassatur, sed & arctiùs (auctâ Atmosphæræ gravitate) vel laxiùs comprimitur. Adde, quòd aquarum, ex diversis Terrarum regionibus scaturentium, aut vi Solis in vapores & pluviam deinde conversarum, diversæ sint densitates, & internæ dispositiones ad restringendum, ortæ ex variis mineralium tincturis, quas è locis subterraneis extrahunt, & exhalationibus variè crassis & copiosis, quæ simul cum vaporibus in altum attolluntur.

Præfatorum demonstratio.

38. Problematis hujus de refractionis Fluidorum mensurâ sic soluti, veritas constabit ex ostenso, quòd refractionis in hoc Prismate, ex Aqua & Vitris composito, eadem sit quantitas, quæ foret, si vitrum tolleretur, & aqua sola maneret Aere circundata.



Sit itaque ABC Prisma confectum ex laminis vitreis ACfd & BCfe (ut dictum est) & aquâ dfe repletum. Et concipiatur, quòd DEF sit aqueum Prisma, immediatè circundatum Aere, & omnino simile aquæ def circumclusæ vitro, similiterque positum; & incidant radii paralleli, ON, OX, in utrumque; quorum alter ON, refractus in N, M, L & K, tendit ad H; alter verò OX, refractùs in X & Y, tendit ad Z. Dico jam, quòd emergentes KH & YZ erunt paralleli, atque adeo, quòd in utroque Prismate tota refractionum quantitas erit eadem. Etenim in fig. pag. 280. si radius *om* ipsi ON parallelus incidat in vitream laminam A, emergatque in *lk*; notum est, quòd radius *lk* erit parallelus ipsi *om*, hoc est, ipsis ON & LK: & cùm *lk* & LK sint paralleli, erunt etiam *ml* & ML paralleli. Unde liquet propositum: Quòd quantitas refractionis ex Aere in Medium quodvis propositum sit eadem, sive radii immediatè ingrediantur istud Medium ex Aere (ut fit ad *oml*) sive prius permeent aliud Medium interpositum & parallelis planis terminatum (uti fit ad ONML) & è contra. Atque idem intel-

I lige,

lige, cùm vice aeris aliud quodpiam adhibetur Medium. Quare cùm paralleli radii, OX & ON, incidant in prismata, DFE & ACB, similia & similiter posita, refractionis quantitas ex Aere in Aquam erit eadem, sive radii immediatè intrent, ut videre est ad DEF, sive prius permeent lamellam vitream A*dƒ*C; hoc est, radius XY semel refractus erit parallelus ML bis refracto: & ob eandem rationem, cùm XY & ML sint paralleli, radii emergentes YZ & KH erunt etiam paralleli. Quare, cùm radii incidentes & emergentes sint paralleli, refractio tota prismatis utriusque erit eadem. Atque adeo cùm aqueum prisma Aeri contiguum, propter aquæ fluiditatem, fabricari nequeat, ejus vice liceat adhibere vitreum prisma cum aquâ repletum. Q. E. D. Refractionum.

Et sic modus generalis, quo refractiones ex Aere in quælibet Media proposita determinentur, ostensus est, facillimus quidem & erroribus minimè obnoxius: præsertim si angulus Prismatis sit magnus & exactè cognitus; quadrans magnus & accuratus; & observatio facta longè post Prisma, ubi colores multum dilatati faciliùs distinguuntur. Et præterea, cùm refractiones inter Aerem & Media proposita sic experientiis determinantur, indicata est Regula (§ 34.) quâ Mediorum eorundem sibi ipsis contiguorum refractiones eliciantur. Quòd satis est in gratiam primi casûs, de refractionibus dimetiendis, cùm in eodem quopiam radiorum genere proportio sinûs incidentiæ & refractionis quæritur, ostendisse.

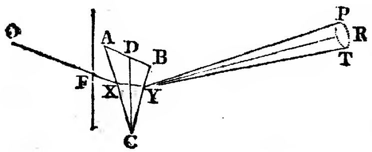
Radiorum diversi generis refractiones conferuntur, & maximæ refrangibilitatis differentia investigatur.

39. Prosequendus est jam alter casus, ubi Heterogeneorum Radiorum refractiones conferendæ sunt. Quòd autem sinus refractionis cujusque radiorum generis sit ad sinum incidentiæ in datâ quâdam ratione, experiri possis dimetiendo refractiones singulorum insigniorum generum, juxta varias obliquitates in Medium aliquod refringens seorsim incidentium, veluti in aquam (ad fig. TAB. 5.) in vase stagnantem, vel in Prismata vitrea, quorum diversæ sint quantitates angulorum verticalium. Nam per unum Prisma proportiones sinuum ad singula radiorum genera investigare possis, prout ostenditur ad § 31. deinde per alia Prismata (vel ejusdem Prismatis alios seu minores seu majores angulos) exquirere, an eædem proportiones in aliis obliquitatibus obveniant. Atque ita (observationibus accuratissimè factis) simul constabit, re-

Nn 2 fractiones

De Mensura

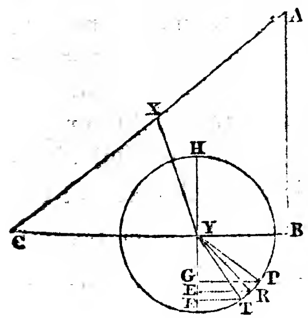
fractiones cujusque generis radiorum secundum certas rationes sinuum peragi, & istorum sinuum rationes innotescent. Impræsentia verò, cùm eandem esse cujusque radii refractionem cognoverim, sive Heterogeneis radiis (ut in lumine solis nondum refracto) commistus incidat, sive ab Heterogeneis priùs separetur: ostendam quomodo per refractionem immediati luminis solaris hæ proportiones obtineri possint; imprimis determinando proportiones sinuum refractionis inter se respectu ejusdem incidentiæ, ac deinde cum communi sinu incidentiæ conferendo. Et quoniam de intermediis radiorum generibus facile esset judicium ferre, si modò refractiones extremorum essent cognitæ, satisfecero, si radios maximè omnium refrangibiles cum minimè refrangibilibus comparavero.



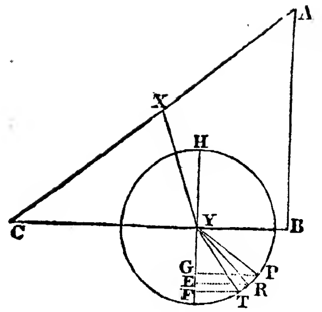
Itaque sit ABC Prisma vitreum ita positum, ut radii tum ingredientes, tum egredientes eandem quantitatem refractionis, ut prius, patiantur. Dies autem feligatur splendidus, & cubiculum esto valdè obscurum, ut Colores usque ad ultima, quæ occupent, spatia distinctè satis videri possint. Tunc ad distantiam viginti pedum aut amplius à Prismate, radii excipiantur in papyrum aliquam directè obversam, & spatii à coloribus illuminati (ut PT) longitudo & latitudo mensuretur. Sic Prismate adhibito, cujus angulus verticalis ACB fuit 63°. 12′, & latitudine foraminis radios intromittentis existente quartâ parte digiti; ad distantiam XP vel XT 22 pedum, inveni maximam longitudinem imaginis, PT, esse $13\frac{1}{4}$ dig. circiter, & latitudinem $2\frac{5}{8}$ dig. Jam si latitudo hujus imaginis ab ejus longitudine subtrahatur, manebit $10\frac{5}{8}$ digiti pro longitudine, quam habere debuisset, si Solis discus (& foraminis F diameter) fuisset infinitè parvus; hoc est, si radii advenissent omnes in eâdem rectâ OF. Ista itaque linea $10\frac{5}{8}$ dig. subtendit angulum, quem radii duo similiter incidentes per inæqualitatem refractionis constituunt, quorum alter maximè omnium similiter incidentium, & alter minimè omnium refringitur; qui proinde angulus ex calculo reperitur 2°. 18′. Verùm, cùm angulus iste binâ refractione

Refractionum.

refractione ad X & Y conficiatur, & præterea, cùm utraque supponatur æqualis; calculus ad hoc negotium satis accuratus ex unicâ tantum refractione poterit institui: puta, quæ conficitur ad latus BC. Etenim, si verticalis angulus ACB plano DC bisecetur, & alterum Prismatis dimidium, DCB vel DCA, concipiatur tolli; refractio ad alterum dimidium facta, radiis obliquè incidentibus in AC & perpendiculariter emergentibus è latere DC, vel perpendiculariter incidentibus in latus DC secundum unicam lineam quandam XY, & obliquè emergentibus è latere BC: refractio, inquam, sic ad alterum dimidium facta, foret semissis refractionis ad integrum Prisma, si modo unicum quodpiam radiorum mediocriter refrangibilium genus spectetur. Quinetiam, si cætera omnia radiorum genera simul spectentur, assertio illa, licet non ampliùs sit absolutè vera, tamen veritati tam proximè accedet, ut quoad sensum & calculum mechanicum pro verâ habeatur. Quamobrem, cùm refractionis utriusque ad X & Y peractæ computatio geometrica ægriùs institui possit; istud, more ad praxin magis accommodato, utut mechanico, perficere non verebor: confisus id mihi vitio verti non debere, si dum computationes rebus Physicis adhibeo, minutias, quæ operam molestè & sine fructu producerent, missas faciam. Refractionem itaque ex unicâ tantum parte Prismatis perpendam; & quoniam omnes radii, demptis mediocriter refrangibilibus, à dimidio ACD bis deberent refringi, & semel tantùm ab altero dimidio DCB, perpendiculariter ingressi latus planum DC secundum lineam XY: itaque in dimidio DCB fiat calculus, hoc est, ad latus planum BC; supposito quòd omnibus radiis secundum eandem lineam XY allapsis, angulus, quem maximè refrangibiles cum minimè refrangibilibus, postquam refringerentur à latere BC, constituerent, foret dimidium anguli PYT; h. e. 1°. 9′. Jam, cùm angulus incidentiæ radii XY ex præmonstratis sit 31°. 36′, & angulus refractionis mediocris 54°. 10′; transferentur hæc omnia in schema appositum; ponendo quòd CB sit superficies disterminans Medium vitreum



DE MENSURA



vitreum versus A, & Aereum versus F, & quòd angulus incidentiæ XYH sit 31°. 36′; eritque angulus refractionis, RYF, 54°. 10′; & angulus PYT, 1°. 9′; differentia nempe refractionis inter maximè refrangibiles YP & minime refrangibiles YT. Qui angulus à radio YR mediocriter refracto, & confinium Cærulei & Viridis occupante, bisecatur. Ac proin angulus, PYR vel RYT, erit $34\frac{1}{2}$ min. dimidium totius PYT. Adeoque angulus PYE 54 grad. $44\frac{1}{2}$ min. & angulus TYE 53 grad. $35\frac{1}{2}$ min. & eorum sinus, PG ac FT, erunt 81656 & 80481; quorum proportione ad simpliciores numeros redactâ, erit PG ad TF ut $69\frac{1}{2}$ ad $68\frac{1}{2}$ circiter. Ad hunc modum experimenta & calculum cùm sæpius instituerim, horum sinuum proportiones inter terminos 67 ad 66, & 72 ad 71 semper obvenerunt; sed ut plurimum incidi in proportiones 69 ad 68, $69\frac{1}{2}$ ad $68\frac{1}{2}$, & 70 ad 69; quarum tantilla est differentia, ut parvi interest quænam adhibeatur.

Illarum refractionum sinus ad communem sinum incidentiæ conferuntur.

40. Ratione sinuum refractionis pro extremis radiorum, similiter incidentium, generibus sic inventâ, eorum computatio ad sinum incidentiæ simul innotescit; quippe qui paulo antè inventus est 52400: & conferendo hunc, 52400, ad sinus 81656 & 80481, eorum ratio in minoribus numeris reperietur, $44\frac{1}{2}$ ad $69\frac{1}{2}$, & $68\frac{1}{2}$; aut $44\frac{1}{4}$ ad 69 & 68 ferè. Refractionibus nempe ex Vitro in Aere peractis.

Radiorum, ad oppositas partes ejusdem refringentis superficiei incidentium, sinus sunt reciprocè proportionales.

41. Quòd si radii è contra ex Aere in Vitrum similiter incidant, proportiones sinuum nullo negotio ex jam inventis eruuntur, utpote quæ sunt reciprocæ. Sit I communis sinus incidentiæ è Vitro in Aerem, P sinus refractionis maximè refrangibilium radiorum, R mediocriter refrangibilium, & T minimè refrangibilium. Dico, quòd ex horum reciprocè proportionibus, si $\frac{1}{I}$ ponatur esse sinus incidentiæ ex aere in vitrum, erit $\frac{1}{P}$ sinus refractionis maximè refrangibilium radiorum, $\frac{1}{R}$ sinus refractionis mediocriter refrangibilium,

frangibilium,

REFRACTIONUM.

frangibilium, ac $\frac{1}{T}$ minimè refrangibilium. Nam cùm sinus incidentiæ radii maximè refrangibilis è vitro in aerem sit I, & sinus refractionis P, radii ejus ex Aere in Vitrum, per easdem lineas retroacti, sinus incidentiæ erit P, & sinus refractionis I; siquidem jam radius est incidens, qui prius fuerit refractus. Est ergo sinus incidentiæ radii maximè refrangibilis, ex aere in vitrum utcunque incidentis, ad sinum refractionis ut P ad I; hoc est (applicando terminos rationis ad P) ut I ad $\frac{I}{P}$; hoc est (applicando ad I denuo) ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{P}$: et simili argumento constabit ejusmodi sinus radii mediocriter refrangibilis esse ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{R}$; & sinus minimè refrangibilis ut $\frac{1}{I}$ ad $\frac{1}{T}$. Liquet ergo, quòd posito $\frac{1}{I}$ communi sinu incidentiæ, erunt $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$, & $\frac{1}{T}$ singulorum generum respectivè sinus.

Illustratur refractio Vitri.

42. Rem numeris illustro. Cùm $44\frac{1}{4}$ ad 69 & 68 sit ratio sinûs communis incidentiæ ad sinus maximè discrepantium refractionum è Vitro in Aerem: sinus incidentiæ communis ad sinus refractionum ex Aere in Vitrum, erit ut $\frac{1}{44\frac{1}{4}}$ ad $\frac{1}{69}$ & $\frac{1}{68}$; sive $\frac{69 \times 68}{44\frac{1}{4}}$ (=106 ferè) ad 68 & 69. Hoc est, pro radiis maximè refrangibilibus, sinus incidentiæ ad sinum refractionis, ut 106 ad 68, & pro minimè refrangibilibus ut 106 ad 69.

E refractionibus extremorum generum facile est de intermediis conjecturam facere.

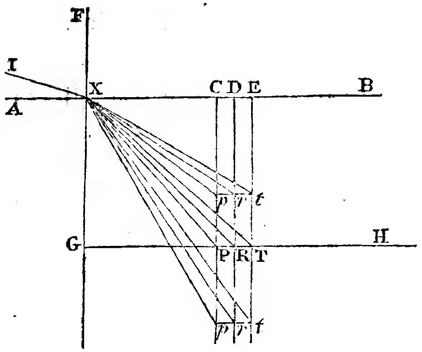
43. Hisce sic determinatis, rationes sinuum pro radiis intermediis facilè determinantur ex cognitis colorum distantiis, quas in imagine coloratâ observant. Sic radii, qui ad Cæruleum paulo magis quàm ad Flavum vergunt, cùm in mediam imaginem cadant, intermediam rationem sinuum $44\frac{1}{4}$ ad $68\frac{1}{2}$, vel 106 ad $61\frac{1}{2}$ circiter habebunt; & sic de aliis.

Theorema ostenditur, quomodo è refractionibus radiorum heterogeneorum ad Vitrum, vel quodvis Medium, inter se determinatis, possunt etiam ad alia quælibet

44. Ad eundem modum, quo refractiones ad Vitrum determinatæ sunt, id ipsum posset fieri ad alia Media; sed è re erit, ut Regulam jam ostendam, quâ refractionum istarum mensuræ, ex sinubus earum, sic ad Vitrum determinatis, possunt determinari ad quodlibet aliud Medium propositum, idque licet istud sit alii Medio quàm Aeri contiguum. Sit AB superficies terminans Aerem ex parte F, & Vitrum ex parte G, ad cujus aliquod punctum, X, ducatur linea FXG ei perpendiculariter insistens; & præterea concipiatur rectam IX ad angulum IXA infinitè parvum duci, secundum

cundum

Media Aeri contigua refractiones, ſine novis experimentorum moleſtiis, inter ſe determinari.



cundum quam omnes omnium formarum radii ſupponantur incidere, & in X refringi; puta maximè refrangibiles verſus P, mediocriter refrangibiles verſus R, & minimè refrangibiles verſus T, alioſque intermedios verſus intermedias plagas. Porro ducatur linea quævis GH parallela ad lineam incidentiæ IX, hoc eſt, perpendicularis ad FG; ea verò ſecet radios in punctis P, R & T, à quibus demittantur PC, RD, ac TE perpendiculares ad refringentem ſuperficiem AB. His ad Vitrum ſic determinatis ac deſcriptis, ſi aliud quodvis Medium in locum Vitri jam concipiatur ſubſtitui, cæteris ſtantibus, & radii alicujus, mediocriter refrangibilis ſecundum lineam IX incidentis ad X, refractus Xr ducatur ſecans rectam DR in r (Quod fieri ſuppono, ſiquidem modum, quo mediocriter refrangibilium refractiones ad Media quælibet inveſtigari poſſunt, antehac expoſui) Dein per punctum r ducatur recta pt ſecans lineas CP & ET in p & t perpendiculariter, junganturque pX & tX: dico, quòd radii maximè refrangibiles ſecundum dictam lineam IX incidentes refringentur in lineam Xp, & minimè refrangibiles in lineam Xt; radiique cujuſvis ſpeciei, quos Vitrum refringebat, ad quodlibet punctum PT, illi ad correſpondens punctum rectæ pt per alterum dictum Medium refringentur, quod pro Vitro ſupponitur ſubſtitui; iſtis punctis linearum PT & pt habitis pro correſpondentibus, per quæ recta quævis parallela ipſi DR tranſit. Patet itaque modus, quo refractiones quorumvis radiorum ex Aere in quodlibet Medium propoſitum, obliquitate maximâ incidentium, determinari potuerunt, cognitâ unici tantum radiorum generis in iſtud medium refractione; & proportionibus ſinuum ex obliquiſſimâ iſtâ refractione determinatis, eorundem radiorum refractiones dabuntur ad quamlibet aliam datam incidentiam.

De Theorematis illius certitudine.

45. Hujus quidem Theorematis certitudinem ab experimentis nondum habeo depromptam, ſed cùm à veritate vix multum diſcrepare

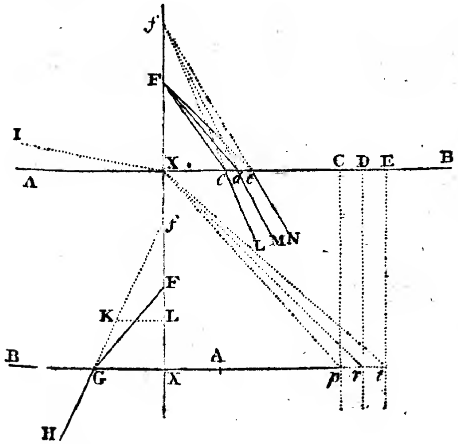
crepare videatur, nihil veritus ſum in præſentiâ gratis aſſumere. Poſthac forte vel experientiâ confirmabo, vel, ſi falſum invenero, corrigam.

De proportione quarundam linearum, quæ computo per hoc Theorema inſtituendo inſerviat.

46. Calculum quod attinet, is facilè poteſt inſtitui ex hâc proportionalitate, quòd ſinus incidentiæ radii IX (hoc eſt, ſinus 90 grad.) ſit ad ſinum refractionis (puta quæ facta ſit in lineam XR) ſicut XR ad RG. Sic ad vitrum, erit XR. RG : : 106. $68\frac{1}{2}$, & XP. PG : : 106. 68, & XT. TG : : 106. 69; & inde deducetur, quòd GP. GR. GT : : 39. $39\frac{1}{2}$. 40. Quæ proportiones ſemel inventæ poſſunt in eum finem aſſervari, ut earum ope refractiones ad alia Media quàm Vitra determinentur. Nam quolibet Medio propoſito, ſumatur XE=40, DE=$\frac{1}{2}$, & CD=$\frac{1}{2}$, atque perpendicula CP, DR, ET erigantur. Tunc ex datâ ſinuum refractionis radiorum mediocriter refrangibilium proportione, hoc eſt, ex datâ proportione ipſius Xr ad XD, dabitur punctum r, & longitudo Dr; cui æquales ſunt Cp & Et: punctiſque p ac t ſic datis, dantur rationes ipſarum Xp & XC, hoc eſt, ſinuum incidentiæ & refractionis pro radiis minimè refrangibilibus. Sic pro ſuperficie Aquam & Aerem diſterminante, ſinus iſti ſunt ut 68 ad 90 pro minimè refrangibilibus, & ut 68 ad 91 pro maximè refrangibilibus proximè.

Aliud ad idem peragendum Theorema.

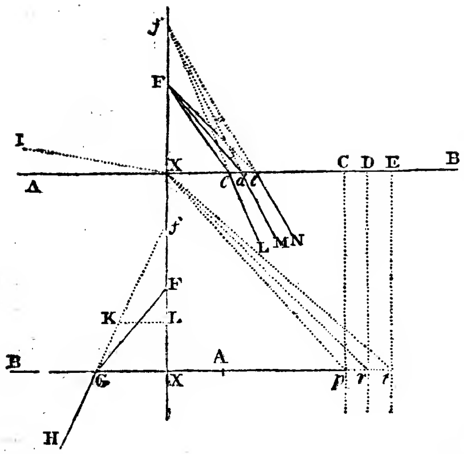
47. Proportionibus linearum XC, XD, & XE ſic inventis, menſura refractionum ex Aere in Medium quodvis propoſitum, & ad quamlibet incidentiam factarum, per aliud inſuper Theorema non inelegans determinari poteſt.



In lineâ FX, ad refringens planum AB perpendiculari, ſumatur punctum aliquod F, quod lucidum fingatur; ac ducatur quælibet Fd ſecans AB in d, eaque concipiatur eſſe mediocriter refrangibilis radius, cujus refractus ex Aere in Medium propoſitum eſto dM; qui retroductus ſecet FX in f. Porro fiat Fd.Fe::XD.XE (: : $39\frac{1}{2}$.40)

&

De Menſura



& Fd. Fc : : XD. XC (: : $39\frac{1}{2}$. 39) centroque F & intervallis Fe & Fc deſcribantur circuli ſecantes AB in *e* & *c*; junganturque F*e*, F*c*, *fe*, *fc*, & producantur *fe* & *fc* indefinite verſus N & L. Dico jam, ſi radius minimè refrangibilis incidat ſecundum lineam F*e*, quòd iſte refringetur in lineam *e*N; & ſi maximè refrangibilis incidat ſecundum F*c*, quod iſte refringetur ſecundum *c*L; & ſic radii quorumlibet intermediorum generum, manantes à puncto F, & in puncta ſibi correſpondentia inter *c* & *e* incidentes, ita refringentur à Medio propoſito, quaſi manâſſent omnes à puncto *f*; iſtis punctis inter C & E atque *c* & *e* habitis pro correſpondentibus, quorum diſtantiæ ab X & F reſpectivè, ſunt in eâdem ratione cum DX & *d*F. Cujus Theorematis demonſtrationi præſternantur duo Lemmata ſequentia.

LEMMA I.

Ad ejus Theorematis demonſtrationem.

48. Duobus punctis, *c*, *d*, in lineâ quâpiam AB ſumptis, & aliis duobus, *f* & F, in ejus perpendiculo FX, junctiſque *fd*, F*d*, *fc* & F*c*, differentia quadratorum à duobus *fd* & F*d*, concurrentibus ad *d*, æquabitur differentiæ quadratorum ab aliis duobus *fc* & F*c*, concurrentibus ad *c*. Nam, cùm $fdq = fXq + Xdq$, & $Fdq = FXq + Xdq$, erit differentia $fdq - Fdq = fXq - FXq$. Et, ob eandem rationem, erit differentia $fcq - Fcq = fXq - FXq$. Quare dictæ differentiæ, ſic æquales eidem tertio, ſunt æquales inter ſe. Q. E. D.

LEMMA II.

49. Si radius aliquis FG incidat in ſuperficiem AB, & refringatur verſus H, lineâ GH retroductâ, ut ſecet perpendiculum FX in *f*; dico, quòd *f*G. FG : : ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis.

Refractionum.

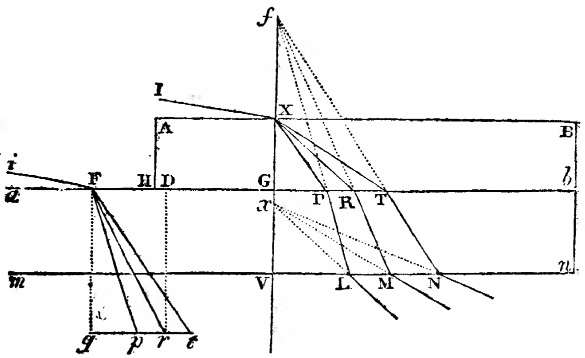
tionis. Et è contra, ſi *f*G. FG : : ſin. incidentiæ ad ſinum refractionis, erit *f*GH refractus ipſius FG. Etenim ſumatur *f*K = FG, & demittatur KL perpendicularis ad FX; quo facto, cùm angulus GFX æquetur angulo incidentiæ, & angulus G*f*X angulo refractionis, erit GX ſinus incidentiæ, & KL ſinus refractionis, habito reſpectu ad circulum cujus ſemidiameter ſit FG, vel *f*K; ſed *f*G. *f*K : : GX. KL, hoc eſt *f*G. FG : : GX. KL. Q. E. D.

Demonſtratio Theorematis.

50. His præmiſſis, Theorema propoſitum ſic demonſtratur. Ducatur IX obliquiſſima linea, ſecundum quam radii omnium formarum ex Aere ad X incidere ponantur, & in Medium propoſitum refringi; mediocriter refrangibiles verſus *r*, maximè refrangibiles verſus *p*, & minimè refrangibiles verſus *t*; eoſque lineæ ad puncta D, C & E normaliter erectæ ſecent in punctis *r*, *p* ac *t*, ut explicabatur § 44. Jam, cùm iſtorum radiorum ſinus incidentiæ & refractionis ſtatuantur eſſe ut X*r* ad XD, X*p* ad XC, & X*t* ad XE reſpectivè, ſi præterea demonſtratum fuerit, quòd *fd* ad F*d*, *fc* ad F*c*, & *fe* ad F*e* reſpectivè ſint in eâdem ratione (hoc eſt, quod *fd*. F*d* : : X*r*. XD : : ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis radiorum mediocriter refrangibilium, & *fc*. F*c* : : X*p*. XC : : ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis radiorum maxime refrangibilium) conſtabit propoſitum ex Lemmate ſecundo. Et mediocriter refrangibiles quòd attinet, cùm *fd* ſupponatur refractus ipſius F*d*, erit (per Lemma ſecundum) *fd* ad F*d* ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, hoc eſt, ut X*r* ad XD. Sed eadem proportionalitas in cæteris radiorum generibus jam demonſtranda proponitur, puta quòd ſit *fc*. F*c* : : X*p*. XC. Scilicet eſt F*c*. F*d* : : XC. XD, ut & F*d*. *fd* : : XD. X*r*, per hypotheſin. Quare permutando & connectendo rationes æquales, eſt F*c*. XC : : F*d*. XD : : *fd*. X*r*; & quadrando, F*cq*. XC*q* : : F*dq*. XD*q* : : *fdq*. X*rq*; diminuendoque per terminos æqualis rationis, F*cq*. XC*q* : : *fdq* − F*dq* (ſive per Lem. I. *fcq* − F*cq*) : X*rq* − XD*q*, ſive C*pq*; & augendo per terminos æqualis rationis, F*cq* : XC*q* : : *fcq*. C*pq* + XC*q* (X*pq*); denique terminorum radices extrahendo, permutandoque, eſt *fc*. F*c* : : X*p*. XC. Quare *fc*, ſive *c*L, eſt refractus ipſius F*c* per Lemma ſecundum. Q. E. D. Et eodem argumento patebit, quòd *e*N ſit refractus radii F*e*. Deque aliis radiis, pro variis refrangibilitatis gradibus intermedia ſpatia variè occupantibus, idem intelligendum eſt.

Heterogeneorum refractiones, à ſuperficiebus aeri neutrâ ex parte contiguis, Theoremate etiam determinantur.

51. De refractionibus ſuperficierum Aeri contiguarum menſurandis hæc ſatis. Quòd ſi deſideretur id ipſum ad alias ſuperficies, aëri ex parte neutrâ contiguas, fieri; ſunto AB*b*H & *abnm*, duo quælibet Media, ſecundum planam ſuperficiem H*b* contigua, &



Aere circundata; ſitque AB planum ipſi H*b* parallelum, & in eo ſumatur punctum X, ad quod ducatur XV perpendicularis, & IX obliquiſſima linea ſecundum quam (ut jam antè) radii omnium formarum incidant, & pro gradu refrangibilitatis refringantur ad P, R, & T, aliaque intermedia loca. Horum radiorum, in propoſitam ſuperficiem *ab* ſic incidentium, refractiones jam quærantur; & cùm refractiones mediocriter refrangibilium ad quaſlibet ſuperficies fuerint antehac expoſitæ, radii XR ſit refractus RM, & is retroducatur, donec ſecet perpendiculum XV in *f*, & inſuper ducantur *f*P, *f*T, & producantur ad L & N. Dico, quòd PL erit refractus ipſius XP, ac TN ipſius XT, atque omnes aliarum formarum radii incidentes inter P ac T ita refringentur, ut poſtea divergant à puncto *f*. Concipiatur enim, quòd Medium *abnm* longius verſus *am* producitur quàm Medium AB*b*H, ita ut ejus plani *a*H*b* pars inter H & *a* ſit Aeri contigua; & ad aliquod in eo punctum F ducatur perpendicularis F*g*, nec non obliquiſſima linea *i*F, ſecundum quam radii omnium formarum incidant, & pro gradu refrangibilitatis refringantur ad *p*, *r*, *t*, locaque intermedia; perinde ut effectum erat ad alterius Medii ſuperficiem AB. Præterea ſumatur FD = GR; & ducatur D*r* ipſi F*g* parallela, ut ſecet radium

radium F*r* in *r*; unde *rg* demittatur ad F*g* normalis, alioſque radios F*p* & F*t* ſecans in *p* ac *t*. Jam, cùm ſit *gr* = GR, erit etiam *gp* = GP, & *gt* = GT ex oſtenſis § 44; & inſuper ex oſtenſis § 35. cùm radiorum ſecundum IX & *i*F, lineas parallelas, incidentium eadem ſit refractio in Medium *abnm*, ſive immediatè ingrediantur ex Aere, ſicut ſit ad F, ſive priùs permeent aliud Medium ut AB*b*H parallelis planis terminatum: ſequitur, quòd radii, alterutro modo refracti in dictum Medium *abnm*, ſunt paralleli radiis homogeneis altero modo in idem Medium refractis; hoc eſt, quòd F*p* ad PL, F*r* ad RM, & F*t* ad TN ſunt paralleli. Quapropter, ſi refracti radii PL, RM ac TN retroducantur, donec ſinguli occurrunt perpendiculo GX, cum eo & baſibus GP, GR ac GT conſtituent triangula ſimilia triangulis *gp*F, *gr*F, & *gt*F, imo & ipſis æqualia; ſiquidem eorum baſes *gp* & GP, *gr* & GR, *gt* & GT ſibimet reſpectivè ſint æquales. Quare, cùm horum triangulorum vertices conveniant ad idem punctum F, illorum etiam vertices ad idem aliquod punctum *f* convenient; hoc eſt, radii PL, RM ac TN, ipſorum XP, XR & XT refracti, divergent omnes ab eodem puncto *f*. Q. E. D.

52. Oſtenſo hoc, ſequentia obveniunt notanda. Theorema illud notis quibuſdam promovetur.

I. Quòd proportiones ſinuum incidentiæ & refractionis, ad ſuperficiem H*b* factæ, ex his facilè determinantur. Nam pro radiis maximè refrangibilibus ſinus iſti ſunt ut *f*P ad XP, & pro minimè refrangibilibus ut *f*T ad XT, &c.

II. Hinc ſi proportiones ſinuum refractionis ex Aere in duo quælibet Media propoſita, paribus incidentiis, dentur; proportiones ſinuum refractionis ex altero Mediorum in alterum facile dabuntur, dividendo nempe ſinus poſterioris Medii per correſpondentes ſinus anterioris. Sic cùm refractio ſit ex Aere in Vitrum, dicti ſinus ſunt ut 68, $68\frac{1}{2}$, 69; & cùm ſit ex Aere in Aquam, ſunt ut 90, $90\frac{1}{2}$, 91. Ergo cùm ſit ex Aquâ in Vitrum erunt ut $\frac{68}{90}$, $\frac{68\frac{1}{2}}{90\frac{1}{2}}$, $\frac{69}{91}$, hoc eſt ut 281, $281\frac{1}{2}$, 282 ferè.

III. Si tertium aliquod Medium, Aere denſius, poſtponatur Medio *abnm*, contingens illud in ſuperficie *mn*, quæ concipiatur plana ipſiſque AB & *ab* parallela, & ſi radii divergentes à puncto *f*, ſicut modò oſtenſum erat, in illud incidant ad puncta L, M & N; poſtquam

poſtquam in iiſdem refringuntur, divergent rurſus ab alio quodam puncto *x*, quod ſitum eſt in perpendiculo XG. Et ſic præterea in infinitum, quotcunque licet Media parallelis planis ab invicem diſcreta, ſeſe ordine ſequantur. Quòd ſi Aer immediatè ſuccedat Medio *abnm*, punctum iſtud *x*, à quo emergentes radii tendunt, ſitum erit ad V in ipſâ refringente ſuperficie; propterea quòd emergent paralleli ad ſummè obliquam lineam IX, ſecundum quam primùm incidebant ex Aere; ſi modò emergere dicantur, qui nunquam divaricabant à refringenti ſuperficie.

IV. Si radii ab aliquo puncto F, in Aere ſito, divergentes, tendant ad puncta *c*, *d*, *e*, eo more quem ad § 47. explicui, & per varia deinde plana refringentia ipſiſque AB parallela tranſeant; ſemper divergent omnes ab eodem aliquo puncto, quod ſitum eſt in perpendiculo planorum per punctum F tranſeunte, non ſecus quàm ſi incidiſſent in planum AB, advenientes in obliquiſſimâ lineâ IX; & longitudines radiorum, punctis refringentibus dictoque perpendiculo interceptorum, ſunt ut ſinus incidentiæ & refractionis ad ſingula plana, quæ reſpiciunt. Quarum aſſertionum demonſtrationes, cùm facile eruantur è prædictis, prætermitto, ne nimius in hâc re videar.

SECTIO TERTIA.

De Planorum Refractionibus.

POSITIS Refractionum legibus radiorum per diverſa Media trajectorum, affectiones aliæ jam tradendæ ſunt; & primò refractiones Planorum in gratiam doctrinæ de Coloribus, pòſt explicandæ, deſcribam; deinde Sphæricarum & aliarum Superficierum proprietates enarrabo; tum ut Colorum exinde ortorum phænomina detegantur, tum ut Inſtrumentorum, Opticis uſibus inſervientium, conſtructio rectiùs innoteſcat. Imprimis autem Plani Solitarii refractiones, deinde Planorum Refractiones iteratas conſiderabo.

De Plani Solitarii refractionibus. Quod ad radios ejuſdem cujuſcunque generis attinet, paſſiones in Lectionibus Dris. Barrow (his fundamentis, quòd radii Lucis in ſimilari Medio directi ſunt; quòd eorum refractio fit in ſuperficie

* Barrow Lect. Opt. L. III. Art. 3. † Ibid. Lect. III. Art. 4 & 6.

ficie ad Medii refringentis ſuperficiem perpendiculari; & quòd ſinus incidentiæ perpetuò ſunt proportionales ſinubus refractionum in aliud Medium ſimilare factarum) traduntur; & idcirco ſufficiet aliquas, ſub formâ Lemmaticarum Propoſitionum, ſine demonſtrationibus hîc recenſuiſſe.

PROP. I.

* *Radii cujuſvis refracti Incidens incidentis viciſſim fit Refractus.*

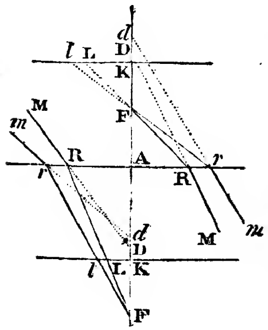
PROP. II.

† *Angulo incidentiæ æquali æqualis, & majori major convenit, tum angulus refractionis, tum refractus, & contrà.*

PROP. III.

‡ *Incidentium radiorum Refractos exhibere.*

Inſtantiam in radiis ad Medium denſius è rariori divergentibus accipe.



Sit F punctum radios FR, *Fr* aliosque innumeros verſus refringentem ſuperficiem, AR, ejaculans; ſitque FA radius perpendicularis, quem produc ad K, ut ſit AF ad AK, ſicut ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ; & ad K erige perpendiculum KL. Quo facto, radios quoſlibet incidentes FR, *Fr* retrorſum produc, donec præfatæ KL occurrant in L & *l*: & in angulo FAR inſcribe RD=RL, & *rd*=*rL*. Quibus verſus M & *m* productis, habebis refractos radios RM & *rm*, & eâdem ratione refractos quamplurimos confeſtim duces.

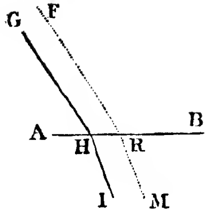
PROP. IV.

Radium datæ rectæ parallelum deſignare, cujus Refractus per datum punctum tranſibit.

Sit AB ſuperficies refringens, M punctum datum, & GH recta

‡ Ibid. L. IV. Art. 5.

De Planorum



cui radius incidens debet eſſe parallelus. Et imprimis radii ſecundum GH incidentis duc refractum HI per Prop. III. eique parallelum age MR; & FR, datæ GH parallelè ductus, erit radius incidens.

PROP. V.

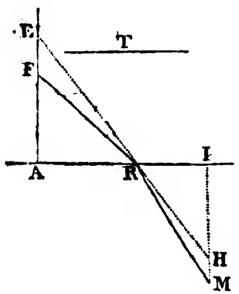
Radium è dato puncto prodeuntem deſignare, cujus refractus evadet rectæ poſitione datæ parallelus.

Abſolvitur ad modum quartæ Propoſitionis, denominatione radiorum ſecundum Prop. I. permutatâ.

PROP. VI.

Radium è dato puncto, F, *progredientem deſignare, cujus refractus per aliud punctum datum,* M, *tranſibit.*

Per F & M ducantur refringenti perpendiculares; &, radio in Medium denſius incidente, fiat AE ad AF, ut ſinus incidentiæ ad radicem differentiæ quadratorum à ſinubus incidentiæ & refractionis. Item T ad MI, ut ſinus refractionis ad eandem radicem. Anguloque AIM, per E tranſiens, ipſamque T adæquans inſcribatur recta RH, & connectantur FR, RM; nam ipſæ FR, RM erunt radii quæſiti.



Cùm radius incidit in Medium rarius, appellatione (ſecundum Prop. I.) commutatâ, abſolvitur ut antè.

Cæterùm quo pacto data recta angulo recto interferenda ſit, quæ per punctum datum tranſibit, in Lect. V. Dris. * *Barrow* per Hyperbolæ & Circuli interſectionem oſtenditur.

PROP. VII.

† *Radiorum ad planam ſuperficiem divergentium, parallelorum, vel convergentium Refracti, itidem divergent, paralleli erunt, vel convergent, & è contrà.*

* Idem elegantiùs perfecit Barrovius Lect. Geom. VI. Art. 2.

PROP.

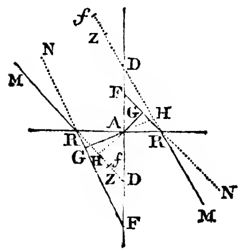
PROP. VIII.

Refractionibus.

Punctum, à quo refracti illi radii divergunt, vel ad quod convergunt, invenire.

Caſ. 1. Cum radiorum definita ſit inclinatio, duc refractos per Prop. III, IV, V vel VI. & interſectionem habebis.

Caſ. 2. At cùm inclinatio exiſtit quâvis datâ indefinitè minor, eodem recidit Problema, ac ſi punctum in radio obliquo refracto quæres; quod radiorum alterutrinque jacentium interſectiones diſterminat & intercedit, quodque pro radiationis centro, ſeu loco imaginis, reſpectu oculi per cujus pupillæ centrum radius ille tranſigitur, haberi debet. Ejus autem inventio ejuſmodi eſt.



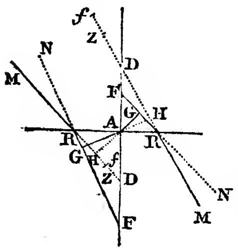
Sit DRM refractus cujuſvis incidentis FRN, ſitque F centrum radiationis incidentium, (ſive divergentium ſive convergentium) radiorum; & FA, refringenti normaliter inſiſtens, ſecet RM in D. Jam ab A demitte ad hos radios perpendicula, AG & AH; fac eſſe RF. R*f* : : FG. DH; & ipſius RM, aliorumque refractorum, proximè RM utrinque jacentium, centrum radiationis erit *f* ‡.

Scholium. Cæterùm punctum hoc *f* radiorum in plano FAR jacentium concurſus ſolummodò exiſtit; nam aliorum, extra planum FAR jacentium, refracti nec in puncto *f*, nec ullibi omnino radium R*f* ſecabunt; ſi eos ſolummodò excipias, quorum incidentes jacent in ſuperficie conicâ, cujus axis eſt AF, vertex F, & ſemiangulus AFR; utpote qui omnes præfatum R*f* in puncto D ſecabunt, quod in axe FA ſit poſitum. Et hujus itaque R*f* centra radiationis præcipuè ſunt duo; alterum *f*, à refractis jacentium in plano FAR effectum; & alterum à refractis jacentium in conicis ſuperficiebus axe FA, anguliſque AFR, ADR deſcriptis. Ad reliquos autem radios quod attinet, aliter circa FR quaquaverſum poſitos, eorum refracti maximè appropinquant radio R*f*, alicubi inter D & *f*; adeo ut reſpectu Oculi, per cujus pupillæ centrum radius RM tranſit, locus Imaginis per totum ſpatium *f*D diffundi debeat:

† Barrow Lect. Opt. L. IV. Art. 2, &c. ‡ Vid. Barrow Lect. Opt. L. V. Art. 15. &c.

DE PLANORUM

beat: vel potius, cùm ſpatium fD ſit unici tantum puncti F imago, debemus unicum aliquod in eo punctum, quod omnis lucis ab eo verſus oculum pergentis meditullium occupet, inter puncta D & f in mediâ circiter diſtantiâ interjacens, pro ſenſibili imagine ſtatuere. Puncti verò illius accurata determinatio, cùm omnium radiorum ab F verſus oculi pupillam refractorum habenda ſit æſtimatio, Problema ſolutu difficillimum præbebit; niſi hypotheſi alicui ſaltem veriſimili, ſi non accuratè veræ, innitatur aſſertio. Quemadmodum, cùm radii æquè multi à termino D aliiſque vicinis punctis, ac à termino f aliiſque punctis ſimiliter ſibi vicinis, verſus Oculum videantur profluere; locus Imaginis ita debet in medio iſtorum terminorum ſtatui, ut angulus, quem radii duo à D & f, ad idem quodpiam pupillæ punctum convergentes, includant, à radio ab illo viſionis loco ad idem pupillæ punctum pergente, quàm proximè ſemper biſecetur. Quâ hypotheſi admiſſâ, nihil



aliud agendum eſt, quàm ut fiat Mf+MD. MD :: fD. ZD, & erit Z locus viſionis puncti F quæſitus, poſito nempe quòd M ſit locus oculi. Nam cùm ponatur Mf + MD. MD :: fD. DZ, erit diviſim Mf. MD :: fZ. DZ, & proinde ductis tribus lineis à f, D, & Z ad M, vel potius ad punctum quodpiam huic M indefinitè vicinum; angulus, quem externæ duæ continent, ab interjacente lineâ (per 3. 6. Elem.) quàm proximè ſemper biſecabitur.

54. His paucis circa radios homogeneos in gratiam ſequentium obiter notatis, ut eorum penitior cognitio habeatur, Lectiones, quas Vir Reverendus D[r]. Barrow de iiſdem fuſius compoſuit, conſulendas eſſe hortor; deque heterogeneis ſive diſſimiliter refrangibilibus radiis pergo actutum differere.

PROP. IX.

E radiis diverſi generis, à puncto lucido fluentibus, ſoli poſſunt ad aliud commune punctum refringi, qui jacent in plano per utrumque punctum tranſeunte, et ad planum refringens perpendiculari.

Utpote cùm radii cujuſque refractio ſemper fiat in plano ad Medii

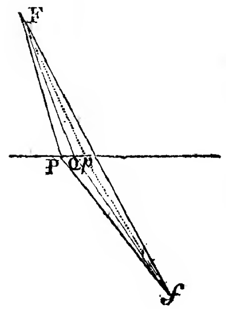
REFRACTIONIBUS.

Medii refringentis ſuperficiem perpendiculari, & ejuſmodi duo plana per utrumque punctum tranſire nequeant.

PROP. X.

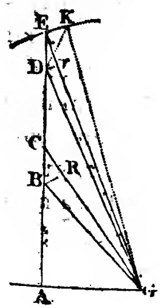
Si radiis diverſorum generum à dato puncto fluentibus, quorum refracti ad aliud punctum datum convergunt, illi magis à lineâ rectâ, punctis concurſuum ſive radiationum centris, interjacente divaricant, qui ſunt magis refrangibiles.

Sint FPf, FQf radii diſſimiles, hinc & inde convenientes in F & f; & manifeſtum eſt, quòd non penitus coincident, quia ſic par eſſet refractio contra hypotheſin. Neque radius magis refrangibilis poteſt eſſe rectæ Ff propior. Sic enim propter obliquitatem ex parte Medii denſioris majorem, major eſſet ejus refractio per Prop. II. & hypotheſin, hoc eſt, angulus FPf eſſet minor angulo FQf contra 21. I. Elem. Reſtat itaque, ut ſit magis refrangibilis FPf, qui à rectâ Ff magis divaricat.



LEMMA I.

Quatuor lineis, GB, GC, GD, GE, *à dato puncto,* G, *ad datam lineam,* EB, *ita ductis, ut ſit* GB. GC :: GD. GE; *angulus* BGC, *quem minima,* GB, *cum alterutrâ intermediarum,* GC, *conſtituit, major eſt quàm angulus* DGE, *ab alterâ intermediâ,* GD, *& maximâ,* GE, *conſtitutus.*



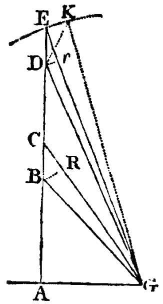
Nam centro G, radio GE, deſcribatur circulus EK, & radius GK ducatur, conſtituens angulum DGK æqualem angulo BGC, & puncta K, D jungantur; eruntque triangula GDK, GCB ſimilia, propter æquales angulos ad G, & latera circa illos proportionalia. (6. 6. Elem. & Hypoth.) Nempe GB. GC :: GD. (GE) GK. Quare angulus KDG= ang. CBG. Sed ang. EDG (16. I. Elem.) > ang. CBG. Ergo linea

KD>EB

De Planorum KD > ED (7. 3. Elem.) & ang. KGD > ang. DGE (25. I. Elem.) hoc eft, ang. CGB > ang. EGD. Q. E. D.

LEMMA II.

Pofitis iftis angulis infinitè parvis, ac GA *perpendiculari ad lineam* EB *demiffâ, erit ang.* EGD. *ang.* CGB : : BA. DA.



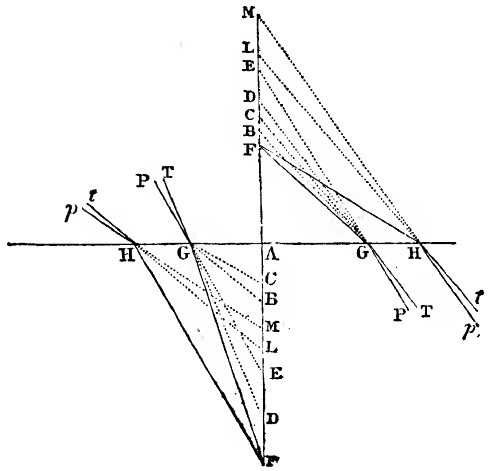
A punctis enim B & D ad lineas GC, GE demittantur normalia BR ac D*r*; & erunt anguli præfati ad fe invicem ut eft $\frac{Dr}{DG}$ ad $\frac{BR}{BG}$, ponendo nempe lineas iftas, BR ac D*r*, æquipollentes effe arcubus infinitè parvis, quibus anguli ifti fubtenduntur. Eft autem BG.CG : : DG.EG ex hypothefi; & divifim, BG. CR : : DG. E*r*. Item propter fimilia triangula BAG, CRB, eft BA. AG : : CR. BR; & pari ratione EA vel DA. AG : : E*r*. D*r*, five AG. DA : : D*r*. E*r*. Quamobrem addendo rationes æquales, eft BA. AG + AG. DA (: : BA. DA) : : CR. BR + D*r*. E*r* (& permutatis terminis pofteriorum rationum) : : CR E*r* + D*r*. BR (& æquipollente ratione pro CR. E*r* fubftitutâ) : : BG. DG + D*r*. BR (terminifque ad invicem applicatis) : : $\frac{Dr}{DG}$. $\frac{BR}{BG}$. Eft itaque BA. DA : : $\frac{Dr}{DG}$. $\frac{BR}{BG}$, h. e. ut ang. EGD ad ang. CGB. Q. E. D.

PROP. XI.

Heterogeneis radiis fecundum eandem lineam incidentibus, quo obliquior eft eorum incidentia, cæteris paribus, eo major erit differentia refractionis.

Sit FG linea fecundum quam duo radii incidunt; quorum unus, maximè refrangibilis, pergat verfus P; & minimè refrangibilis verfus T: eritque angulus PGT differentia refractionis. Item efto FH linea obliquior quàm FG; & fecundum hanc alii duo ejufmodi radii incidant; quorum maximè refrangibilis verfus *p*, & minimè refrangibilis verfus *t* refringitur: & fimiliter erit angulus *p*H*t* eorum differentia refractionis. Dico jam, quòd fit angulus *p*H*t* > PGT. Demittatur enim FA ad refringens planum linea normalis, quæ refractos radios retroactos fecet in D & E, L & M; & ad hanc à puncto G ducatur duæ lineæ, GB, GC, ipfis HL, HM parallelæ.

Refractionibus. Jam, cùm tres lineæ GF, GD, GE (ex naturâ refractionis antè defcriptâ § 27, 28 & feq.) fint in ratione datâ; & alteræ tres HF, HL, HM in eâdem ratione, proportionales erunt HL. HM : :



GD. GE. Sed eft HL. HM : : GB. GC, propter triangula fimilia LMH & BCG. Quare GB. GC : : GD. GE, adeoque ang. BGC > ang. DGE per Lemma I. hoc eft; ang. LHM > ang. DGE; five ang. *p*H*t* > ang. PGT. Q. E. D.

55. Cæterùm, ut de mutuis angulorum PGT & *p*H*t* proportionibus habeatur plenior determinatio, dico præterea, quòd funt inter fe quàm proximè ut lineæ AB & AD; fegmenta nempe bafium triangulorum æquialtorum, quorum alterum, EGD, conftituitur à radiis GP ac GT, cum perpendiculo AF concurrentibus; & alterum, CGB, fit fimile triangulo MHL, à radiis H*p* & H*t* fimiliter conftituto. Nam anguli EGD & CGB, fi effent infinitè parvi, forent inter fe ut AB & AD per Lem. II. At ifti ex hypothefi funt æquales angulis PGT & *p*H*t*. Quare etiam illi PGT & *p*H*t*, modò effent infinite parvi, forent itidem ut AB ad AD; & pari ratione conftat, quòd funt quàm proximè ut AC ad AE. Scilicet eorum ratio has duas rationes femper intercedit, & ideo veritatem adhuc propiùs affequemur adhibendo rationem intermediam. Nempe quòd eft PGT ad *p*H*t* ut AB + AC ad AD + AE, vel ut $\sqrt{AB \times AC}$ ad $\sqrt{AD \times AE}$ proximè.

PROP.

DE PLANORUM

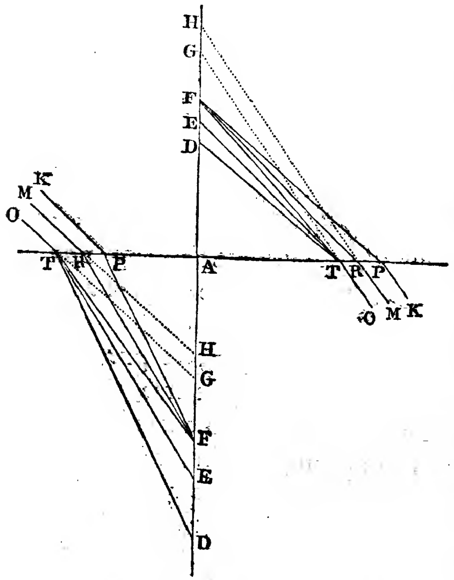
PROP. XII.

Radios diverforum generum, à dato puncto profluos, defignare, quorum refracti per aliud punctum datum tranfibunt.

Cùm punctorum alterutrum infinitè diftet, ut radii ex eâ parte exiftent paralleli; res per Prop. IV & V. abfolvitur, & per Prop. VI. cùm utrumque infinitè diftat.

Scholium.

56. E re erit, ut oftendam, quomodo ex datâ alicujus radii pofitione cæteri omnes expeditiùs determinentur.



Caf. I. Sint FT, FR, FP radii ab F prodeuntes; quorum refracti, TO, RM, PK, paralleli funt futuri. Et radii FT efto finus incidentiæ ad finum refractionis, ficut I ad T; quemadmodum & radiorum FR & FP finus ifti, ficut I ad R & P. Jam ut horum quovis, FT, pofitione dato, cæteri confeftim defignentur, demitte FA refringenti normalem; & in angulo FAT infcribe TE, TD, hâc lege, ut fit T. R. P :: TF. TE. TD; & ipfis TE, TD age parallelas, FR, FP. Dico factum. Scilicet refractis TO, RM cum perpendiculo DA occurrentibus in G & H, erit I. T :: TG. TF; & præterea, cùm fit T. R :: TF. TE (hyp.) erit ex æquo I. R :: TG. TE. Sed eft I. R :: RH. RF. Ergo TG. TE :: RH. RF; atque adeo, cùm TE & RF parallelæ funt (ex hyp.) erunt etiam TG & RH parallelæ. Q. E. O. Deque radii PK parallelifmo confimile eft ratiocinium.

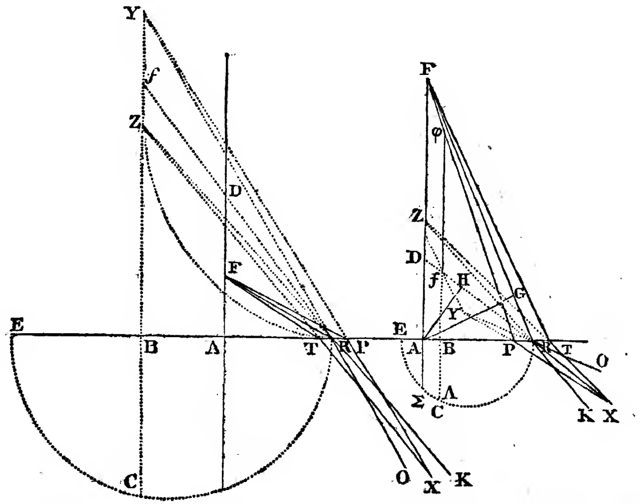
Caf.

REFRACTIONIBUS.

Caf. 2. Si parallelis incidentibus refracti ad datum punctum convergant, propofitum nihil fecus exequaris, ut è Prop. I. patet.

Caf. 3. Denique fi divergant incidentes, & refracti convergant, Problema folidum eft; fed ad planum quodammodo reducitur fingendo differentiam refrangibilitatis infinitè parvam effe: quæ cùm femper fit admodum exigua, folutionem ex iftâ hypothefi haud gravatim exhibebo.

Pone FRX radium effe pofitione datum, & radios FPX, FTX (quorum datæ funt finuum incidentiæ & refractionis rationes)

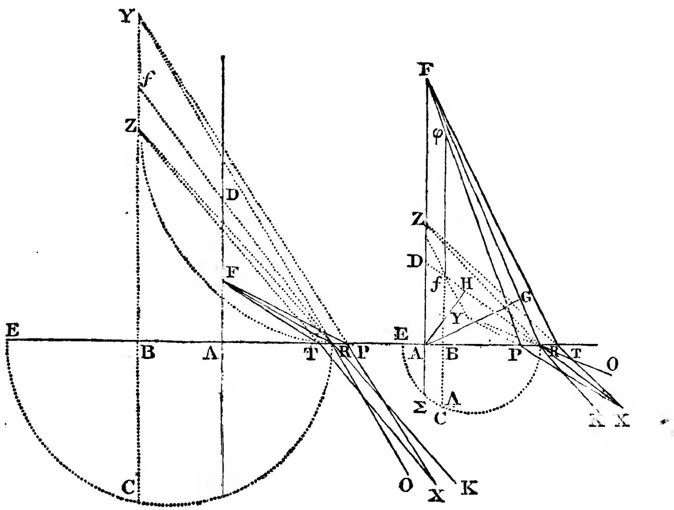


punctis F & X interferendos effe. Jam alios etiam radios, æquè refrangibiles ac radios FP, FT, finge fecundum lineam FR incidere, & refractos eorum RO, RK (ope Prop. tertiæ) defcribe; centraque radiationum, Y & Z, per Prop. VIII. quære; ac junge YX ac ZX refringenti occurrentes in P ac T. Dico factum. Nempe FPX, FTX effe radios, quos oportuit defignare. Nam, cùm ex hypothefi, differentia refrangibilitatis, adeoque diftantia punctorum T, R & P, fit indefinitè parva, conftat homogeneos radios, RO, PX, fibi mutuò viciniffimos effe, & inde ab eodem radiationis puncto Y divergere. Rectè ita determinavi radium PX per radii RO centrum radiationis tranfiturum effe, deque radio TX per eft ratio.

57. Verùm

DE PLANORUM

57. Verùm enimvero, cùm anguli PXT determinatio eò ſpectet, ut noſcatur, quanta ſit Objectorum, mediante refractione viſorum, propter inæquabiles abſimilium radiorum refractiones confuſio, perque quantum ſpatium colores inde emergentes extenduntur; quemadmodum pateat, concipiendo F eſſe punctum lucidum, quòd, oculo in X conſtituto, per totum angulare ſpatium PXT, quod radiis PX ac TX maximè miniméque omnium refrangibilibus com-



prehenditur, dilatum ac diffuſum appareat: de magnitudine ejus paucula adjiciam. Finge lineam curvam Yfz deſcriptam eſſe, in quâ radiationum centra radiorum omnigenorum jacent, ſecundum lineam FR incidentium, & ita refractorum in puncto R, ut per totum angulum KRO divaricent; & iſta Curva non malè aſſimilabitur Objecto lucido, cujus angulus viſibilis, ſive apparens magnitudo, ad oculum in X ſitum, ſit YXZ, ac diſtantia ab eodem oculo, ad meditullium ejus æſtimata, fX. Et hinc conſectatur.

I. Quòd (cùm rei viſibilis apparens magnitudo penè ſit reciprocè ut diſtantia ejus) ſtante puncto F, & puncto X in lineâ RX ubicunque ſumpto, angulus PXT, ſive YXZ pene erit reciprocè ut longitudo fX. Et hinc intervallo RX diminuto angulus PXT augetur,

tur, ejuſque quantitas in quâlibet puncti X diſtantiâ dabitur, ſi modò data fuerit unquam in quâpiam diſtantiâ.

REFRACTIONIBUS.

II. Quinetiam angulo ORK cognito, cognoſcitur angulus quilibet PXT, ſumendo eum in ratione ad ORK, quam habet Rf ad Xf; quippe cùm YRZ (cui ORK æquatur) ſit Objecti Yfz, in diſtantiâ fR, apparens magnitudo.

III. Cùm itaque angulus ORK, pro quâlibet obliquitate radiorum juxta RF incidentium, ſuprà in Schol. ad Prop. XI. determinatus habeatur, & punctum f haud difficilè inveniatur; faciendo juxta Prop. VIII. ut ſit $RF.\ Rf :: \frac{AFq}{RF}.\ \frac{ADq}{RD}$, ſatis conſtat anguli PXT inventio.

IV. At ex abundanti ſubnoto prædictam Curvam Yfz, in quâ radiorum omnis generis, in puncto R refractorum, Radiationum centra locantur, eſſe Ciſſoidem vulgarem, ſive Diocleam, circulo accommodatam, cujus diameter RE ſit ad AR ut FRq ad AFq. Nam ſuper diametro RE deſcripto circulo iſto RCE, agatur quævis recta fBC normalis ad RE, Circuloque in C & Curvâ in f terminata. Et propter analoga latera ſimilium triangulorum RAD, RBf, erit $ADq.\ AR \times DR :: Bfq.\ BR \times fR$; & applicando poſteriorem rationem ad BR, fiet $ADq.\ AR \times DR :: \frac{Bfq}{BR}.\ fR$. Rurſuſque ducendo conſequentes rationum in Rf, & applicando ad AR, orietur, $ADq.\ DR \times Rf :: \frac{Bfq}{BR}.\ \frac{Rfq}{AR}$. Eſt autem $\frac{AFq}{FR}.\ \frac{ADq}{DR} :: RF.\ Rf$ ut priùs; & conſequentibus in DR & antecedentibus in FR ductis, oritur $AFq.\ ADq :: FRq.\ DR \times Rf$; & viciſſim $AFq.\ FRq :: ADq.\ DR \times Rf$. Quamobrem rationes eidem tertiæ congruentes connectendo, habebitur $\frac{Bfq}{BR}.\ \frac{Rfq}{AR} :: AFq.\ FRq$; ducendoque antecedentes rationum in BR, & conſequentes in AR, prodibit $Bfq.\ Rfq :: AFq \times BR.\ FRq \times AR$; & inſuper applicando poſteriorem rationem ad AFq, fiet $Bfq.\ Rfq :: BR.\ \frac{FRq \times AR}{AFq}$. Sed cùm poſuerim $RE.\ AR :: FRq.\ AFq$, erit $\frac{FRq \times AR}{AFq} = RE$; & proinde $Bfq.\ Rfq :: BR.\ RE$, ac diviſim $Bfq.\ Rfq - Bfq\ (BRq) :: BR.\ BE$. Atqui, ex naturâ circuli eſt BC media proportionalis inter BR & BE; adeoque eſt $BR.\ BE :: BRq.\ BCq$, & proinde $Bfq.\ BRq :: BRq.\ BCq$, ſive $Bf.\ BR :: BR.\ BC$: quod indicat Curvam eſſe Ciſſoidem, ſicut oſtendendum propoſui (d). 58. Re-

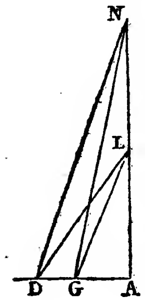
(d) Quod tamen magis geometricè ad hunc ferè modum oſtendatur. A puncto A in radios, incidentem

DE PLANORUM

58. Refractionibus ad superficiem, data duo Media discriminantem, transactis, ad explorandum quid, ex auctâ alterius Medii raritate vel densitate, consequitur, sive ad diversorum Mediorum effectus inter se conferendum, jam animum adjicio.

LEMMA III.

Si a duobus punctis, D, G, *in lineâ quâpiam* AD *sitis, ad alia duo puncta,* L, N, *in ejus perpendiculo sita, ducantur quatuor rectæ,* DN, DL, GN, GL, *ratio ductarum ad punctum remotius* N *magis accedit ad æqualitatem, quam ratio ductarum ad vicinius punctum* L; *sive est* GN. DN>GL. DL.



Sit enim GN. DN::GL. R, & erit $GNq.\ DNq::GLq.\ Rq::GNq-GLq.\ DNq-Rq$. Quare, cùm sit DN>GN, sive $DNq>GNq$, erit $DNq-Rq>GNq-GLq$. Verùm est $GNq-GLq=DNq-DLq$ (§ 48.) & ideo $DNq-Rq>DNq-DLq$, hoc est $DLq>Rq$, sive DL>R. Atque adeo, cùm supponatur GN. DN : : GL. R, erit GN. DN>GL. DL. Q. E. D.

PROP. XIII.

Posito Radiorum diversi generis communi sinu Incidentiæ, quo magis diversa est Mediorum densitas, eo major erit inæqualitas rationis sinuum Refractionis.

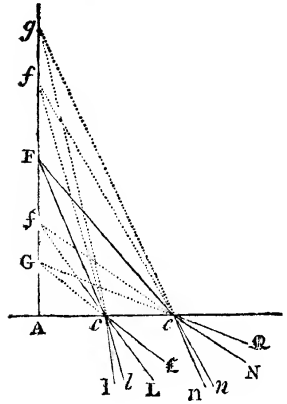
Sit *Fc* radius è minimè refrangibilibus utcunque in superficiem *Ac* incidentibus; sitque refractus ejus *cl*, qui retroactus secet perpendiculum FA in *f*. Dein capiatur A*e*, ut sit F*e* ad F*c* in datâ quâdam

cidentem refractumque, RF, RD, demissis ad perpendiculum AG, AH, erit RF ad R*f* ut FG ad DH, (Prop. VIII. Cas. 2.) Permutando RF : FG = R*f* : DH. Rectangula igitur RF × FG, R*f* × DH erunt inter se similia, & eam inter se rationem habebunt quam quadrata à lateribus homologis.
Id est $RF \times FG : Rf \times DH = RF^2 : Rf^2$.
Sed $Rf \times DH : RD \times DH = Rf^2 : Rf \times RD$.
Quare ex æquo $RF \times FG : RD \times DH = RF^2 : Rf \times RD$.
Id est, cùm rectangula RF × FG, RD × DH quadratis ex AF, AD singulatim sunt æqualia, $AF^2 : AD^2 = RF^2 : Rf \times RD$.
Permutando $AF^2 : FR^2 = AD^2 : Rf \times RD$.
Sed $AF^2 : FR^2 = AR : RE$. (Id enim ponitur.)

Quare

quâdam ratione, qualem antea descripsimus (§ 46, 47 & 51.) hâc scilicet conditione, ut habito F*e* pro radio maximè refrangibili, refractus ejus ab eodem puncto *f* divergat. Facto hoc, si pro posteriori Medio aliud utcunque densum rarumve substituatur, ejusmodi duo radii secundum easdem rectas F*e*, F*c* incidentes, semper debent ita refringi, ut ab eodem aliquo perpendiculi istius puncto similiter divergant (§ 47 & 49) quemadmodum à *g* versus *l* & *n*; posito quòd hoc Medium posterius sit densitatis ab interiori magis diversæ, quàm alterum posterius Medium, quod efficiebat divergentes à *f*. Ostendendum est itaque, quòd major sit inæqualitas rationis sinuum refractionis in posteriori quàm in priori casu. Scilicet radii F*cl* sinus incidentiæ est ad sinum

REFRACTIONIBUS.



refractionis ut *fc* ad F*c* (§ 49.) hoc est, ut 1 ad $\frac{Fc}{fc}$. Et sic radii F*en* sinus isti sunt ut 1 ad $\frac{Fe}{fe}$. Quare sinus refractionum eorundem radiorum sunt inter se ut $\frac{Fc}{fc}$ ad $\frac{Fe}{fe}$. Et simili discursu constabit, quòd radiorum *cl*, *en*, refractorum consimiles refractionum sinus sunt ut $\frac{Fc}{gc}$ ad $\frac{Fe}{ge}$. Restat itaque probandum, quòd inter $\frac{Fc}{gc}$ & $\frac{Fe}{ge}$ major sit disproportio quam inter $\frac{Fc}{fc}$ & $\frac{Fe}{fe}$; hoc est (cùm sit $\frac{Fe}{fe} > \frac{Fc}{gc}$ per Lem. III.) probandum restat, quòd sit $\frac{Fe}{ge}.\ \frac{Fc}{gc} > \frac{Fe}{fe}.\ \frac{Fc}{fc}$. Scilicet est $ge.\ fe < gc.\ fc$, per Lem. III. & sumendo reciproca rationum, erit $\frac{1}{ge}.\ \frac{1}{fe} > \frac{1}{gc}.\ \frac{1}{fc}$; ducendoque priorem rationem in F*e*, &

Quare $AR : RE = AD^2 : Rf \times RD$.
Invertendo $RE : AR = Rf \times RD : AD^2$.
Sed, propter rectas AD, *f*B inter se parallelas, erit $AR : RB = AD : fB = AD^2 : fB \times AD$.
Cùm igitur sit $RE : AR = Rf \times RD : AD^2$.
Et $AR : RB = AD^2 : fB \times AD$.
Ex æquo erit $RE : RB = Rf \times RD : fB \times AD$. Id est (propter rectangula R*f* × RD, *f*B × AD inter se similia) $RE : RB = Rf^2 : fB^2$. Dividendo $EB : BR = BR^2 : fB^2$.
Sed propter circulum $EB : BR = CB^2 : BR^2$.
Quare $CB^2 : BR^2 = BR^2 : fB^2$. Et CB : BR = BR : B*f*. Erit igitur punctum *f* ad Cissoidem à circulo ECB generatam. Q. E. D.

posteriorem,

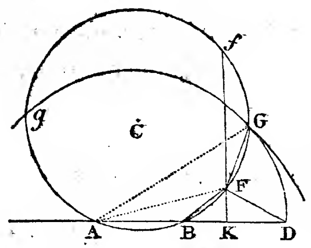
poſteriorem in FC, orietur $\frac{Fe}{ge}.\frac{Fe}{fe} > \frac{Fc}{gc}.\frac{Fc}{fc}$, & viciſſim $\frac{Fe}{ge}.\frac{Fc}{gc} > \frac{Fe}{fe}.\frac{Fc}{fc}$. Q. E. D.

Scholium.

Demonſtratio perinde ſe habet in literis majuſculis (quibus refractiones deſignavi cùm poſterius Medium ſit anteriori rarius) ſi modò vice ſigni $>$ ubique ſubintelligatur ſignum $<$, & $>$ vice $<$. Notabis inſuper, quòd in hâc demonſtratione poſui denſitatem poſterioris tantùm Medii variatam eſſe; ſed eodem recidit, ſi anteriora Media ſucceſſivè varia adhiberi, poſteriori non mutato; ſive, quod tantundem eſt, ſi refractiones è poſteriori Medio in anterius viciſſim peragi concipias. Siquidem radiis in ſuperficiem alterutrinque incidentibus conſimiles ſunt ſinuum rationes. Cæterùm de exactâ horum ſinuum pro quibuſlibet propoſitis Mediis ratione inveſtigandâ diſſerui antè, & Propoſitionem haud attigiſſem, ſi non exigiſſet Prop. XV. mox tradenda.

LEMMA IV.

Centro A, *diſtantiâ quâvis* AD, *deſcribatur circulus* DG*g*; *deinde centro quolibet* C, *diſtantiâ* AC, *deſcribatur alius circulus ſecans rectam* AD *in* B, *& circulum priùs deſcriptum in* G. *Tum arcus* BG *biſecetur in* F, *&* FK *demittatur ad* BD *perpendicularis. His ita conſtitutis, dico, quòd* FK *ſic perpendiculariter demiſſa dictam* BD *biſecabit.*



Junctis enim AF, AG, BF, FG & FD; in triangulis AFG & AFD anguli ad A ſunt æquales, propter æquales arcus, BF, FG, quibus ſubtenduntur; item latera circa iſtos angulos AD & AG ſunt æqualia, quippe radii ejuſdem circuli; & aliud latus AF habent commune. Quare etiam tertia latera, FG & FD, ſunt æqualia. Sed eſt BF æqualis FG, propter æqualitatem arcuum quos ſubtendunt; adeoque FB=FD, & triangulum FKB= triangulo FKD, & inde BK=KD.

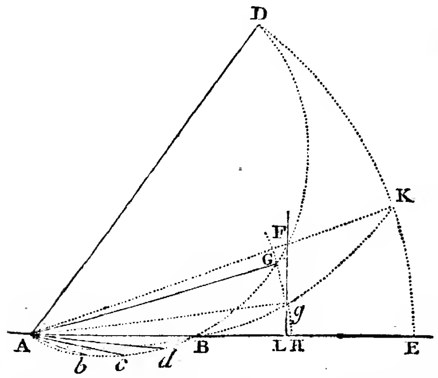
Cor.

Cor. 1. Hinc recta KF, quæ biſecat BD, inſiſtens ei normaliter, biſecabit etiam arcus BG, circulorum omnium per data duo puncta A & B tranſeuntium, & alicubi in G ſecantium datum circulum DG centro A intervallo AD deſcriptum. Imo & biſecabit arcus BG*g* in altero interſectionis puncto *f*.

Cor. 2. Idem eveniet, cùm A & B coincidunt; hoc eſt, cùm circuli AFG tangunt rectam AD in puncto AB. Poteſt etiam B ſumi ad alteras partes ipſius A. In tranſcurſu etiam notetur, quòd anguli BFK, BGD, quos circulus ABF cum rectâ FK & arcu GD efficit, ſint æquales.

LEMMA V.

Lineis quatuor, A*b*, AB, A*c*, AG, *circulo alicui ab eodem circumferentiæ puncto ita inſcriptis, ut ſit* A*b*, AB : : A*c*. AG, *quarum omnium* A*b ſit minima: dico angulum* BAG *majorem eſſe angulo* *b*A*c*.



Deſcribatur enim alius circulus AB*g*, ſecans priorem in punctis A & B; cujus diameter ſit ad ejus ABG diametrum ſicut AB & A*b*, centris utriuſque ad eaſdem partes ipſius AB jacentibus. Dein centro A, diſtantiâ AG, deſcribe tertium circulum GH, ſecundo occurrentem in *g*; & iſtud *g* ex conſtructione jacebit alicubi inter G & H; atque adeo, ſi A*g* ducatur, erit angulus BAG major angulo BA*g*. Eſt autem angulus BA*g*= angulo *b*A*c*, propterea quòd AB & A*g* ſimiliter inſcriptæ ſunt circulo AB*g*, ac A*b* & A*c* ipſi A*bc*, habentes nempe eaſdem rationes & inter ſe, (A*b*. A*c* : : AB. AG vel A*g*) & ad diametros circulorum, quibus inſcribuntur. Cùm ergo ſit BAG $>$ BA*g* = *b*A*c*, erit BAG $>$ *b*A*c*. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc in eodem quovis radiorum genere, quo major eſt refractio,

De Planorum

refractio, eo major erit angulus refractus. In fig. pag. 295. ubi est FR. RD :: Fr. rd, erit angulus Frd> ang. FRD.

Cor. 2. Hinc etiam si sit AG. AB> Ac. Ab, multo magis erit angulus BAG>bAc. Hoc est in genere, quo majores sunt subtensæ, & simul, quo major est inæqualitas rationis earum, eo major erit differentia angulorum, quos subtendunt. Atque idem de sinubus & eorum angulis, utpote subtensarum & eorum angulorum dimidiis, intellige.

LEMMA VI.

Insuper si arcus cd ipsi bc capiatur æqualis, & AD *inscribatur circulo* ABD, *quæ sit ad Ad sicut* AG *ad* Ac; *cæteris stantibus, dico, quòd arcus* DG *erit arcu* GB *major.*

Nam centro A, radio AD describe circulum DKE, circulo ABg occurrentem in K, & rectæ AB in E, & AK ducatur. Jam cùm AK, Ag & AB circulo ABgK similiter inscribantur, atque Ad, Ac & Ab ipsi Abc, erit arcus gK = arcui Bg; quare demissâ gL ad BE perpendiculari, & productâ donec secet arcum BD in F, ista gL per Lem. 4. bisecabit tum rectam BE, tum arcum DB. At quoniam gF ex constructione jacet extra circulum gG, punctum F cadet inter G & D. Quare DG> DF, sive>FB, & multo magis >GB. Q. E. D.

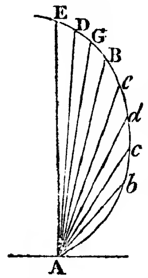
Cor. 1. Hinc, si arcus bd non tantùm duabus sed quotcunque partibus æqualibus constet, correspondentes partes arcûs BD, à termino B ad terminum D, sese gradatim superabunt longitudine. Adeoque si arcus bc ad arcum cd habeat quamcunque rationem commensurabilem, erit arcus GD. arc. BG> arc. cd, arc. bc; siquidem numeris æqualium partium, mensurantium arcus bc & cd, correspondent consimiles numeri partium inæqualium constituentium arcus BG ac GD; quarum illæ in GD sunt omnes parte maximâ ipsius BG majores. Quinetiam, si bc ad cd habeat quamcunque rationem incommensurabilem, erit itidem GD. BG> cd. bc. Nam rationum similitudines, quæ quantitatibus commensurabilibus conveniunt indefinitè, eo nomine conveniunt etiam incommensurabilibus similiter affectis, quemadmodum ex Euclideâ definitione similium rationum ostendi potest. Sed faciliùs deprehenditur

Refractionibus.

henditur imaginando quantitates, quas vocant incommensurabiles, posse numerari per partes indefinitè parvas, & sic ad naturam commensurabilium, præsertim quoad rationum habitudines, quodammodo reduci.

Concipias itaque arcum bc in æquales & indefinitè multas partes dividi, & ejusmodi tot sumi, quæ minus quàm unâ parte (hoc est, indefinitè parum) differunt ab arcu cd, atque adeo ipsi pro more consueto censeantur æquales; concipe etiam BD in partes æquales, ut antè definivi, correspondentibus partibus ipsius bd dividi; & propter tot inæquales partes, majores quidem in GD & minores in BG, quot sunt æquales in cd & bc; erit GD. BG> cd. bc.

Cor. 2. Hinc præterea componendo sequitur, esse BD.BG>bd. bc, nec non GD. BD> cd. bd.



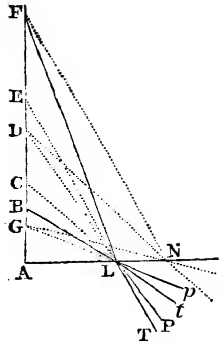
Cor. 3. Consectatur denique, quod ductis utcunque partibus subtensis Ab, Ac, Ad, Ae, & aliis quatuor AB, AG, AD, AE, quarum singulæ ad priorum singulas eandem rationem observant (nempe AB. Ab :: AG. Ac :: AD. Ad :: AE. Ae) si AE sit omnium maxima, & Ab minima, erit arcus ED. arc. GB> arc. ed. arc. cb. Nam per Corol. 1. hujus, est ED. DG>ed. dc, & DG. GB> dc. cb, & multo magis ED. GB> ed. cb. Haud secus patet esse arcum EG. arc. DB> arc. ec. arc. db; scilicet ex Corol. 2. hujus est EG. DG> ec. dc, ac DG. DB> dc. db, & multo magis EG. DB> ec. db. Denique, quæ de subtensis & earum arcubus dicta sunt, possunt etiam de sinubus & eorum arcubus aut angulis intelligi.

PROP. XIV.

Heterogeneis radiis è densiori Medio in rarius, secundum eandem datam lineam, in superficiem positione datam incidentibus; quo rarius sit Medium, in quod radii refringuntur, eo major erit differentia refractionis.

Sit FL linea, secundum quam duo radii incidunt in superficiem AL, quorum maximè refrangibilis refringatur ad P, & minimè refrangibilis ad T. Dico, quòd, si Medium rarius foret adhuc magis

De Planorum



magis rarum, ut refringeret maximè refrangibilem radium ad p, & minimè refrangibilem ad t, tunc angulus pLt foret major angulo PLT. Demittatur enim FA ad refringentem ſuperficiem normalis, quæ ſecet refractos radios retrorſum ductos in G, C, D & E. Deinde in refringente ſuperficie quæratur tale punctum N, ut ſit FN. DN :: FL. EL; ac DN productus erit refractus radii minimè refrangibilis, incidentis ab F ad N (§ 49.) Jam, cùm talis ſupponatur poſitio FL & FN, ut radii maximè refrangibilis ſecundum FL & minimè refrangibilis ſecundum FN incidentis, refracti, DL ac DN, divergant à puncto D, quod ſitum eſt in perpendiculo FA: eâ de cauſâ, licet raritas Medii, in quod refractio peragitur, foret alia quàm ſupponitur, tamen ejuſmodi radiorum, ſecundum eaſdem lineas FN & FL incidentium, refracti ſemper divergerent ab aliquo puncto, quod in eâdem FA ſit poſitum, quemadmodum in præcedentibus oſtenſum eſt (§ 51). Sic cùm raritas dicti Medii talis eſſe ſupponitur, ut maximè refrangibilis radius, ſecundum FL incidens, refringatur à puncto quopiam G; tunc minimè refrangibilis, ſecundum FN incidens, refringetur ab eodem G. Sed cùm maximè refrangibilis radius ſupponebatur à puncto G refringi, tunc etiam minimè refrangibilis, ſecundum eandem lineam FL incidens, ſupponebatur refringi à puncto C. Quare eſt GN. FN :: CL. FL (§ 27 & 49.) & præterea, cùm antea poſuerim eſſe FN. DN :: FL. EL, ex æquo erit GN. DN :: CL. EL. Sed per Lemma 3. eſt GN. DN > GL. DL; adeoque CL. EL > GL DL. Quare ſi linea quædam BL ita ducatur, ut ſit CL. EL :: BL. DL, erit BL > GL propter majorem rationem, quam habet ad DL: & inſuper erit CL major BL, eo quòd ſit EL > DL; & proinde punctum B cadet inter G & C, eritque angulus GLC > ang. BLC. Cùm verò ſit CL. EL :: BL. DL, aut viciſſim BL. CL :: DL. EL, erit angulus BLC major angulo DLE (Lem. 1.) & multo magis ang. GLC > DLE. Q. E. D.

PROP.

Refractionibus.

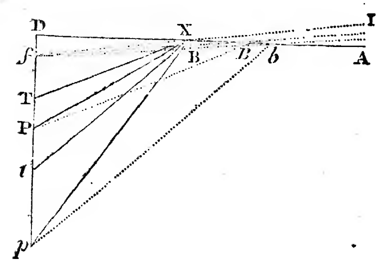
PROP. XV.

Heterogeneis radiis è Medio denſiori in rarius, ſecundum eandem datam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo denſius eſt Medium, è quo radii incidunt, eo major erit differentia refractionis.

Scilicet (propter majores refractiones) eo majores erunt ſinus refractionum reſpectu dati circuli, ad quem referuntur; & ſimul eo major erit inæqualitas rationis iſtorum ſinuum per Prop. XIII. adeoque eo major erit differentia angulorum, quos ſubtendunt per Corol. 2. ad Lem. V. hoc eſt, eo major differentia refractionis. Q. E. D.

PROP. XVI.

Heterogeneis radiis è Medio rariori in denſius, ſecundum eandem datam lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo rarius eſt Medium, è quo radii incidunt, eo major erit differentia refractionis.



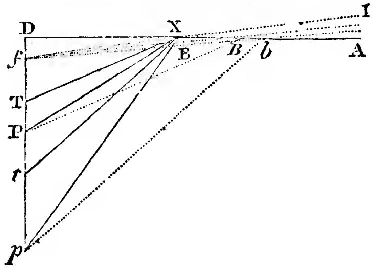
Sit AD ſuperficies, in quam duo radii ſecundum eandem lineam datam, IX, incidunt; quorum alter, maximè refrangibilis, refrangatur ad P; & alter, minimè refrangibilis, ad T. Dico, quòd, ſi Medium, ex quo radii incidunt, foret adhuc rarius, ut dictos radios adhuc magis refringeret, puta maximè refrangibilem verſus p, & minime refrangibilem verſus t, tum pXt major angulus evaderet, quam PXT. Id quod gradatim ſic demonſtratio.

Caſ. 1. Ponamus primò, quòd recta IX, ſecundum quam radii incidunt, ſit ad refringentem ſuperficiem obliquiſſima; ac ducatur quælibet recta, PD, eidem ſuperficiei normaliter inſiſtens in D, & ſecans refractos radios in punctis T, P, t, p, & IX producatur donec iſtam PD ſecet in f; tum in lineâ AD quæratur punctum

 quoddam

De Planorum

quoddam B hâc lege; ut ductis B*f*, BP, fiat X*f*. XT :: B*f*. BP. Liquet ergo, quòd, ſi minimè refrangibilis radius incidat in B verſus *f* tendens, is debet verſus P refringi; quippe cùm ex hypotheſi ſit BP. B*f* :: XT. X*f*, hoc eſt, ſinus incidentiæ ejus & refractionis, ſicut ſinus incidentiæ & refractionis alterius minimè refrangibilis radii IXT. Quamobrem, ſi ſupponamus hoſce radios retrocedere, alterum

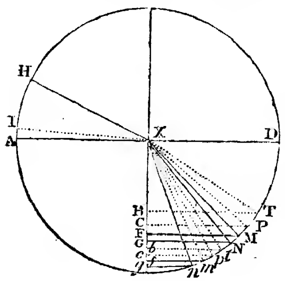


nempe è minimè refrangibilibus à T ad X, & alterum à P ad B, & maximè refrangibilem à *p* ad X, eorum omnium refracti tendunt à puncto *f*; ſiquidem notum eſt Theorema, quòd radii, ſecundum refractum ejus retrò incidentis, incidens viciſſim fit refractus. Jam, cùm radii difformes PB, PX, ab eodem puncto P manantes, refringantur ab eodem *f*, quòd ſitum eſt in perpendiculo PD; proportione inter PX & PB ſemel cognitâ, ſi ab alio quovis ejuſdem perpendiculi puncto ad refringentem ſuperficiem duæ ducantur lineæ eandem rationem habentes, hoc eſt, ſi una deſignans maximè refrangibilem radium ſit ad alteram, quæ deſignat minimè refrangibilem radium, ut PX ad PB: tunc iſtorum refracti (ex antè demonſtratis § 47) divergent ab aliquo etiam puncto, quod ſitum eſt in eodem perpendiculo PD, utcunque Medium ex parte radii IX ſupponatur rarum; dummodo Mediorum alterum, ex parte radii PX, eandem denſitatem retineat. Quemadmodum, ſi maximè refrangibilis radius incidat ſecundum *p*X, & refringatur à *f*, Medio ſcilicet verſus IX jam poſito rariori quàm antè; tum rectâ *pb* ſic ductâ, ut ſit PX. BP :: *p*X. *pb*, radius etiam minimè refrangibilis *pb* refringeretur ab eodem *f*. Unde ſequitur, eſſe *pb* ad *fb* ſicut ſinus incidentiæ radiorum minimè refrangibilium ad ſinum refractionis, § 49. Aſt in ratione iſtorum ſinuum eſt etiam *t*X ad *f*X; eo quòd inflexa IX*t* deſignet radium æqualiter refrangibilem, cujus pars IX producta tranſit per idem *f*. Quare eſt *pb*. *fb* :: *t*X. *f*X. Cùm verò radius IX ſupponatur eſſe ad refringentem ſuperficiem ſummè obliquus, ſive in angulo infinitè parvo inclinatus, adeo ut recta D*f* pro infinitè parvâ, ſeu nullâ, haberi debeat; ſequitur

Refractionibus.

ſequitur eſſe DX = X*f*, DB = B*f*, ac D*b* = *bf*: quos valores pro X*f*, B*f* & *bf* ſubſtituendo in ſuprà recenſitas proportiones BP. B*f* :: TX. X*f*, & *pb*. *fb* :: *t*X. *f*X, emergent BP. BD :: XT. XD, & *pb*. D*b* :: *t*X. DX. Ex quibus pateat rectas BP ad XT, & *bp* ad X*t* parallelas eſſe, anguloſque BPX ad PXT, & *bp*X ad *p*X*t* æquales. Sed ex hypotheſi eſt PX. BP :: *p*X. *pb*, & proinde ang. *bp*X $>$ ang. BPX per Corol. 1. Lem. v. hoc eſt, ang. *p*X*t* $>$ ang. PXT. Q. E. D.

Caſ. 2. Incidentibus verò radiis, angulum definitè magnum cum refringente ſuperficie conſtituentibus, Propoſitum ſic patebit.



Sit HX recta, ſecundum quam incidunt; & cùm è Medio minùs raro adveniunt, ſit XM minimè refractus, & XN maximè refractus. Cùm verò adveniunt è magis raro, ſit X*m* minimè refractus & X*n* maximè refractus. Adhibeantur etiam obliquiſſimi incidentes radii IX cum eorum refractis XT, XP, X*t* & X*p*, quales jam deſcripſimus. Ita ſcilicet, ut, cùm tanta ſit anterioris Medii raritas, ut radios HX incurvari verſus M & N faciat, tunc etiam conſimiles radios IX incurvet verſus T & P. Cùm verò tanto major ſit ejus raritas, ut illos cogat verſus *m* & *n*, tunc hoſce ſimul cogat verſus *t* & *p*. Sit inſuper APD circulus centro X & intervallo quolibet AX deſcriptus, qui ſecet hoſce refractos radios in T, P, M, N, *t*, *p*, *m*, *n*; à quibus ad perpendiculum BX demittantur ſinus refractionum TB, PC, MF, NG, *tb*, *pc*, *mf*, *ng*; & ex lege refractionum patebit eſſe TB. PC :: MF. NG, & *tb*. *pc* :: *mf*. *ng*; & inſuper ex hypotheſi & conſtructione patebit, eſſe TB ſinuum iſtorum maximum & *ng* minimum. Adeoque per Corol. 3. Lem. vi. eſt ang. TXP. ang. MXN $>$ ang. *t*X*p*. ang. *m*X*n*; & permutando eſt ang. TXP. ang. *t*X*p* $>$ ang. MXN. ang. *m*X*n*. Verùm ex oſtenſis in primo caſu, eſt ang. TXP $<$ ang. *t*X*p*. Quare & multo magis erit ang. MXN $<$ ang. *m*X*n*. Q. E. D.

De Planorum

PROP. XVII.

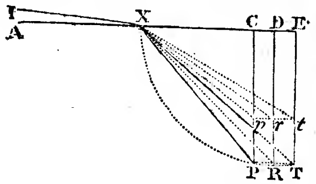
Heterogeneis radiis è Medio rariori in denſius, ſecundum eandem lineam, in ſuperficiem poſitione datam incidentibus; quo denſius ſit Medium, in quod radii incidunt, eo major erit differentia refractionum ad certum uſque terminum, & poſt eo minor perpetuò.

Nam ſi Medium poſterius denſitate ſuâ valde parùm ſuperat anterius, ita ut refractiones indefinitè parvas efficiat, differentia refractionum erit etiam indefinitè parva; & proinde minor quàm foret, ſi Medium poſterius ſupponeretur denſius, ut refractiones evaderent majores. Quare auctâ Medii poſterioris denſitate, augebitur dicta refractionum differentia. Quòd ſi denſitas ejus in infinitum augeatur, refractiones etiam, quantum poterunt, augebuntur; hoc eſt, uſque dum omnes refracti radii perpendiculariter emergant, angulis refractionum & eorum differentiis tunc prorſus evaneſcentibus. Quare differentia refractionum rurſus diminuta eſt, donec in nihilum evanuit.

Scholium.

Etſi limitis ejus determinatio, ubi differentia refractionis evadit maxima, plus tædii & laboris adminiſtrare poſſit, quàm utilitatis; cùm tamen alicujus forte momenti cenſeatur denſitatem Medii cognoſcere, quod, radiis in ſe refractis, Colores maximè conſpicuos efficiat, non pigebit hunc inſuper deſignare, idque primò cum incidentia ſit obliquiſſima.

Caſ. 1. Eſto IX communis radiorum in ſuperficiem AX, quæcunque Media dirimentem, obliquiſſimè incidentium via; & eorum refracti, ut antè, ſunto Xp & Xt; & agatur recta quævis, pt, præfatæ ſuperficiei parallela, quæ radiis iſtis occurrat in p & t; à quibus ad AX demiſſis perpendicularibus, pC, tE, biſecetur CE in D; & centro D, diſtantiâ DX, circulus deſcribatur, ſecans Cp in P, & Et in T; junganturque XP & XT. Dico, quòd, cùm ea ſit poſterioris Medii denſitas, ut radiorum ſecundum IX incidentium maximè refrangibiles ad P, & minimè



Refractionibus.

minimè refrangibiles ad T refringat, tunc angulus PXT quàm maximus evadet. Etenim, utcunque Medium poſterius ponatur denſum, refracti radii ita lineas CP & CT in punctis p ac t ſecabunt, ut recta pt ipſi AX parallela ſit. Quare, ſi ducatur linea Dr, quæ lineas omnes pt biſecet, centrum cujuſcunque Circuli per p ac t tranſeuntis, ſemper jacebit in eâdem Dr. At angulus pXt eſt angulus in ſegmento circuli per puncta p, t & X tranſeuntis; qui ideo erit Maximus, cum ejuſmodi circulus exiſtit Mimimus; propterea quòd ratio ſubtenſæ pt ad circuli dimenſiones tunc evadit maxima. Verùm iſte circulus fit omnium minimus, cùm centrum ejus cadit in D; ſiquidem pro ſemidiametro tunc habet XD minimam refractarum *, quæ ab X ad RD duci poſſunt. Eſt ergo angulus pXt tunc maximus, cùm centrum circuli tranſeuntis per puncta p, t & X cadit in D; adeoque, cum circulus XPT & angulus PXT ejuſmodi ſunt, liquet Propoſitum.

Hinc obiter pateat hunc angulum PXT tunc etiam Maximum evadere, cùm talis eſt poſterioris Medii denſitas, ut angulus refractionis mediocriter refrangibilium radiorum obliquiſſimè ſecundum IX incidentium, ſit ſemirectus; & eo minorem perpetim fieri, quo iſte refractionis angulus à ſemirecto (exceſſu vel defectu) magis deviat. Quemadmodum, ſi refractiones ex Aere in Aquam, in Vitrum & in Cryſtallum peractæ conferantur, è calculo patebit, quòd, cùm angulus incidentiæ ſit 90$^{gr.}$ proximè tunc angulus refractionis in aquam erit major ſemirecto, inque vitrum erit minor. Quamobrem Aqua minùs denſa eſt, & Vitrum magis denſum, quàm ut efficiant angulum PXT maximum. Et proinde, cùm Cryſtallum ſit adhuc denſius, efficiet iſtum PXT minorem, quàm Vitrum efficeret. Et ſic Vitrum, etſi minus refringat, in iſthoc tamen caſu heterogeneos radios in ſe refractos magis ab invicem diſſipabit quàm Cryſtallum; eoque pacto Colores in oppoſitam ejus ſuperficiem projicit magis diſtinctos. Sed hæc expertu ſunt difficillima, quòd Vitrum & Cryſtallum denſitate parùm differant, nec poſſint haberi ſatis craſſa; & ſi poſſent, tunc propter maximam craſſitiem haud forent ſatis perſpicua.

Caſ. 2. Quòd ſi linea, ſecundum quam incidunt radii, non ſit maximè obliqua, Problema emergit Solidum. Sed lubet modum oſtendere, quo conditionibus ejus nonnihil mutatis, ad Planum

* Lege rectarum.

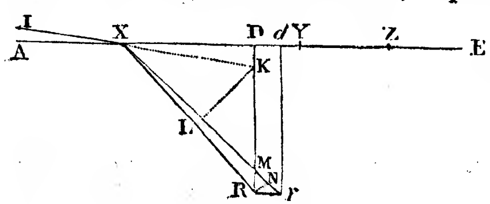
reduci

De Planorum

reduci poterit. Sciendum est itaque, quòd, cùm inter extremos sex maximè difformes radios, innumeri sint intermedii, qui gradibus continuè successivis & infinitè parvis, alii magis aliis refringuntur, differentia radiorum extremorum conflata erit ex consimilibus intermediorum differentiis, numero & parvitate infinitis. Jam cognitis proprietatibus istarum infinitè parvarum differentiarum, possumus exinde de omnibus simul aggregatis, sive de differentiis finitè parvis, quales intercedunt extremorum refractionibus, judicium ferre; præsertim cùm istæ differentiæ sint admodum exiguæ. Sic cognito quòd infinitè parvæ differentiæ augentur, diminuuntur, vel simul maximæ evadunt aut minimæ, concludendum erit, quòd omnium summa perinde augetur, diminuitur, vel maxima fit aut minima. Quòd si non sint omnes simul maximæ vel minimæ, tamen summa pro maximâ vel minimâ haberi potest, cùm id accidit intermediæ parti. Sic omnium colorum latitudo tunc maxima censeri possit, cùm id accidit Viriditati. Jam licet Problema propositum, cùm de differentiis finitè parvis agitur, existat Solidum, si tamen instituatur de differentiis infinitè parvis ad Planum reduci potest. Verùm huic solvendo nolo obnixè incumbere, sed breviter tantùm ostendam, quo pacto calculus in hoc & ejusmodi aliis sit ineundus, ut ad æquationem perveniatur, ex quâ maximus angulorum infinitè parvorum possit elici. Et insuper ex eodem fundamento determinabo proportiones differentiarum refractionis respectu diversorum Mediorum, quas in præcedentibus quatuor Propositionibus generaliter tantùm descripsi.

59. Primo itaque investiganda est Regula vel æquatio, quâ, ex uno utcunque refracto radio dato, refractus alter, cum eo constituens angulum infinitè parvum, cognosci poterit.

Radiis è Medio datâ densitate in Medium cujuslibet densitatis secundum obliquissimam lineam IX, ut priùs, incidentibus, sint XR & xr Refracti duo; quorum alter XR sit altero xr paulo magis refrangibilis, differentiâ tamen infinitè parvâ; & agatur lineola quævis Rr, his in R & r occurrens



Refractionibus.

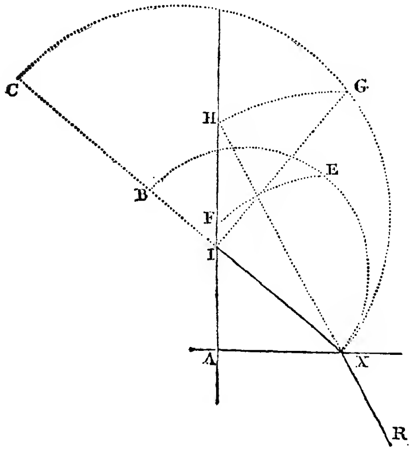
currens & refringenti superficiei parallela. Ad quam superficiem normales etiam RD, rd demittantur; quas datam finitamque distantiam ab X, ab invicem verò infinitè parvam habere fingito. Sed lineolam Rr, cum radiis per R & r transeuntibus, plus aut minus ab XD vergere (quemadmodum in præcedentibus) concipito, pro variâ posterioris Medii assumendâ densitate. Jam si recta DR secet radios xr in M, & IX in K, cùm infinitè parvum triangulum RMr sit simile triangulo DMX, à quo triangulum KRX non nisi infinitè parvis differentiis, RXM & DXK, discrepat, quæ dissimilitudinem non inferunt; triangula etiam RMr & KRX pro similibus haberi debent. Et proinde demissis perpendicularibus KL & RN, erit KX. LR :: Rr. MN. Adeoque, cùm sit LR$=\frac{XRq-XKq}{XR}$ (nam est XR. KR $(=\sqrt{XRq-XKq})$ :: KR. RL) erit etiam MN $=\frac{XRq-XKq}{XR\times XK}$ in Rr, quæ differentia est inter XN, sive XR & XM. Et inde erit XM $=$ XR $-\frac{XRq-XKq}{XR\times XK}$ in Rr. Inventa est itaque relatio inter XK, XM & XR, cùm angulus IXA sit infinitè parvus. Quinetiam, utcunque IX obliqua ponatur, illæ XK, XM & XR eandem relationem observabunt, siquidem reciprocè sunt ut sinus Incidentiæ & Refractionis; & proinde inventa est etiam inter eas relatio pro quâvis obliquitate incidentis IX. Atque ita cognitis, aut utcunque ad arbitrium assumptis, XK & XR, inde XM simul cognoscitur. Quod primò determinandum proposui.

Quamobrem sit IX linea datum quemvis angulum AXI cum refringente superficie constituens; cæterisque stantibus, erit MN$=\frac{XRq-XKq}{XR\times XK}$ in Rr. Insuper est RD $(=\sqrt{XRq-XDq})$. XD :: MN. NR, atque adeo est NR$=\frac{XRq-XKq \text{ in } Rr\times XD}{XR\times XK\times\sqrt{XRq-XDq}}$. Quòd si NR dividatur per XR, prodibit sinus anguli RXN respectu circuli, cujus semidiameter sit unitas. Quare, cùm angulus iste & sinus ejus sunt maximi, ad maximum angulum determinandum quærenda erit maxima quantitas $\frac{NR}{XR}$, hoc est maximum $\frac{XRq-XKq \text{ in } Rr\times XD}{XRq\times XK\sqrt{XRq-XDq}}$. Sive (factâ per datum $\frac{Rr\times XD}{XK}$ divisione) quærendum erit Maximum $\frac{XRq-XKq}{XRq\times\sqrt{XRq-XDq}}$: id quod per Methodos de Maximis & Minimis fatis.

DE PLANORUM

tis notas fieri poteſt, & prodibit $XRqq = 3XKq \times XRq - 2XKq \times XDq$; cujus æquationis conſtructio eſt ejuſmodi (e).

A puncto quolibet incidentis radii IX demitte perpendiculum IA, & in eo ſume $AF = AX$; & XI producto ad B, ut ſit $IB = \frac{1}{2} IX$; ſuper BX deſcribe ſemicirculum BEX; cui inſcribe $XE = XF$: dein XB produc ad C, ut ſit $BC = BE$. Super CX deſcribe ſemicirculum CGX; quem in G ſecet perpendiculum IG ſuper diametro ejus ad I erectum. Denique centro X, & intervallo GX, deſcribatur arcus GH, ſecans AI productum in H. Ducatur HX, & producatur verſus R; eritque RX ipſius IX refractus, cùm tanta ſit poſterioris Medii denſitas, ut differentia refractionis RXM fiat omnium Maxima. Quo invento, denſitas poſterioris Medii, talem refractionem efficientis, facilè dabitur. Concipe ergo radios XR & Xr fig. p. 318. eſſe mediocriter refrangibiles, diverſo tamen gradu; & poſterius Medium, ſic inventum, non modo inter



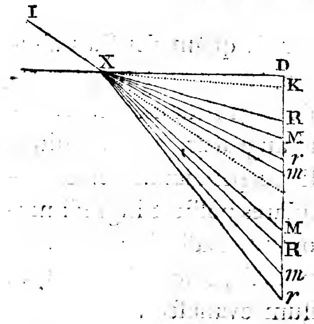
(e) RECTA XD (fig. p. 318.) pro arbitrio ſumenda ſignificetur literâ a. Datâ XD, propter angulum DXK datum, id enim ponitur, dabitur XK; quam litera b ſignificet. Sit z recta quædam, quæ eâ lege fluat, ut duarum, datæ XD & indefinitæ XR, ſit ſemper proportione tertia. Erit igitur $XR^2 = az$. Quare $\frac{XR^2 - XK^2}{XR^2 \times \sqrt{XR^2 - XD^2}} = \frac{az - b^2}{az\sqrt{az - a^2}}$. Cujus fluxio his notis ſignificanda erit, $\frac{\frac{3}{2}b^2 z\dot{z} - ab^2\dot{z} - \frac{1}{2}az^2\dot{z}}{z^2 \times \overline{az - a^2}|^{\frac{3}{2}}}$. Hâc autem fluxione nihilo æquatâ, erit etiam $\frac{3}{2}b^2 z - ab^2 - \frac{1}{2}az^2 = 0$. Quare $\frac{3b^2}{a}z - z^2 = 2b^2$ (ſive $z^2 = \frac{3b^2}{a}z - 2b^2$; quæ pro literis z, a, b, illis $\frac{XR^2}{XD}$, XD, XK reſtitutis, in ipſam æquationem Newtonianam migraverit.) Hujus autem æquationis conſtructio leviſſimo negotio abſolvenda eſt. In XD productâ capiatur XE, ad quam b, vel XK, rationem habeat quam XD ad 3XK. (Nimirum ut ſit $XE = \frac{3b^2}{a}$.) Ad rectam XE magnitudine & poſitione datam applicetur rectangulum, quod duplo quadrato ex XK æquale ſit, & quadrato deficiat. Sit EZ defectûs latitudo. Duarum XZ, XD capiatur XY proportione media. Centro X radio XY ſcribatur circulus; qui cum rectâ DR, à puncto D ad perpendiculum plani refringentis eductâ, in puncto R concurrat. Radius, qui ſecundum IX incidit, in XR refringetur, ſi talis ſit materiæ circum DXR denſitas, quæ angulum RXM maximum efficiat.

Ad hanc

REFRACTIONIBUS.

ter iſtos, ſed & inter extremos ſeu maximè difformes radios, maximam circiter quam poteſt refractionis differentiam efficiet.

Sin autem hujuſmodi differentiarum proportiones ad variam raritatem vel denſitatem Mediorum deſiderentur, è jam oſtenſis facilè determinabuntur, dummodo ponantur infinitè parvæ. Sic raritate vel denſitate poſterioris Medii tantum variatâ, ut radii ſecundum IX incidentes nunc refringantur ad M & R, nunc ad m & r; ductâque quâlibet DK ipſi DX normali, quæ ſecet eos in K, M, R, m & r, erit angulus infinitè parvus MXR ad conſimilem angulum mxr, ſicut $\frac{XRq - XKq}{XRq \times RD}$, ad $\frac{Xrq - XKq}{Xrq \times rD}$. Quòd ſi raritas vel denſitas prioris Medii varietur, non mutato poſteriori Medio, Analyſta facilè deprehendet, quòd (in fig. p. 318) ſit $MN = \frac{XRq - XKq}{XKq}$ in Rr, & proinde quod ſit ang. MXR. ang. mxr :: $\frac{XRq - XKq}{XR \times RD}$. $\frac{Xrq - XKq}{Xr \times rD}$; non enim perinde eſt, ſive raritas ſive denſitas anterioris Medii, ſive poſterioris Medii varietur, ut è præoſtenſis pateat.



60. Propoſitiones præcedentes ad luminis è longinquo manantis diffuſionem ſpectant. In duabus ſequentibus agitur de refractione luminis è propinquo manantis.

Ad hanc conſtructionem duo ſunt neceſſaria; primum ne duplum quadratum ex XK quadrato ex dimidiâ XE majus ſit; tum etiam ut XY major ſit quàm XD. Quorum utrumque ſemper fieri, ex eo quòd XK major ſit quàm XD, facilè oſtendetur. Cùm enim XK, ſive b, majus ſit quàm XD vel a, omnino $8a^2$ minus erit quàm $9b^2$. Quare et $2a^2$ minus quàm $\frac{9}{4}b^2$. Quare et $2a^2b^2$ minus quàm $\frac{9b^4}{4}$. Et $2b^2$ minus quàm $\frac{9b^4}{4a^2}$. Sed $\frac{9b^4}{4a^2}$ quadratum eſt ex dimidia XE. Quare $2b^2$, ſive duplum quadratum ex XK quadrato ex dimidiâ XE minus erit. Rurſus cùm $XE \times XD$ ex conſtructione ſit triplum quadrati ex XK; cùm etiam, propter angulum ad D rectum, quadratum ex XD minus ſit quàm quadratum ex XK, erit $XE \times XD$ majus quàm triplum quadratum ex XD. Quare et recta XE major erit quàm ut tripla ſit XD. Omnino igitur XD minor erit quàm dimidia XE. Segmentorum autem XZ, XE cùm majus ſit XZ, certè recta XZ dimidiâ XE major erit. Multo igitur major quàm XD. Rectangulum igitur $XZ \times XD$, ſive quadratum ex XY, majus erit quadrato ex XD. Quare et recta XY rectâ XD major. Q. E. D.

Quòd ſi ſegmentorum XZ, EZ utrumque rectâ CD majus ſit, gemina erit Problematis conſtructio, nempe cùm utrumvis ſegmentum pro z uſurpare liceat. Unde gemina erit rectæ XR poſitio. Id eſt, duæ erunt denſitates materiæ infra ſuperficiem AD, quæ, radium incidentem IX diverſè refringendo heterogeneos tamen radios ita utræque refringant ut angulum RXM maximum efficiant.

De Planorum

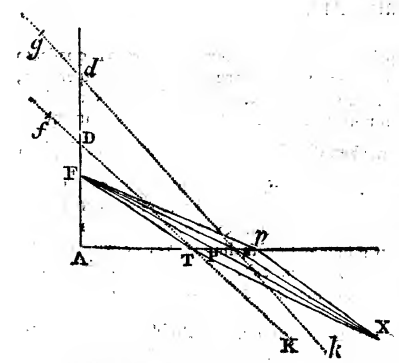
PROP. XVIII.

Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum per superficiem positione datam refractis; quo Medium densius sit magis densum, eo major erit eorum ad invicem inclinatio ex parte medii utriusque ad certum usque terminum, & post erit eo minor.

Scilicet, cùm densitas ejus haud minor sit quàm densitas alterius Medii, ut refractio fiat infinitè parva, tum differentia refractionis erit etiam infinitè parva, & proinde augebitur ex auctâ densitate. Quòd si densitas ejus in infinitum augeatur, tum omnium radiorum in illud incidentium refracti perpendiculariter emergunt (§ 44); & è contra, soli perpendiculares possunt ingredi medium rarius è densiori (§ 47); unde omnes radii à puncto ad punctum refracti tunc pergent in iisdem lineis, sive coincident, & sic differentia refractionis rursus in nihilum evanescet.

PROP. XIX.

Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum, per superficiem positione datam, refractis, quo Medium rarius sit magis rarum, eo major eorum erit ad invicem inclinatio ex parte Medii utriusque.



Sit AT superficies ita refringens difformes radios FTX, FPX, ut manantes ab eodem puncto F in idem rursus conveniant ad X. Dico, si Medium prius esset rarius, ut præfati radii adhuc magis refringerentur, puta FTX secundum FtX, & FPX secundum FpX, quòd angulus pXt foret major angulo PXT, ut & angulus pFt major angulo PFT.

Ad abbreviandum prioris casûs demonstrationem, ponamus radios esse quàm minimè difformes; ut, propter infinitè parvam differentiam refractionis, angulos PXT & pXt constituant infinitè parvos.

parvos. (Consule Cas. 2. Schol. ad Prop. XVII.) Tum ducatur TK refractus radii conformis ipsi FPX, ut infinitè parvus angulus KTX sit differentia refractionis radiorum secundum eandem FT incidentium; & pari modo ducatur tk, Refractus radii conformis ipsi FpX, ut angulus infinitè parvus ktX existat differentia refractionis radiorum secundum eandem Ft incidentium. Liquet ergo, quòd, cùm radius Ft sit obliquior quàm FT, atque etiam in Medium densius incidat, erit ktX major angulo KTX. Adhæc producantur KT & kt, donec in punctis D ac d secent lineam FA, quæ sit plano AT perpendicularis; & ultra producantur ad f & g, ita ut sit $\frac{FAq}{FT}.\frac{DAq}{DT}::TF.Tf$; & $\frac{FAq}{Ft}.\frac{dAq}{dt}::tF.tg$; & erunt puncta sit inventa, f & g, foci radiorum FTX & FtX per Prop. VIII. Cas. 2. Et inde Xf. Tf: : ang. KTX. ang. PXT; ut & Xg. tg: : ang. ktX. ang. pXt (Cas. 3. Schol. Prop. XII.) Istæ quidem proportionalitates non sunt omninò veræ, ubi anguli præfati, per differentiam refractionis effecti, ponuntur esse definitæ alicujus magnitudinis; sed ad veritatem eo magis accedunt, quo anguli isti statuuntur minores; adeo ut in angulis infinitè parvis pro accuratè veris haberi debeant. Jam, cùm ex hypothesi sit At > AT, erit etiam Xt < XT, ut & tg > Tf, quemadmodum patet ex determinatione punctorum g & f suprà positâ. Quamobrem est tg. Tf > tX. TX, vel permutando tg. tX > Tf. TX; & componendo, tg. Xg > Tf. Xf; hoc est, substituendo rationes hisce æquales, ang. pXt. ang. ktX > ang. PXT. ang. KTX; & permutando, pXt. PXT > ktX. KTX: verùm est ang. ktX > ang. KTX, ut dictum fuit; & ideo multo magis est ang. pXt > ang. PXT. Q. E. D.

Refractionibus.

Et hinc verò de posteriori casu, quòd semper sit pFt > angulo PFT, fiat conjectura; siquidem demonstrationem longè difficiliorem postularet, & his tamen multa impendisse verba jamdudum pertæsum est. Hæc itaque de refractionibus solitariæ superficiei sufficiant.

De radiorum bis refractorum affectionibus.

61. Quòd si gemina sit refractio, proinde ut in Prismatibus contingit, quorum phænomena præsertim explicare statui, radiorum sic refractorum passiones è præcedentibus ita manifestæ sunt,

De Planorum

ut circa illas parum negotii intereſſe videatur. De parallelis quidem ſuperficiebus nihil aliud occurrit obſervandum, quàm quòd poſterior tantum recurvat radios, quantum prior incurvat. De inclinatis verò ſequentia notentur.

P R O P. XX.

Homogenei radii ad Priſma divergentes, poſt utramque refractionem divergere pergent.

Patet per Prop. VII.

Atque idem de parallelis vel Convergentibus radiis intellige, quòd nempe poſt utramque refractionem manebunt Paralleli vel Convergentes.

Scholium.

Quòd ſi punctum, à quo quilibet infinitè propinqui, poſt utramque refractionem, divergunt, ſive locus Imaginis trans Priſma conſpicuæ, deſideretur, inventio ejus à Schol. ad præfatam Prop. VIII. manifeſta eſt. Sed ut promptius fiat conjectura, juvabit adhibere Theorema hocce mechanicum. *Quòd Imago ad eandem illam circiter diſtantiam poſt Priſma apparebit, quam habet Objectum, cujus eſt Imago, dummodo refractiones hinc & inde non ſint admodum inæquales.*

P R O P. XXI.

Ex heterogeneis radiis ad Priſma divergentibus, aliqui poſt utramque refractionem convergent.

Id quod conſtat ex Prop. X & XII. Scilicet ex illis, qui in plano ad utraque refringentia plana perpendiculari jacent, magis refrangibiles ex incidentiâ paulo obliquiori convenient cum minus refrangibilibus; atque idem in innumeris ferè aliis planis ſuperficiebus continget.

PROP.

P R O P. XXII.

Refractionibus.

E radiis itaque ſic à puncto ad punctum, ſive ab Objecto ad oculum refractis, alii ad verticem priſmatis gradatim aliis propiores tranſibunt, pro eo ut ſint magis ac magis refrangibiles.

Per Prop. X. unde colorum ordines definiuntur, de quibus poſthac.

P R O P. XXIII.

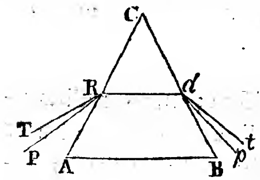
Quo major eſt angulus verticalis priſmatis, cæteris paribus, differentia refractionis fiet eo major, & inde colorum apparentia diſtinctior.

Et hoc manifeſtum eſt è Prop. II.

P R O P. XXIV.

Quo denſior eſt Priſmatis materia, vel quo rarius eſt Medium circumfluum, cæteris paribus, eo major erit refractionis differentia, & inde Colorum apparentia manifeſtior.

Scilicet poſterior caſus è Prop. XIV & XVI. patet. Priorem verò, ne per Prop. XVII. in dubium revocetur, ſic oſtendo.



Concipe magis refrangibilem radium, PR, & minimè refrangibilem, TR, ſic in Priſma ad idem quodvis punctum R incidere, ut refracti pergant in eâdem lineâ R*d*, ac denuò in *d* refracti divergant verſus *p* ac *t*. Quo poſito conſtat per Prop. XV. quòd angulus *pdt* ex auctâ Priſmatis denſitate augebitur; deque angulo PRT par eſt ratiocinatio, ſi modò radii conſimiles ſecundum eaſdem lineas retrocedere concipiantur. Patet itaque aſſertio de radiis in Priſmate coincidentibus, & inde etiam de Parallelis.

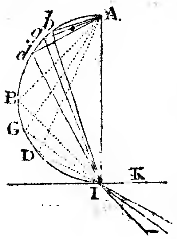
LEMMA

DE [illegible] PLANORUM

LEMMA VII.

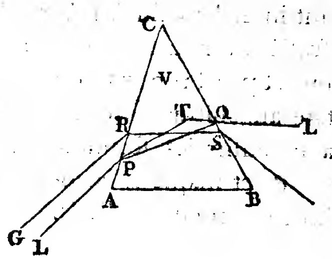
Radiis tribus homogeneis, bI, gI dI, è Medio densiori in rarius per superficiem IK refractis, sit differentiæ incidentiarum, bIg, gId, sint æquales, summa refractorum angulorum extremis radiis effectorum erit duplo major anguli refracti, per intermedium radium effecti; hoc est refractis radiis retroactis ad B, G ac D: dico, quòd sit angulus BIb+DId> 2 ang. gIG.

Etenim descripto quovis circulo ADG, tangente refringentem superficiem in I, cujus diameter sit AI, quique dictos radios secet in b, g, d, B, G, D: quandoquidem anguli bIg & gId sint æquales, erunt etiam arcus bg & gd æquales. Sed ductis Ag, Ab, &c. erunt Ab, Ag, Ad sinus incidentiarum, adeoque inter se ut sunt AB, AG, AD sinus refractionum. Quare (per Lem. VI.) est arcus DG major arcu GB, & inde $2gG < 2gG+GD-GB = gD+gB = gD-gd+gb+gB = Dd+Bb$: hoc est, $2gG < Dd+Bb$, sive angulus BIb + ang. dID > 2 ang. gIG. Q. E. D.



PROP. XXV.

Homogeneis radiis à Prismate refractis, angulus, quem incidentes & emergentes comprehendunt, tunc maximus evadit, cùm æqualis est hinc & inde refractio.



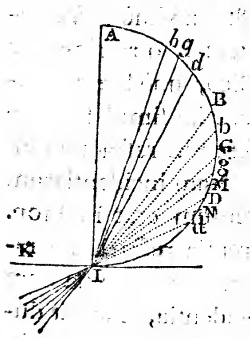
Sit ABC Prisma; GRSN radius utrinque æqualiter refractus ad R & S; et LPQL alius radius refractus inæqualiter, magis quidem ad P, minus ad Q, & producantur hi radii donec sibi occurrant, LP & QL in T, GR verò & NS in V. Dico angulum RVS esse majorem angulo PTQ. Quod ut pateat, concipe radios in lineis PQ & RS hinc inde pergentes utrinque egredi Prismate, & sic è Medio densiori in rarius refringi. Nam in triangulis CPQ, CRS, cùm angulus C communis sit, cæterorum

terorum angulorum summæ erunt æquales; & proinde, cùm CRS sit isosceles, duplum anguli CSR æquabitur angulis CPQ + CQP. Quamobrem radii QP incidentia ad P tanto major est incidentiâ radii RS ad S, quanto eadem incidentia sit major incidentiâ PQ ad Q. Trium itaque incidentiarum differentiæ sunt æquales; adeoque, juxta Lemma præmonstratum, summa refractorum angulorum, per incidentiam maximam & minimam effectorum, major erit duplo anguli refracti per incidentiam mediocrem effecti. Hoc est, ang. QPT + ang. PQT > 2 ang. RSV, sive > ang. RSV + ang. VRS. Itaque, cùm in triangulis PTQ & RVS summa angulorum ad basin PQ, sit major summâ eorum ad basin RS; erit angulus verticalis RVS major angulo verticali PTQ. Q. E. D.

REFRACTIONIBUS.

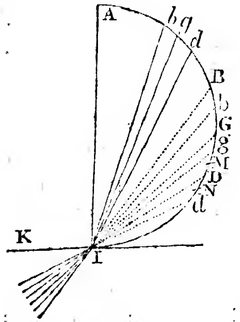
LEMMA VIII.

Si secundum tres lineas, bI, gI, dI, æquales angulos bIg, gId continentes, tres radii minimè refrangibiles incidant ad I in superficiem IK, & è Medio densiori in rarius refringantur, quorum refracti retrorsum producti sint IB, IG, ID; & præterea, si trium maximè refrangibilium radiorum, secundum easdem lineas bI, gI, dI incidentium, refracti retrorsum producti sint Ib, Ig, Id, differentia refractionis radiorum, quorum incidentia est minima, unà cum differentiâ refractionis eorum, quorum incidentia est maxima, major erit quàm dupla differentia refractionis eorum, quorum incidentia est mediocris. Hoc est, ang. BIb + ang. DId > 2 ang. GIg.



Etenim descripto quovis circulo ADI tangente refringentem superficiem in I, cujus diameter sit AI, quique præfatos radios in punctis b, g, d, B, b, G, g, D, d secet: concipe subtensas ab A ad quodlibet istorum punctorum duci; & erunt Ab, Ag, Ad inter se, ut sunt AB, AG, AD; atque etiam, ut sunt Ab, Ag, Ad. Unde sequitur, quòd AB, AG, AD inter se sunt ut Ab, Ag, Ad. Et præterea per Lem. VI. quòd sit arcus GD > arcu BG, & arcus gd > arcu bg. Jam fiat arcus GM=BG,

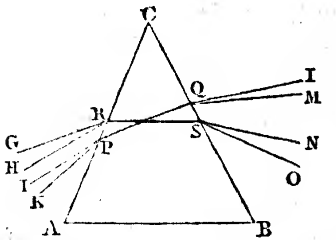
De Planorum



GM=BG; eritque GD>GM & AD>AM. Item in peripheriâ AD sume punctum quoddam N, sub hâc conditione, ut, si concipias AM, AN subtensas duci, sit AB. Ab : : AM. AN, & erunt AB, AG, AM inter se, ut sunt Ab, Ag, AN; adeoque, cùm arcus BG ac GM sint æquales, erit summa arcuum Bb + MN (per Lem. VII.) major duplo arcu Gg. Sed, cùm sit AM. AN : : (AB. Ab : :) AD. Ad; vel conversè AM. AD : : MN. Dd, propter AD > AM erit arcus Dd > arcu MN; & utrobique addito arcu Bb, erit arc. Bb + arc. Dd > arc. Bb + arc. MN; & multo magis erit arc. Bb + arc. Dd > duplo arcu Gg, sive ang. BIb + ang. DId > 2 ang. GIg. Q. E. D.

PROP. XXVI.

Heterogeneis radiis à Prismate refractis, differentia angulorum, quos incidentes cum emergentibus constituunt, tunc minima evadit, cùm æquales sunt utrobique refractiones.



In Prismate ABC sumatur CR æqualis CS, & ducatur, ut & alia quævis linea PQ, quæ non sit parallela ad RS; & concipe radios in Prismate secundum has lineas PQ & RS hinc inde pergentes, ad puncta P, Q, R & S egredi; & maximè refrangibiles versus K, M, H & O refringi, ac minimè refrangibiles versus I, L, G & N. Dico, quòd refractionum, inæqualiter ad P & Q factarum, differentiæ simul sumptæ IPK + LQM sint majores quàm HRG + NSO, differentiæ refractionum æqualiter ad R & S factarum simul sumptæ. Nam incidentiarum ad P, Q & S differentiæ sunt æquales, ut ostensum erat in Prop. præcedenti, atque adeo per Lem. VIII. differentia refractionis radiorum difformium ad P, ubi maxima est incidentia, unà cum differentiâ consimili ad Q, ubi minima est incidentia, excedit duplum consimilis differentiæ ad S, ubi incidentia est mediocris. Hoc

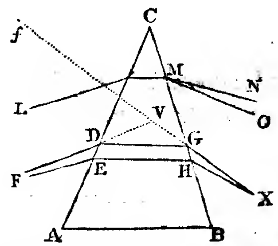
Refractionibus.

est, ang. IPK + ang. LQM > 2 ang. NSO. Sive, cùm GRH & NSO æquentur, ang. IPK + ang. LQM > ang. NSO + ang. GRH. Q. E. D.

Schol. Posui quidem radios è Prismate utrobique egredi; sin pergant ab I & K per P & Q ad L & M, & à G & H per R & S versus N & O, linearum positiones & quantitates angulorum non inde mutabuntur; & proinde demonstratio præfata tunc etiam valebit; & propter eandem rationem valebit etiam, cùm radii ad Prisma divergentes, evadunt in Prismate paralleli. Quod idem de Propositionum XXIV & XXV. demonstrationibus itidem intellige. Quinetiam in aliis quibuscunque casibus, ubi divergunt ante refractionem & post convergunt, vel in Prisma incidunt paralleli, non adeo multum à parallelismo intra Prisma recedunt unquam, quin ut anguli, vel differentiæ angulorum, quos incidentes cum emergentibus constituunt, pro iisdem circiter haberi possint, ac si intus essent paralleli; adeoque dictas Propositiones ad omnes omnino casus extendi.

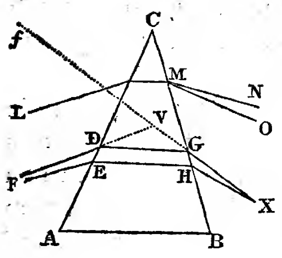
PROP. XXVII.

Si denique radiis, à dato puncto F *ad datum punctum* X, *per Prisma* ABC *positione datum, refractis, desiderentur anguli* DFE, GXH, *quos heterogenii comprehendunt;*



Problema ex eorum numero est, quæ Veteres linearia dixêre; at sequens Mechanica solutio, quantum exigunt res Practicæ, veritati appropinquat. Finge summam angulorum DFE + GXH æqualem esse angulo NMO, quem radii duo alteri FD & FE, quod ad refrangibilitatem consimiles, ac juxta quamvis lineam LM, rectæ angulum DFE bisecanti quàm proximè parallelam, incidentes post binam refractionem constituunt. Et è radiis ad X refractis, aliquem GX cum incidente radio FD convenientem in V, produc ad *f*, ut sit *f* locus Imaginis, quam Objectum F oculo in X constituto exhibet. Dein ang. OMN ac distantiis *f*X & *f*V mechanicè cognitis, dic esse *f*X. *f*V : : ang. NMO. ang. GXH; & erit GXH, quem

 quæris



quæris proximè; quemadmodum ex oſtenſis ad Schol. Prop. XII quodammodo manifeſtum eſt. Cùm refractiones utrobique non ſunt admodum inæquales, res expeditiùs abſolvitur per Schol. ad Prop. I. fingendo eſſe VX. FV : : ang. DFE. ang. GXH, vel compoſitè FV + VX. FV : : ang. NMO. ang. GXH.

SECTIO QUARTA.

62. *De Refractionibus curvarum ſuperficierum.*

De Curvarum

HÆC de refractionibus Planorum. De Curvis & præſertim Sphæricis ſuperficiebus jam agendum eſt: quarum doctrinam reſpectu homogeneorum radiorum ſequentibus Propoſitionibus complecti conabimur.

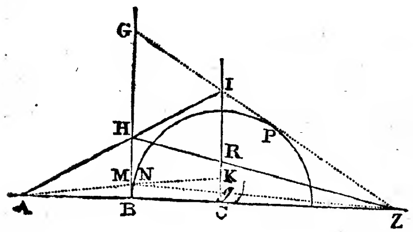
PROP. XXVIII.

Radii in Curvam ſuperficiem incidentis Refractum ducere.

Nempe eadem eſt refractio radii à Curvâ ac eſt à Plano contingente Curvam in puncto refractionis. Quære ergo refractum à contingente plano per Prop. III.

PROP. XXIX.

Si radii ſeu paralleli, ſeu ad punctum aliquod contermini, ſe ſphæræ objiciant refringendos, refractorum axi quam proximorum concurſum ſive focum determinare.



Sit A punctum radios ejaculans verſus ſphericam ſuperficiem, BNP, centro C deſcriptam. E vertice & centro erige ad axem AC perpendiculares BH & CI; ipſiſque occurrentem, in H & I age, quamlibet

Refractionibus.

libet AI per punctum A. Tum à puncto C verſus I cape CR, quæ ſit ad CI ut ſinus refractionis ad ſinum incidentiæ; & age rectam HR occurrentem AC in Z: & erit Z concurſus refractorum, quem oportuit determinare. Sit enim AN radius axi viciniſſimus incidens ad N, & occurrens CI in K. Age NZ occurrentem CI in g; & ut mos eſt, concipe infinitè parvum arcum BN æqualem eſſe BM ſegmento rectæ BH ad radium AK terminato; & erit CI : BH = CK : BN; ac BH. CR : : BN. Cg. Et ex æquo CI : CR : : CK : Cg; hoc eſt, CK. Cg ut eſt ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis. Et proinde, cùm anguli CAK & CZg ex hypotheſi ſint infinitè parvi, adeoque CK ad AN, & Cg ad NZ perpendiculares, vel ſaltem æquipollentes perpendiculis, erit NZ refractus ipſius AN. Q. E. D.

Cor. 1. Poſito I ad R ut eſt ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, erit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ. Eſt enim $\frac{I}{R}$ AB. AB : : (I. R : :) CI. CR, & AB. AC : : BH. CI. Et ex æquo perturbate $\frac{I}{R}$ AB. AC : : (BH. CR : :) BZ. CZ.

Cor. 2. Si quando punctum A infinitè diſtet, ſeu parallelos radios ejaculetur, tum propter æquales BH & CI, erit I. R : : BZ. CZ. Atque ita, ſi refracti radii paralleli ſunt, tum propter æquales BH & CR, erit I. R : : AC. AB.

Cor. 3. Si è quatuor punctis A, B, C & Z tria quævis dentur, poteſt quartum inveniri, ut è ſequentibus exemplis patebit.

Exem. 1. Dentur A, B, C, & quæratur Z. Scilicet eſt $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ; adeoque diviſim, $\frac{I}{R}$ AB − AC. AC : : BC. CZ.

Exem. 2. Si datis A, B & Z quæratur C; cùm ſit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ, viciſſim erit $\frac{I}{R}$ AB. BZ : : AC. CZ, & compoſitè $\frac{I}{R}$ AB + BZ. BZ : : AZ. CZ.

Exem. 3. Si datis A, C & Z quæratur B; cùm ſit $\frac{I}{R}$ AB. AC : : BZ. CZ, ſive AB. $\frac{R}{I}$ AC : : BZ. CZ, viciſſim erit $\frac{R}{I}$ AC. CZ : : AB. BZ, & compoſitè $\frac{R}{I}$ AC + CZ. CZ : : AZ. BZ.

Poſſunt eadem determinari per ductum linearum; veluti ſi datis A, B & Z quæratur C. Erige ad AZ normalem BH cujuſvis longitudinis, & in eâ cape BO, quæ ſit ad BH, ut I ad R; junge

 AH

AH & GZ occurrentes in I; & IC normaliter demissa ad AZ incidet ad punctum quæsitum C.

63. NOTA I. Quòd Z sit locus imaginis Objecti A per refractionem exhibitæ, cùm spectatoris oculus in axe ultra Z constituitur.

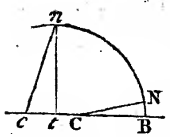
II. Si quando refracti radii divergant, vel incidentes convergant, vel sint paralleli, similis erit Problematis constructio, mutatis tantùm suo modo mutandis.

III. Si è puncto A emissi radii per plures sphæricas superficies, eundem axem AC retinentes, successivè transmittantur, ad concursum post omnes refractiones determinandum, quære primò concursum radiorum post primam refractionem; deinde concursum eorundem post secundam refractionem, juxta ac si primariò emissi fuissent è puncto præcedentis concursûs, & sic deinceps donec ad ultimum concursum deventum sit. Atque hoc pacto locus Imaginis Objecti cujusvis, per Telescopium vel Microscopium, visi determinari potest.

IV. Ope Corol. 3. lentes ex sphæricis superficiebus confici possunt, quæ Telescopiis modo quolibet designato constituendis inservient. Patet enim ex illo Corollario, quod non tantùm refractiones datarum lentium investigari possunt, sed & lentes delineari, quæ datas refractiones peragent.

LEMMA IX.

Ad datam quamvis Curvam concursum axis & vicinissimi perpendiculi determinare.



Sit BNn Curva, & ad quodvis ejus punctum, n, indeterminatè spectatum, quære perpendiculum nc, per notas methodos ducendi perpendicula Curvarum, & simul invenies longitudinem Bc. Tum (demisso ad Bc normali nt) finge Bt vel nt infinitè parvam esse, seu nullam; & emergit longitudo BC, cujus terminus est ad concursum axis cum vicinissimo perpendiculo.

Exem. 1. Sit BNn Parabola, cujus latus rectum r, & Bt dic x; erit B$c=x+\frac{1}{2}r$, ut notum est. Pone jam $x=0$, & restabit $\frac{1}{2}r$ pro longitudine BC ad verticem.

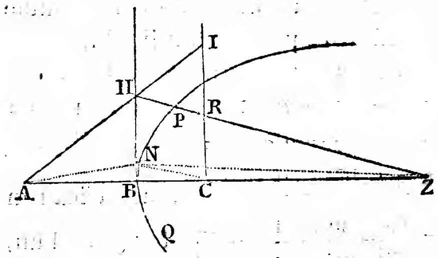
Exem. 2. Sit BNn Ellipsis, cujus latus rectum r, & transversum q;

q; eritque (ut notum est) B$c=x-\frac{rx}{q}+\frac{1}{2}r$. Jam pone $x=0$, & restabit iterum $\frac{1}{2}r$ pro longitudine BC ad verticem. Nec secus in Curvis magis compositis procedendum est.

PROP. XXX.

Radiis in curvam quamvis superficiem quàm proximè perpendiculariter incidentibus, Refractorum concursum, seu Focum, determinare.

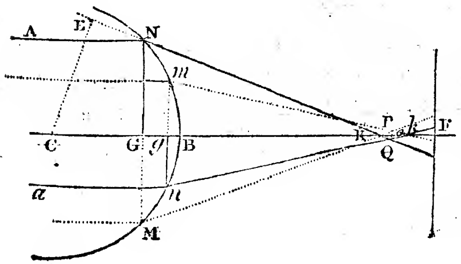
Esto PBQ Curva quævis; A, commune punctum, seu concursus incidentium radiorum; AB radius perpendicularis sive axis, & AN radius quàm proximè perpendicularis, sive axi proximus; sitque NC ad Curvam perpendicularis, axique AC occurrens ad C. Et puncto C per Lem. IX. invento, erige ad B & C perpendicula BH & CI; quibus in H & I occurrentem age quamvis AI. Versus I cape CR, quæ sit ad CI ut sinus refractionis ad sinum incidentiæ, & recta HR occurret ipsi AB in quæsito refractorum concursu Z.



Probatur ad modum præcedentis Propositionis, & huic etiam consimilia Corollaria & notæ competunt.

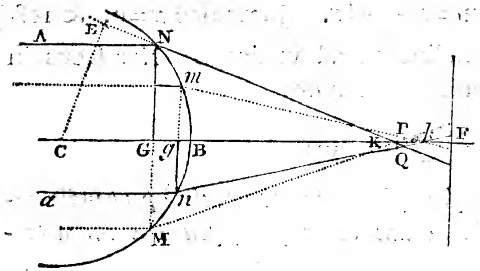
PROP. XXXI.

Parallelis radiis in Sphæram incidentibus, refractorum, ab axe remotorum, errorem à principali Foco determinare.



Sit NBM sphæra; C, centrum ejus; CB, semidiameter incidentibus radiis parallela; AN, radius incidens; & NK, refractus ejus, occurrens axi seu semidiametro CB in K; & posito F principali foco, *i. e.*

De Curvarum



i. e. in quem radii prope axem jacentes congregantur, quærendus erit error FK. Demitte ergo perpendiculares CE in NK, & NG in CK; & dic $CB = a$, $GB = x$ & $CK = z$: atque ex naturâ circuli erit $NGq = 2ax - xx$; cui adde GKq, hoc eſt $zz + 2xz - 2az + xx - 2ax + aa$, & prodibit $NKq = zz + 2xz - 2az + aa$. Jam, cùm NG ſit ad CE ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſive ut I ad R, & propter ſimilitudinem triangulorum CEK & NGK, NK & CK ſint in eâdem ratione, erit $II . RR :: (NKq . CKq ::) zz + 2xz - 2az + aa . zz$; adeoque $IIzz = zz + 2xz - 2az + aa$ in RR; & factâ reductione, $zz = \frac{2RRaz - 2RRxz - RRaa}{RR - II}$; extractâque radice, $z = \frac{RRa - RRx + R\sqrt{IIaa - 2RRax + RRxx}}{RR - II}$; ac radicali in infinitam ſeriem redactâ, $z = \frac{Ra}{R - I} - \frac{RRx}{IR - II} - \frac{R^3x^2}{2I^3a} - \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c (f). Jam, cùm per Corol. 2. vel. 3. ad Prop. XXIX. ſit $\frac{Ra}{R - I} = CF$ (id quod etiam innoteſcit ex valore z jam invento, fingendo eſſe $x = 0$) ex hoc CF ſubduc inventum valorem z, & reſtabit $\frac{RRx}{IR - II} + \frac{R^3x^2}{2I^3a} + \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c. pro valore erroris KF, quem quærimus.

Corol. 1. Si BG ſive x ponatur valde exigua, erit $\frac{RRx}{IR - II}$ quàm proximè æqualis KF; tunc enim quantitates $\frac{R^3x^2}{2I^3a} + \frac{R^5x^3}{2I^5a^2}$, &c. propter aſcendentes poteſtates ejuſdem x evadunt admodum exiguæ, & reſpectu

(f) NEMPE hoc modo.

Extrahendo radicem quadraticam, pro irrationali $\sqrt{IIaa - 2R^2ax + R^2x^2}$ veniet ſeries infinita $Ia - \frac{R^2x}{I} - \frac{R^4 - R^2II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^6 - R^4I^2}{2.I^5a^2}x^3$ &c. Quæ ſi cum R multiplicetur, pro eo omni quod numerator quantitatis fractæ, quæ ipſi z inventa eſt æqualis, irrationale habet; id eſt, pro $R\sqrt{IIaa - 2R^2ax + R^2x^2}$, veniet $RIa - \frac{R^3x}{I} - \frac{R^5 - R^3II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^7 - R^5I^2}{2.I^5a^2}x^3 -$; additiſque quæ rationalia habet numerator ille nomina, $RRa - RRx$, veniet pro numeratore toto $\overline{RR + RI}.a - \frac{R^3 + RRI}{I}x - \frac{R^5 - R^3II}{2.I^3a}x^2 - \frac{R^7 - R^5I^2}{2.I^5a^2}x^3 -$, ſive $Ra \times \overline{R + I} - \frac{R^2x}{I} \times \overline{R + I} - \frac{R^3x^2}{2.I^3a} \times \overline{R^2 - II} - \frac{R^5x^3}{2I^5a^2} \times \overline{R^2 - I^2} -$. Quibus omnibus à denominatore $RR - II$ diviſis, veniet pro z ſeries ipſa Newtoniana.

toniana.

Refractionibus.

reſpectu termini $\frac{RRx}{IR - II}$ pro nullis haberi poſſint.

Corol. 2. Quinetiam, ſi ſtatuas $NG = y$, erit $\frac{RRyy}{2IRa - 2IIa} = KF$ circiter. Etenim eſt $NGq = BG \times \overline{BC + CG}$, ſive $= BG \times 2BC$ proximè, hoc eſt, $yy = 2ax$ ferè, vel $\frac{yy}{2a} = x$; & ſubſtituendo $\frac{yy}{2a}$ pro x in valore ipſius KF, emerget $\frac{RRyy}{2IRa - 2IIa} = KF$.

Corol. 3. Hinc Errores KF ſunt ut ſagittæ GB, vel ut quadrata ſemichordarum NG.

Corol. 4. Si radius ANK detur poſitione, & paralleli alicujus, axique propioris & ad alteras axis partes incidentis, radii an refractus nk ducatur, ſecans axem in k, & hunc refractum NK in Q, & ad axem demittatur normalis Qo; linea Ko evadet omnium maxima, ubi radius an duplo minùs diſtat ad axe circiter, quàm radius alter AN. Demiſſâ enim ad axem normali ng, ponatur $ng = v$, $Ko = s$, $GK = f$, & $KF = b$, & per Corol. 3. hujus, erit $yy . vv :: KF . kF$. Adeoque $kF = \frac{bvv}{yy}$; qui à KF ſubducto reſtat $\frac{byy - bvv}{yy} = Kk$.

Præterea eſt $GK . GN :: Ko . Qo$; adeoque $Qo = \frac{ys}{f}$: item $gn . GK$ ($= gk$) proximè) :: $Qo . ok$, quare $ok = \frac{ys}{v}$. Huic adde Ko, & iterum prodit $Kk = \frac{vs + ys}{v}$. Quamobrem eſt $\frac{vs + ys}{v} = \frac{byy - bvv}{yy}$; factâque diviſione per $v + y$, & reductâ æquatione, prodit $s = \frac{bvy - bvv}{yy}$.

Jam ut maximus s inveniatur, multiplica terminos juxta methodum Huddenii per dimenſiones quantitatis indeterminatæ v, & emerget $0 = \frac{by - 2bv}{yy}$, ſive $y = 2v$, hoc eſt $NG = 2ng$.

Corol. 5. Et hinc Ko, ubi maximum eſt, æquatur quartæ parti ipſius KF circiter; nam in valore ipſius s jam antè invento, ſi ſcribas $2v$ pro y, exoritur $\frac{1}{4}b = s$.

toniana.

Namque $\frac{Ra \times \overline{R + I}}{RR - II} = \frac{Ra \times \overline{R + I}}{\overline{R + I} \times \overline{R - I}} = \frac{Ra}{R - I}$.

Similiter $-\frac{R^2x}{I} \times \frac{R + I}{RR - II} = \frac{-R^2x \times \overline{R + I}}{I \times \overline{R + I} \times \overline{R - I}} = \frac{-R^2x}{RI - II}$.

Sed $-\frac{R^3x^2}{2.I^3a} \times \frac{R^2 - II}{R^2 - II} = -\frac{R^3x^2}{2.I^3a}$.

Et $-\frac{R^5x^3}{2.I^5a^2} \times \frac{R^2 - II}{R^2 - II} = -\frac{R^5x^3}{2.I^5a^2}$.

Corol.

De … Curvarum

Corol. 6. Eſt etiam $oQ = \frac{Ry^3}{8\,aa}$ (g). Nam eſt GK (= BF proximè). GN : : Ko. oQ, hoc eſt $\frac{Ra}{R-I}$. y : : $\frac{RRyy}{8IRa-8IIa}$ (= $\frac{1}{4}$KF). $\frac{Ry^3}{8Iaa}$.

Corol. 7. Si arcus BM ſumatur æqualis BN, & Bm=Bn, ac radii ad puncta M & m refracti ducantur ſibi occurrentes in P; conſtat eſſe ſpatium PQ= $\frac{Ry^3}{4Iaa}$ (h), duplum nempe ipſius oQ; & præterea conſtat, refractos omnium radiorum, in ſphæricam ſuperficiem inter N & M cadentium, convergere in ſpatium hocce PQ; & idem PQ eſſe minimum circulare ſpatium in quod poſſent omnes congregari; adeoque Focum eſſe, ſeu locum Imaginis Objecti, parallelos radios in lentem, ad uſque limites M & N apertam, ejaculantis. Scilicet nulli radii poſſunt tranſilire hoc ſpatium; quia cùm oQ ſit in datâ ratione ad Ko, eritque oQ ſimul maximum, adeoque punctum Q omnium verſus F jacentium remotiſſimum ab axe, in quo radius quiſquam concurrit cum externo radio NK; neque poſſunt in minus ſpatium congregari, quia radii nk & mk ſecant externos radios in ipſiſſimis punctis P & Q, quibus ſpatium PQ terminatur.

Corol. 8. Si circuli NBM Apertura augeatur vel minuatur, Error lateralis PQ erit ut y^3, ſive ut cubus latitudinis aperturæ NM. Item ſi immutatâ aperturâ mutetur Circuli magnitudo, error PQ erit reciprocè ut aa ſive ut EBq, adeoque ut BFq, ſiquidem CB & BF ſint in datâ ratione: ſin verò & Circuli magnitudo & Apertura mutetur, erit error ille PQ ut $\frac{y^3}{aa}$ ſive ut $\frac{\text{NM cub.}}{\text{BF quad.}}$ quemadmodum ex $\frac{Ry^3}{4Iaa}$ (i) valore ipſius PQ conſtare poteſt.

Scholium.

Eodem ferè modo, quo radiorum parallelè incidentium errores KF

(g) Omnino legendum $\frac{RRy^3}{8.II.aa}$. Namque BF, et quæ hujus propemodum eſt æqualis GK, ad CF rationem habet quam I ad R. Id quod apud dioptricês peritos conſtat. Quare GK : CF = $\frac{Ia}{R-I}$ · $\frac{Ra}{R-I}$. Et cùm CF illi $\frac{Ra}{R-I}$ æqualis ſit, omnino GK huic $\frac{Ia}{R-I}$ æqualis erit. Quare cùm GK ſit ad GN ut Ko ad oQ, erit $\frac{Ia}{R-I}$: GN ſive y, = Ko : oQ, ſicut rectè monuit qui primam hujus Libri editionem curavit. At verò recta Ko, quando eſt maxima, parti quartæ rectæ KF æqualis eſt; hoc eſt, cùm KF quantitati $\frac{RRyy}{2.IRa-2.II.a}$ æqualis ſit, maxima Ko quantitati $\frac{RRyy}{8.IRa-8.II.a}$ æqualis erit. Quare maximâ exiſtente Ko erit $\frac{Ia}{R-I}$: y = $\frac{RRyy}{8.IRa-8.II.a}$: oQ.

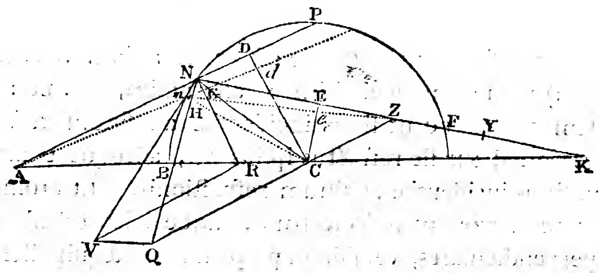
Quare oQ = $\frac{RRy^3}{8.Ia\times R-I}$ × $\frac{R-I}{Ia}$ = $\frac{RRy^3}{8.II.aa}$. Hæc eſt longitudo rectæ oQ, quando Ko maxima eſt.

KF & PQ determinavimus, conſimiles divergentium vel convergentium errores, licet calculo difficiliori, determinari poſſunt. Refractionibus.

PROP. XXXII.

Si Radii ſive paralleli, ſive verſus commune aliquod punctum inclinati, ſe Sphæræ objiciant refringendos; Refractorum extra axem ſibi quàm proximorum, & in eodem plano cum incidentibus jacentium, concurſum determinare.

Sit AN incidens radius; NK, refractus ejus; & NV, in plano trianguli ANK recta linea tangens Sphæram ad N. Ad AN duc NR



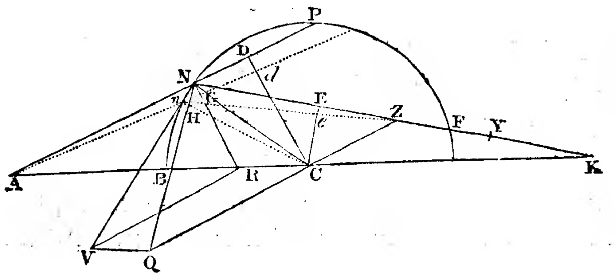
perpendicularem, & occurrentem axi AC in R; nec non RV parallelam, & occurrentem Tangenti NV in V. Item ad KN duc NQ perpendicularem, & VQ parallelam, convenientes in Q; & age QC occurrentem NK in Z; eritque Z concurſus radiorum ipſi AN viciniſſimorum. Sit enim An alius ex incidentibus priori AN infinitè vicinus, & occurrens NR in G. Age nZ occurrentem NQ in H; & ad AN & NK è C, centro ſphæræ, demitte normales CD & CE, occurrentes An & nZ in d & e. Jam, cùm AN ſupponatur

(h) Legendum $\frac{RRy^3}{4.II.aa}$ ſicut rectè monuit quem ſuprà laudavimus, vid. Not. g. Quin et hanc emendationem commendare videtur Newtonus ipſe; qui in Libro Opticês primo, Prop. VII. §. formulam poſuit, quæ in hanc noſtram abierit, ſi pro literis illius S, D ponantur y, 2a hujus; quibus eadem planè ſignificantur.

(i) Vid. Not. h.

De Curvarum

tur infinitè vicinus An, arcus infinitè parvus Nn pro rectâ coincidente cum tangente NV haberi potest; ac triangula NGn, NRV, &



NHn, NQV pro similibus. Quare est DC. Dd :: (NR. NG :: NV. Nn :: NQ. NH ::) EC. Ee, unde divisim & alternatim, DC. EC :: dc. ec. Est autem DC ad EC ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis, propterea quòd NK sit refractus ipsius AN, adeoque etiam dc est ad ec ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis. Et proinde, cùm anguli DAd & EZe sint infinitè parvi, atque adeo Cd ad An & Ce ad nZ perpendiculares, vel saltem perpendiculis æquipollentes, erit nZ refractus ipsius An. Q. E. D.

Corol. 1. Est ND. NE :: (sive NP. NF ::) NR. NQ. Nam actâ NC, propter triangula NRV & NDC, NEC & NQV similia; est ND. NR :: (NC. NV ::) NE. NQ; & alternè ND. NE :: NR. NQ.

Hinc promptior emergit Problematis resolutio: nempe ad radios AN, NK erige normales NR, NQ, quorum NR axi AC occurrat, & NQ sit ad NR ut NF ad NP. Dein age QC, quæ cum NK in quæsito puncto Z conveniet.

Corol. 2. Est etiam AN×DC×NE. AD×EC×ND :: NZ. EZ. Nam est AD.AN :: DC. NR; & inde $NR = \frac{AN \times DC}{AD}$. Item ND.NE :: NR.NQ; & inde $NQ = \frac{AN \times DC \times NE}{AD \times ND}$, adeoque AN×DC×NE. AD×EC×ND :: (NQ. EC ::) NZ. EZ.

Corol. 3. Si punctum radians A infinitè distet, sive parallelos radios ejaculetur, posito I. R :: sinus incidentiæ, sin. refract. erit I×NF. R×NP :: NZ. EZ. In hoc enim casu AN & AD, cùm sint infinitè longæ, pro æqualibus haberi debent. Atque adeo per

Corol.

Refractionibus.

Corol. 2. hujus, erit DC×NE. EC×ND :: NZ. EZ. Sed ex hypothesi est DC. EC :: I. R; & proinde I×NE. R×ND :: (NZ. EZ ::) I×NF. R×NP. Cæterùm de his vide plura in Lectionibus Dris. Barrow.

64. Notetur autem I°. quòd mutatis mutandis resolutio Problematis cuicunque casui facilè accommodatur, sive radii incidentes divergant à puncto aliquo, vel ad idem convergant, vel incidant paralleli.

II. Cùm è radiis huic ANK proximis, qui jacent in plano ANK, conveniant in Z; qui verò in conicâ superficie, per revolutionem trianguli ANK circa latus AK generatâ, jacent, conveniant in K; erit maxima radiorum ipsi ANK undique proximorum constipatio circa medium spatii KZ, puta ad Y; & proinde oculo in lineâ NK ultra K constituto, sensibilis imaginis Objecti A, per refractionem sphæricæ superficiei BN visi, locus erit ad Y; vel saltem intra limites K & Z: nam locus ille non præcisè definitur.

III. Cùm Radii pluribus superficiebus successivè refringuntur, ut vicinorum post omnes refractiones concursum determines, primò quære concursum post primam refractionem; deinde concursum eorundem post secundam, tanquam si primariò effluxissent è puncto præcedentis concursûs; & sic deinceps ut ad Prop. XXIX. dictum fuit.

PROP. XXXIII.

Radiis in quamcunque curvam superficiem incidentibus, Refractorum sibi quàm proximorum, & in eodem plano cum Incidentibus jacentium, concursum designare.

Finge BNP jam non Sphæram, sed aliam quamcunque Curvam referre, sitque A commune punctum, seu concursus, incidentium radiorum; AN, aliquis ex Incidentibus; NK, Refractus ejus; & NC, perpendicularis Curvæ ad punctum refringens. In hâc NC quære intersectionem proximi alicujus perpendicularis (qualis nc) ad aliud proximum punctum refringens insistentis (k), (id quod alibi docebitur) sitque ista intersectio C. Jam ductâ AC, demitte ad radios AN, NK normales CD, CE; ac erige NR, NQ, quorum NR

(k) Vid. Geometr. Analyt. Prob.

 occurrat

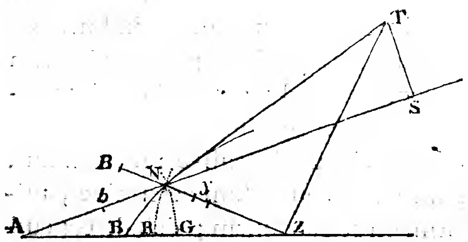
DE CURVARUM

occurrat AC in R, sitque NQ ad NR ut NE ad ND; & acta QC conveniet cum Refracto NK in desiderato proximorum Refractorum concursu Z.

Probatur ad modum præcedentis Propositionis, & huic etiam consimilia Corollaria & Notæ competunt.

PROP. XXXIV.

Figuram determinare, quæ radios homogeneos, sive parallelos, sive ad commune aliquod punctum terminatos, ita refringet, ut Refracti omnes ad aliud datum punctum accuratè conveniant.



Sit A concursus incidentium radiorum, & Z refractorum, ac punctum aliquod, B, in recta AZ, pro vertice Curvæ ad arbitrium sumatur. Ab illo B capiantur in linea BZ, versus Medium densius, BG cujusvis longitudinis, & BR ratione ad BG quam habet sinus refractionis ad sinum incidentiæ. Centrisque A & Z, & intervallis AG & ZR, describantur circuli se intersecantes in N; & ipsius N locus erit Curva, quæ desideratam refractionem peraget.

Quod ut pateat, producatur AN ad S, ut sit NS. NZ : : BG. BR; & ad NS & NZ erigantur perpendiculares, ST & ZT, occurrentes in T, & acta NT Curvam tanget in N, ut ex methodo ducendi tangentes alibi exposita constabit ([l]). Jam cum NS & NZ sint ut BG & BR, hoc est, ut sinus incidentiæ & refractionis; & respectu sinus totius, sive semidiametri NT, sit NS sinus anguli NTS, qui æquatur angulo incidentiæ radii AN, & NZ sinus anguli NTZ, qui æquatur angulo refractionis radii NZ: patet esse NZ refractum ipsius AN. Q. E. D.

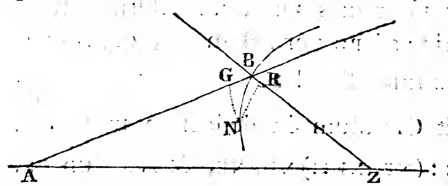
65. NOTA

([l]) In AN, ZN ut opus sit productis, capiantur Ab, ZB rectis AB, ZB singulatim æquales. Erunt igitur bN, NB illis BG, BR singulatim æquales. Habebit igitur bN ad NB rationem eam quam BG ad BR; id est datam illam, quam sinus incidentis radii ad sinum emergentis. Quare et fluxionibus rectarum bN, NB eadem data ratio intercedet. (Geometr. Flux. Theor. IV.) Sed propter rectam Ab magnitudine datam, fluxioni rectæ bN æqualis erit fluxio rectæ AN. (Geometr. Flux. Theor. V.) Similiter propter rectam ZB magnitudine datam, fluxioni rectæ BN fluxio rectæ ZN æqualis erit.

Quare

REFRACTIONIBUS.

65. NOTA I. Potest etiam Curva huic usui inserviens describi, quæ per datum quodvis punctum B, extra axem AZ positum, transibit;

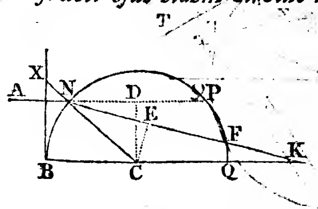


scilicet agantur AB & ZB, & in ipsis capiantur BG & BR in ratione sinuum incidentiæ & Refractionis; et centris A, Z, ac intervallis AG & ZR, describanturque circuli occurrentes in N; eritque N ad Curvam, quam oportet describere.

II. Præterea Problematis resolutio, mutatis mutandis, se ad omnes casus extendit, sive incidentes aut refracti radii convergant, divergant, vel existant paralleli, sive refractio fiat è rariori Medio in densius, vel è densiori in rarius. Et quidem, si radii ex neutrâ parte paralleli sint, i. e. si punctorum A & Z neutrum sit ad infinitam distantiam, Curva BN erit aliqua quatuor Ellipsium quas Cartesius in hunc usum in Geometria descripsit. Sin alterutrum infinitè distet, ita ut radii punctum illud respicientes evadant paralleli, Curva erit conica sectio, uti notum est: et in hoc casu, circulus RN vel GN, propter infinitam centri distantiam, evadet recta linea, ipsi AZ ad B vel G perpendicularis.

LEMMA X.

E parallelis radiis, ad Circulum refractis, radium illum determinare, cujus pars circulo inclusa datam habeat rationem ad partem refracti ejus eidem circulo inclusam.

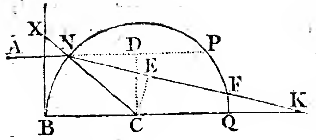


Sit AN radius incidens; NK, refractus; NP & NF, partes eorum Circulo inclusæ; CD & CE, perpendicula ad istas partes è centro circuli demissa; & BC, semidiameter acta parallela ipsi AN;

Quare fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN rationem habebit, quam sinus incidentis radii ad sinum emergentis. Sed et recta NS ad rectam NZ rationem habet, quam sinus incidentis radii ad sinum emergentis. Habet igitur recta NS ad rectam NZ rationem eam quam fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN. Quamobrem si rectæ ZT, ST, à punctis Z, S, ad perpendiculum cum rectis ZN, NS eductæ, in puncto T concurrant, juncta NT Curvam, ad quam est N, in N continget. (Newton, Geometr. Analys. Cap. VI. § 31.)

sitque

De Curvarum

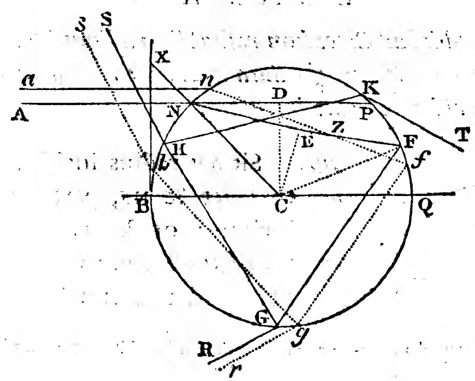


sitque CD. CE :: I. R, & NP. NF :: $p. q$. His positis, ut innotescat punctum N, quod radios AN & NK determinat, erige ad BC normalem BX, cujus quadratum sit ad BC quadratum, ut $\frac{qq-pp}{pp}$ ad $\frac{II-RR}{II}$, & acta CX secabit Circulum in desiderato puncto N. Est enim ex hypothesi $p. q$ :: (NP. NF ::) ND. NE, & I. R :: CD. CE. Quare $\frac{q}{p}$ ND = NE; & $\frac{R}{I}$ CD = CE. Porro, cùm sit NDq + CDq (= NCq) = NEq + CEq, aufer hinc inde NDq + CEq, & restabit CDq − CEq = NEq − NDq; hoc est, substituendo valores ipsarum CE & NE modò inventos, CDq − $\frac{RR}{II}$ CDq = $\frac{qq}{pp}$ NDq − NDq, & factâ reductione $\frac{II-RR}{II}$ CDq = $\frac{qq-pp}{pp}$ NDq; quo in proportionalitatem resolutio, fit $\frac{qq-pp}{pp}$. $\frac{II-RR}{II}$ :: (CDq. NDq ::) BXq. BCq. Q. E. D.

PROP. XXXV.

Sole Sphæram pellucidam illustrante, radiorum ejus, post unam reflexionem emergentium Maximam ad axem inclinationem determinare.

Sit BNK Sphæra proposita; BQ, diameter sive axis incidentibus radiis parallelus; AN, aliquis ex incidentibus; NF, refractus ejus;



FG, reflexus; & GR, denuo refractus: & quærendus erit Maximus angulorum, quos RG cum axe BQ potest conficere. In quem finem

Refractionibus.

nem advertendum est, quòd in eo solo casu, ubi RG maximè inclinatur ad BQ, radii ipsi AN vicinissimi possunt emergere paralleli ad RG. Nam in aliis casibus ex emergentibus radiis sibi vicinissimis alii magis, alii minus continuò inclinantur ad BQ, adeoque aliquantulum inclinantur ad se invicem. Advertendum est præterea, quòd radii emergent paralleli, qui conveniunt ad punctum reflexionis. Duc enim radium *an* ipsi AN parallelum & quàm proximum, sitque ejus refractus *nf*, reflexus *fg*, ac iterum refractus *gr*; & punctis F & *f* coincidentibus, cum anguli NF*n* & GF*g* sint æquales, & refractiones ad N, *n* & G, *g* similes; emergentes radii, GR & *gr*, æquè paralleli erunt ac incidentes AN & *an*.

Quærendus est itaque radius AN, cujus refractus cum refracto vicinissimi radii *an* concurrit ad F. Et quidem per Corol. 3. Prop. XXXII. (demissis à centro Sphæræ ad radios normalibus CD & CE, positoque I. R :: CD. CE) si radii isti ad quodvis punctum Z concurrant, erit I×NF. R×NP :: NZ. EZ :: NF. EF (puncto nempe Z ad ipsum F juxta hypothesin cadente) :: 2. 1. Quare I×NF = 2R×NP, & I. 2R :: NP. NF. Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. X. dabitur punctum N. Scilicet ad verticem circuli ducatur tangens BX, cujus quadratum sit ad quadratum semidiametri BC, ut 4RR − II ad II − RR, & agatur CX; hæc enim Circulo occurret in N, & ex invento N cætera nullo negotio determinantur.

Corol. 1. Hinc fit 3RR. II − RR :: CNq. NDq. Cùm enim sit 4RR − II. II − RR :: BXq. BCq; componendo erit 3RR. II − RR :: (BXq + BCq. = CXq. BCq ::) CNq. NDq.

Corol. 2. Est & I. 2R :: ND. NE. Nam suprà fuit I. 2R :: NP. NF, & ex his expeditior evadit Problematis resolutio.

Scholium.

Unà cum Maximâ inclinatione radii RG, datur Maximus arcuum FQ, ad refractos NP terminatorum. Nam angulus FCQ, quem FQ subtendit, est æqualis angulo, quem CF & AN comprehendunt; hoc est, æqualis dimidio anguli, quem RG & AN, vel BQ, comprehendunt: & proinde arcuum FQ, æquè ac angulorum ab RG & BQ comprehensorum, maximus est, qui radio AN in punctum jam inventum incidente definitur.

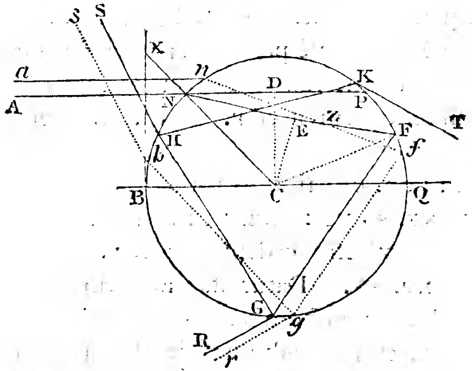
PROP.

De Curvarum

PROP. XXXVI.

Sole Sphæram pellucidam, BNP, *illustrante; radiorum ejus, post duas reflexiones emergentium, minimam ad axem inclinationem determinare.*

Sint AN & An radii duo incidentes sibi quàm proximi; qui post duas reflexiones, in Ff & Gg, emergant secundum HS & hs: et manifestum est, quòd in eo solo casu, ubi angulus acutus, quem



BQ & SH comprehendunt minimus est, radii illi HS & hs possunt esse paralleli, uti suprà de radius GR & gr dictum fuit; & ubi hoc accidit, radius etiam FG ad fg parallelus erit. Unde 2 arc. Ff = (arc. Ff + Gg = arc. FG − fg = arc. NF − nf =) arc. Nn − Ff. Adeoque 3 arc. Ff = arc. Nn; & cùm NF dividatur in Z in ratione istorum arcuum, ut patet, erit NZ = 3ZF = 3EZ. Cùm itaque per Corol. 3. Prop. XXXII. sit I × NF. R × NP :: NZ. EZ :: 3. I; erit I × NF = 3R × NP, sive I. 3R :: NP. NF. Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. X. dabitur punctum N, ducendo nempe BX, quæ circulum tanget in vertice B, & cujus quadratum sit ad BC quadratum, ut 9RR − II ad II − RR, & agendo CX, quæ occurret peripheriæ in N. Invento autem N, cætera facile determinantur.

Corol. I. Hinc est 8RR. II − RR :: CNq. DNq. Nam 9RR − II. II − RR :: BXq. BCq; & componendo, 8RR. II − RR :: CXq. BCq :: CNq. NDq.

Corol.

Refractionibus.

Corol. 2. Est etiam I. 3R :: ND. NE, utpote cùm suprà fuerit I. 3R :: NP. NF.

Scholium.

Ad eundem modum maxima radii KT, post tres reflexiones emergentis, inclinatio ad axem, juxtà ac maximus arcuum QG investigabitur. Scilicet in eo casu FG & fg convenient ad G, eritque arc. Ff = (arc. FG − fG = arc. NF − nf =) Nn − Ff; & inde 2 arc. Ff = arc. Nn, & NZ = 2ZF; adeoque 4. I :: NZ. EZ :: (per Corol. 3. ad Prop. XXXII.) I × NF. R × NP, sive I. 4R :: NP. NF, & proinde per Lem. X. 16RR − II. II − RR :: BXq. BCq; unde consectatur esse 15RR. II − RR :: CNq. NDq, & I. 4R :: ND. NE.

Atque ita, si radii post quatuor reflexiones emergentis, inclinatio minima desideratur, determinabis faciendo, ut fit 25RR − II. II − RR :: BXq. BCq; vel 24RR. II − RR :: CNq. NDq. Et I. 5R :: ND. NE, & sic præterea in infinitum.

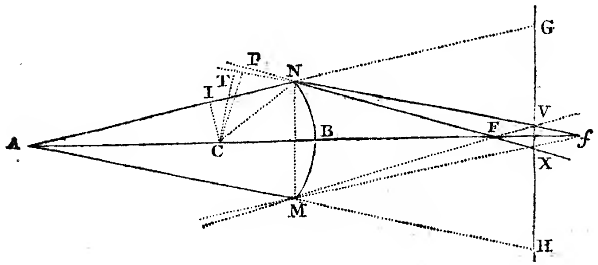
66. Transactis refractionibus Homogeneorum radiorum, jam restat, ut Heterogeneos conferamus. De horum ad Plana refractionibus paulo fusius agebamus, ut eo Prismatum (quorum usus in experimentis faciendis posthac erit frequentissimis) affectiones innotescerent. Præcipuum verò, quod circa curvas superficies jam determinandum occurrit, est quantitas erroris radiorum; à quo oritur confusio, sive indistincta visio Objectorum, quæ in Telescopiis per nimiam vitri, objectum respicientis, aperturam evenire solet. Et in hunc finem cùm præmissa sit Prop. XXXI. unde errores innotescunt, qui in sphæricis superficiebus per ineptitudinem Figuræ efficiuntur: sequentem jam subjungimus, quâ errores ex inæquali Refrangibilitate diversorum radorum orti, determinari possunt.

PROP. XXXVII.

Heterogeneis radiis in Sphæram incidentibus, errores ex inæqualibus radiorum similiter incidentium refractionibus progenitos determinare.

E puncto A in Sphæram NBM, centro C descriptam, incidant, secundum lineam aliquam AN, radii duo maximè difformes; quo-

rum refracti sunt NF & Nf, axi occurrentes in F & f, & in illos demittantur perpendicula CI, CP & CT. Jam, si accurata resolutio desideretur, refractiones radiorum NF & Nf seorsim compu-



tandæ sunt; sed, cùm arcus NM ponatur admodum exigua portio circuli, veritatem quàm proxime assequemur assumendo angulos CNI, CNP, & CNT ferè esse ut eorum sinus. Sit ergo I communis sinus incidentiæ; P, sinus refractionis radiorum maximè refrangibilium; ac T, sinus ille minimè refrangibilium. Erit ang. CNI. ang. CNP : : I. P, & ang. CNP. ang. CNT : : P. T, ac divisim ang. INP. ang. CNP : : P−I. P, & ang. CNP. ang. PNT : : P. P−T, & ex æquo, ang. INP. ang. PNT : : P−I. P−T.

Sume jam arcum BM æqualem arcui BN; & radiorum secundum AM incidentium duc refractos MF, mf, prioribus occurrentes in V & X. Age VX, & produc donec occurrat incidentibus radiis ad G & H; & patet VX esse latitudinem minimi spatii, in quod omnes radii congregari possunt. Estque GX. VX : : (ang. GNX. ang. VNX proximè : : ang. INP. ang. PNT : :) P−I. P−T; & GH+VX (2GX). VX : : 2P−2I. P−T; ac divisim GH. VX : : P+T−2I. P−T. Unde datis P, T, I, dabitur ratio GH ad VX.

Ex. gr. Cùm suprà determinaverim, quòd ad vitrum aëri conterminum sit I. P : : $44\frac{1}{2}$. $69\frac{1}{2}$, & I. T : : $44\frac{1}{2}$. $68\frac{1}{2}$; si assumatur I $= 44\frac{1}{2}$, erit P $= 69\frac{1}{2}$, ac T $= 68\frac{1}{2}$, & P+T−2I$=49$, & P−T$=1$, adeoque GH. VX : : 49. 1, circiter.

Scholium.

(n) Hæc ita se haberent, si vera esset æstimatio lineæ PQ fig. p. 334, quam Newtonus hîc posuit. Verùm eam vitiosam esse suprà monuimus. (Not. h.) Nimirum illa PQ his notis algebraicè designanda est, $\frac{RRy^3}{4.II.aa}$. Unde pro literis a, y, I, R numeris 120, 1, 11, 17 substitutis, efficietur PQ =

 17 × 17

Scholium.

67. Ope hujus & Prop. XXXI. errores Homogeneorum Radiorum, qui in sphæricis superficiebus per Figuræ ineptitudinem obveniunt, cùm Heterogeneorum erroribus conferri possunt; & constabit hosce longè majores esse in parvis Sphærarum portionibus: atque adeo heterogeneitatem Lucis, & non ineptitudinem Figuræ Sphæricæ, in causâ esse, quòd Telescopia in majorem perfectionis gradum nondum promota habeamus.

Concipiamus e. g. quòd NMB in figuris p. 334 & p. 346. referat Objectivum Vitrum Telescopii, cujus anterior superficies NM plana sit; eò ut radios in posteriori, seu sphæricâ, superficie NBM solummodo refringat; & ponamus CB semidiametrum hujus Sphæræ esse 10 pedes, ut Telescopium ferè 20 pedes, sive 240 digitos, longum conficiat; sitque Apertura NM 2 dig. quanta maxima cum visione satis distinctâ adhibeatur in hujusmodi Telescopiis, quæ Objectum quasi 70 vel 80 vicibus ampliant; & sinus incidentiæ sit ad sinum refractionis, in confinio vitri & aëris peractæ, ut 11 ad 17 circiter, prout suprà determinavimus. His positis scribendum est 120 pro a, 1 pro y, 11 pro I, & 17 pro R, in valore ipsius PQ, quem exhibuimus in Corol. 7. Prop. XXXI. hoc est in termino $\frac{Ry^3}{4Iaa}$; & emergit $\frac{17 \text{ dig.}}{4 \times 11 \times 120 \times 120}$, sive $\frac{17 \text{ dig.}}{633600}$, $=$ PQ: estque hic error lateralis Homogeneorum Radiorum, ortus ab ineptitudine Figuræ Sphæricæ. Præterea concipiamus radios AN & AM fig. p. 346. esse parallelos axi; & erit GH$=$NM$=2$ dig. adeoque VX, error nempe lateralis heterogeneorum ab invicem in eodem loco concursûs, erit $\frac{2}{49}$ dig. Confer jam hos errores, & patebit VX esse ad PQ (seu $\frac{2}{49}$ ad $\frac{17}{633600}$) ut 1267200 ad 833, sive ut 1521 ad 1 circiter (n). Adeoque VX esse quasi mille & quingentis vicibus majorem quàm PQ; tanta sanè disproportio, ut PQ respectu VX pro nullo haberi possit. Error quidem VX, cùm sit $\frac{2}{49}$ dig. tantus est, ut miror, quòd Objecta per hujusmodi Telescopia tam distinctè videri

$\frac{17 \times 17}{4 \times 11 \times 11 \times 120 \times 120} = \frac{289}{6969600}$. Quare VX : PQ $= \frac{2}{49} : \frac{289}{6969600} = 2 \times 6969600 : 49 \times 289 =$ 984 : 1. Similem numerorum emendationem adhibuit quisquis ille fuerit, qui hunc librum primus edidit.

 possint.

poſſint. Sed alterius generis error PQ, ſive $\frac{17}{633600}$ dig. i. e. $\frac{1}{37271}$ dig. circiter, longè minor eſt, quàm qui poteſt eſſe ſenſibilis, & proinde negligendus; & indiſtincta viſio erroribus ex heterogeneitate Lucis exortis ſolummodo tribuenda. Et hinc patet perfectionem Teleſcopiorum non è Conicis Sectionibus petendam eſſe, ſed figuras Sphæricas huic uſui æquè inſervire poſſe. In Microſcopiis quidem errores homogeneorum radiorum, ex ſphæricâ ſuperficie Vitri Objectivi, propter Aperturam benè magnam, enormes oriuntur & admodum ſenſibiles; adeo ut illa Vitra, ſi ſecundum conicam aliquam ſectionem debitè formarentur, paulo perfectiora evaderent. Sed (°) methodus tamen me non latet corrigendi errores illos abſque Conicis Sectionibus; & efficiendi ut Vitra è Sphæricis ſuperficiebus formari poſſint, quæ radios homogeneos ſatis accuratè refringent, ne dicam, quæ longè accuratiùs refringent obliquos radiorum penicillos, quàm vitra aliis quibuſcunque figuris terminata; adeo ut Sphæricas ſuperficies uſibus Dioptricis, præ cæteris omnibus accommodatas eſſe cenſeam.

(°) Nempe ſi perſpicillorum vitra objectiva ex vitris duobus ſphæricè figuratis & aquam inter ſe claudentibus conſlentur. Vid. Newtoni Princip. Schol. Prop. ult. Lib. I. Et *Optics*. Prop. VII. Part. I. Lib. I. *Curator Editionis Primæ.*

OPTICÆ

ARGUMENTA CAPITUM

PARTIS SECUNDÆ LECTIONUM OPTICARUM.

OPTICÆ PARS SECUNDA.

DE COLORUM ORIGINE.

SECTIO PRIMA.

Exponitur Doctrina de Coloribus, & per Experimenta Prismatis probatur.

QUI in fabricandis Telescopiis occupati sunt, de Coloribus conqueruntur, quibus Objecta, dum vitris istis mediantibus aspiciuntur, tingi solent; quique eo magis augentur & apparent, quo Vitrum Oculare ex sphæris minoribus efformatur, vel etiam quo Vitrum Objectivum majori latitudine radiis intrantibus patet. Unde duplici incommodo implicati impediuntur, ne Perspicilla ad optatum perfectionis gradum perducant: tum quòd Oculare Vitrum ultra certos gradus parvum, ad Objecta magis amplianda, nequeant adhibere; tum quòd vitrum Objectivum ultra certos limites aperire nequeant, ad Objecta magis lucida & perspicua reddenda. Qui gradus vel limites, si non probè observentur, Objecta coloribus involuta reddentur, & multo minùs distincta, quàm si vel minora cernerentur, ope vitri ocularis minùs convexi, vel minùs lucida diminutâ Perspicilli aperturâ. Jam, cùm istæ perfectiones præcipuæ sint, quæ in Perspicillis desiderantur; nempe ut Objecta magis amplient, & reddant lucidiora: operæ pretium videtur in naturam Colorum inquirere; ut investigemus tandem quid in causâ sit, quòd ita appareant, & Objecta reddant indistincta; hujus enim ignorantia quàm plurimos labore non exiguo sed inani tamen exercuit, dum perfectionem Telescopiorum à vitiosis

vitrorum

De Radiorum

vitrorum figuris ortam esse credentes, in istis meliori figurâ perpoliendis navârunt operam. At, si causam horum colorum satis exploratam habuissent, simul innotuisset inæqualis diversorum radiorum Refrangibilitas, & inde vitia Telescopiorum non ab ineptitudine figuræ Sphæricæ ad refractiones ritè peragendas originem ducere constitisset. Quo benè intellecto, conatus suos procul dubio mutâssent, & laboribus istis secundum aliam methodum dispositis, Opticam in gradum multo perfectiorem jam promotam haberemus.

2. Qui de Coloribus hucusque disseruere, vel id nomine tenus fecerunt, ut Peripatetici; vel in eorum naturam & causas inquirere conabantur, ut Epicurei & alii recentiores. Quæ Peripatetici de hisce tradidere, etsi vera forent, tamen ad nostrum propositum nihil valerent: quippe, dum modum, quo generantur, & causas, unde fiunt tam varii, non attingant. Etenim illi, de originibus & variis rerum speciebus disputantes, pro causis, ex quibus ipsarum existentiam & discrimen mutuantur, varias quasdam Formas assignârunt; verùm de particulari cujusvis Formæ causâ & ratione, ob quam differt ab aliis, haud unquam quicquam disseruere. Et sic ea fecerunt missa, quorum explicatio videtur summum Philosophorum officium, imo quæ sola mentem, scientiæ naturalis avidam, explere possint.

3. Attamen, ne mancam Philosophiam tradidisse viderentur, effecerunt, ut ejusmodi disquisitiones pro maximè absurdis & ridendis habeantur; utpote quæ supponunt Formarum esse alias Formas, & Qualitates Qualitatum. Itaque cùm Lux definiatur esse Qualitas vel Forma, quæ dat esse lucidum, non expectandum est, ut aliquid de ejus causis audiamus, vel quâ ratione ad varios Colores producendos fiat varia. Dicunt equidem, quod plus luminis quibusdam coloribus immiscetur, quàm aliis: at hoc non sufficit ad eorum productionem, tùm quòd nullus omnino color ex albedine & nigredine solummodo mixtis, præter fuscos intermedios, generatur; tùm quòd quantitas lucis non mutat speciem coloris. Corpus enim Rubrum, verbi gratiâ, semper apparet Rubrum, sive aspiciatur in crepusculo, sive in meridie lucidissimo. Porro autem ipsa definitio, quam attribuunt coloribus, adeo non pandit eorum naturam, ut eos ne nomine tenus exprimat. Ait Aristoteles

Aristoteles *Χρῶμα δὲ ἐςὶ τȣ̃ διαφανȣ̃ς ἐν σώματι ὁρισμένῳ πέρας.* Quæ superficiei coloratæ potius quàm coloris descriptio est. Illa enim dici potest extremitas perspicua in corpore terminato. At color plerumque videtur, ubi nulla talis datur extremitas, ut in Iride & Prismate, in Vitris vel Liquoribus perspicuis, & aliquo colore leviter tinctis. In Aquâ Marinâ, quæ viridis plurimùm apparet, qui tamen color non in extremitate aquæ, sed per totam ejus crassitiem, generatur; in Aere, qui, licet maximè perspicuus & nullo corpore denso terminatus, serenâ tamen nocte cæruleus apparet; & in Flammâ, quæ non minùs perspicua est, & luci pervia, quàm ipse Aer. Sic cùm humores oculi colore aliquo tinguntur, omnia videntur eodem colore tincta, licet extremitas perspicui sit aliis coloribus prædita. Et cùm Solem nudis oculis modò aspexeris, luminosa omnia deinceps videntur rubra, & nigra plerumque apparent cærulea; qui color erit magis conspicuus, si clausis oculis te in locum aliquem tenebrosissimum statim conferas. Imo premendo oculum colores in tenebris excitare liceat; quis autem vocabit illos extremitatem perspicui? Cæterùm non opus est, ut has opiniones enixè refutem, quæ, etsi veræ essent, tamen non sunt sufficientes, neque proposito meo adversantur. Esto enim Lux qualitas corporis lucidi: esto Lumen actus perspicui; & Color ejus extremitas: & quicquid de illis dixerunt, esto; abinde tamen haud concipi poterit, quo pacto Lux refringatur; unde Colores sint varii; quid in causâ sit, quòd in Perspicillis apparent; & quâ ratione incommodum istud devitari possit.

Lucis Coloribus.

4. Ad opiniones aliorum Philosophorum quod attinet, dixerunt Colores vel ex Umbrâ Luceque variè mixtis; vel ex contortione globulorum, aut eorum variis pressionibus generari; vel denique ex variis modis, quibus Medium quoddam Æthereum vibratur, statuentes Lucem productam esse ex impulsu vibrantis Ætheris in retiformem tunicam delato. Extra oleas nimis vagarer, si has opiniones sigillatim refutandas adortus essem: nec opus est, ut faciam, cùm omnes in communi quodam errore consentiant; scilicet, quòd modificatio Lucis, quâ singulos colores exhibet, ei non sit insita ab origine suâ, sed inter reflectendum vel refringendum acquiritur. Inter radios lucis nullum contemplantur discrimen, priusquam incidant in corpus aliquod colorificum; opinati tantùm,

DE RADIORUM

tùm, quòd, pro variâ dispositione corporis istius, variis modis reflectuntur vel refringuntur, & pro specie modificationis, quam sic acquirunt, varia deinde Colorum phantasmata spectantibus exhibent. Mixtura Lucis & Umbræ, gyratio globorum, vel varia vibratio Medii non supponuntur inesse radiis antecedenter ad eorum reflexiones vel refractiones, sed per istas actiones generari creduntur. Quemadmodum & Peripatetici statuunt Colores à corporibus originem ducere, quorum dicunt esse qualitates. Attamen contrarium esse verum ex sequentibus abunde patebit. Invenio scilicet, quod modificatio Lucis, unde Colores originem sumunt, luci connata sit; & non oritur à Reflexione neque à Refractione neque à qualitatibus corporum, aut modis quibuslibet, nec ab iis vel destrui potest, vel ullo modo mutari.

5. Verùm, ut sententiam meam distinctius proferam, invenio primò, quòd radiis diversè refrangibilibus competant diversi colores; maximè refrangibilibus Purpura, sive Violarum color competit, et Rubor minimè refrangibilibus, atque mediocribus Viriditas, vel potius confinium Viridis & virescentis Cærulei. Cæruleus autem Purpuræ intercedit & Viriditati, Flavusque Viriditati & Rubori. Adeoque radii prout sunt plus plusque refrangibiles, apti sunt ad hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generandos unà cum omnibus eorum successivis gradibus & coloribus intermediis.

6. Invenio præterea, quòd nullius radiorum generis Forma, sive dispositio colorifica, vel refractione, vel aliâ quâcunque (quam potuerim animadvertere) causâ, mutari potest; sed unicum tantùm, sibi proprium, colorem unumquodque semper conservat & exhibet; si modò à radiorum diversi generis misturâ non conturbetur. Nam colores, qui refractionibus generari videntur, non nisi difformium radiorum misturâ variâ, vel separatione fiunt.

7. Tertio invenio, quòd color Albus & Niger, unà cum Cinereis seu Fuscis intermediis, fiunt ex radiis cujusque speciei confusè mistis; & similiter, quòd cæteri omnes colores, qui non sunt ex primitivis, per varias horum radiorum misturas producuntur. Et inde non mirum est, si difformibus radiis per inæqualem refractionem segregatis, diversi colores ex his de novo emergere videantur.

8. Quinetiam

LUCIS COLORIBUS.

8. Quinetiam invenio, quòd Primitivi Colores per misturam radiorum alterutrinque confinium exhiberi possunt. Viridis nempe ex Flavo & Cæruleo; Flavus ex adjacente Viridi Citreoque, & sic de aliis. Per colores autem Primitivos non tantùm quinque prædictos intelligo, sed & quoslibet alios, quibus exhibendis aptum datur aliquod uniforme radiorum genus.

9. Invenio denique, quòd omnes omnium corporum colores non aliunde generantur quàm è dispositione quâdam, quâ apta sunt ut alios radios reflectant, & intromittant alios. Sic corpus rubrum est, quòd radios ad Rubedinem aptos reflectit maximè, & plerosque cæteros intromittit; Purpureum, quod radios isti colori generando proprios reflectit, & intromittit alios: Album verò, quòd ferè omnes reflectit; & Nigrum, quòd omnes intromittit, paucissimis, sed omnium tamen specierum, radiis repercussis.

10. Verùm ne videar officii limites excessisse, dum naturam Colorum pertractare aggrediar, qui nihil ad Mathesin attinere censeantur; non abs re erit, si de ratione incepti hujus iterum commonefaciam: nimirum tanta est inter proprietates Refractionum & Colorum affinitas, ut seorsim explicari nequeant. Qui alterutras ritè velit cognoscere, ut alteras cognoscat necesse est: & præterea, si de Refractionibus non agerem, & earum disquisitio non esset in causâ, quòd negotium de Coloribus simul explicandis inceptarem; tamen generatio Colorum tantam Geometriam complectitur, & eorum cognitio tantâ firmatur evidentiâ, ut vel ipsorum gratiâ possem aggredi; sic limites Matheseos non nihil ampliaturus. Quemadmodum enim Astronomia, Geographia, Navigatio, Optica & Mechanica pro scientiis Mathematicis habeantur, licet in iis agatur de rebus Physicis, Cœlo, Terrâ, Navibus, Luce & Motu Locali: sic etiamsi Colores ad Physicam pertinent, eorum tamen scientia pro Mathematicâ habenda est, quatenus ratione mathematicâ tractantur. Imo verò, cùm horum accurata scientia videtur ex difficillimis esse, quæ Philosophus desideret; spero me quasi exemplo monstraturum, quantum Mathesis in Philosophiâ Naturali valeat; & exinde ut Geometras ad examen Naturæ strictiùs aggrediendum, & avidos scientiæ naturalis ad Geometriam priùs addiscendam horter: ut ne priores suum omnino tempus in speculationibus humanæ vitæ nequaquam profuturis absumant;

De Radiorum

absumant; neque posteriores, operam præposterâ methodo usque navantes, à spe suâ decidant. Verùm ut Geometris philosophantibus, & Philosophis geometriam exercentibus, pro conjecturis & probabilibus, quæ venditantur ubique, scientiam Naturæ summis tandem evidentiis firmatam nanciscamur. Itaque ad institutum redeo, de Coloribus secundum præcedentes quinque Propositiones explicatis disceptaturus.

PROP. I.

Radiis diversè Refrangibilibus diversi competunt Colores.

EXPER. I.

11. Quo primum comprobem, repetamus experimentum Prismatis sub initio propositum; nempe Radii Solares obtenebratum cubiculum ad foramen F (fig. 1.) ingressi, à Prismate ABC, quàm proximè foramen istud intus disposito, refringantur, tendentes deinde versus oppositum parietem HI, ad imaginem PT ibi depingendam; & Imago illa, ut vulgo notum est, coloribus tingetur: quorum Rubeus ad extremitatem T à recto cursu minus deviantem, & Purpureus ad alteram procliviorem extremitatem P procidet; Cæruleus autem Viridisque & Flavus ad Q, R & S, intermedia loca, cernentur. Constat itaque quòd radii maximè refracti Purpuram exhibent, & minimè refracti Ruborem; cæterique, intermediam refractionem passi, colores in ordine præfinito intermedios. Sed in majorem evidentiam, tum doctrinæ de radiorum diversâ Refrangibilitate sub initio propositæ, tum hujus doctrinæ, quòd certis Refrangibilitatis gradibus certi conveniant Colores; videamus è contra an diversi coloris radii diversam Refractionem patientur; hoc est, an radii versus P tendentes refractionem iterum majorem patientur, quàm qui tendunt versus T; id quod variis modis tentare liceat, quorum facillimum & maximè perspicuum sequentem existimo.

EXPER. II.

12. Sume aliud Prisma *abc* (fig. 1.) & illud alicubi inter primum Prisma, ABC, & imaginem, PT, ita colloca, ut sit illi Prismati

Lucis Coloribus.

mati ABC transversum, sive parallelum imagini PT, radiosque versus PT tendentes intercipiat, & alioversum refringat, puta versus *pt*. Hoc facto, Imaginem *pt* refractionibus utriusque Prismatis sic effectam videbis, ut priùs coloratam, sed in alio tamen situ dispositam; non parallelam imagini PT, sed secundum extremitates rubras manifesto convergentem. Jam, cùm radii ad utrosque colores, Rubrum T & Purpureum P pertinentes, similiter incidant in Prisma secundum *abc*, si eandem præterea Refractionem paterentur, imagines PT & *pt* deberent esse parallelæ; & ideo, cùm non existunt parallelæ, sed imaginis *pt* extremitas Purpurea, *p*, longiùs ab alterâ imagine PT transferatur, quàm extremitas Rubea, *t*; necessario concedendum est, quòd radii ad extremitatem purpuream, P, tendentes magis refringantur, quàm qui tendunt ad extremitatem rubeam T: hoc est, quòd radii generantes Purpuram apti sunt, ut magis refringantur quàm Ruborem efficientes: atque idem quoque de coloribus intermediis eâdem ratione constabit, sicut ostendendum proposui.

13. In experiendis hisce notari poterit, quòd quo vicinius anteriori Prismati, ABC; sive quo remotius à pariete, HI, collocetur prisma posterius *abc*; imagines, *pt* & PT, eo magis ab invicem distantes, etiam ad se magis inclinabuntur; adeo ut angulum semirectum vel paulo minorem eo contineant, cùm Prismata collocantur ad invicem vicinissima; cujus rei ratio facillima est considerantì, quòd distantiæ, P*p* & T*t*, sunt in ratione quâdam datâ. Sic in fig. 2. si parallelæ P*p* ac T*t* sint in ratione datâ, quo majores existant, eo major erit inclinatio linearum PT ac omnium *pt*. Et hinc patet axes imaginum omnium productas convenire ad commune aliquod punctum cum axe ipsius PT.

14. Si fortè concursus Imaginum desideretur, radii OF, à Sole directi, eò usque producantur, donec occurrant cum plano HI, in quod dictæ imagines projiciuntur, quemadmodum videre est ad X; id quod fiet auferendo Prisma ABC, ut jubar per F trajectum rectâ tendat ad X: & erit X locus, ad quem imagines PT & *pt* convergunt. Nam, quemadmodum radii maximè refrangibiles cadunt in P ac *p*, & minimè refrangibiles in T & *t*, conficientes imagines oblongas, PT ac *pt*; si alii præterea radii darentur minus adhuc refrangibiles, illi citra punctum T ac *t* in papyrum IH caderent: quo

 pacto

De Radiorum

pacto imagines illæ paulo longiores evaderent, auctæ scilicet ad extremitates T ac *t*. Atque ita, si fingeremus radios gradatim minùs atque adhuc minùs refrangibiles dari, usque dum deventum esset ad radios adeo pertinaces, ut non possent omnino refringi; illi radii Prismata sine aliquâ refractione pertranseuntes, incidere deberent in ipsissimum punctum X, ad quod posuimus radios à Sole directè venientes tendere. Imagines itaque, PT & *pt*, sic productæ convenirent ad X, & proinde ad idem X convergunt. Cæterùm dubitari potest, an imagines illæ, si eo usque producerentur, dum convenirent ad X, forent accuratè rectæ vel paululum incurvatæ; neque istud (cùm multi foret laboris & parvi momenti) jam lubet determinare; sufficit, quòd ex observatione quàm proximè convergunt ad X.

15. De hoc experimento sub initio observabam, § 23. quòd omnibus adversatur objectionibus, quæ contra doctrinam de inæquali Refrangibilitate traditam proponi possunt; ex eo quod per transversam refractionem secundi Prismatis constat inæquales refractiones non esse fortuitas & irregulares, neque ex radii cujusque diffusione vel dilatatione ortas esse, aut aliâ quâvis causâ præter dispositionem cujusque radii ad refractionem in gradu aliquo certo & constante patiendam; quandoquidem cujusque refractio in utroque Prismate secundum illam legem peragitur. Addo jam, quòd exhinc etiam constat, refractiones singulorum radiorum secundum easdem leges peragi, sive commisceantur cum radiis aliorum generum, ut fit in albâ luce, sive separatim refringantur, luce priùs in colores conversâ. Nam experiri est, quòd similes sunt refractiones posterioris Prismatis, cùm proximè collocatur post alterum Prisma, antequam Lux per id trajecta transmigret in Colores, atque cùm longius post illud Prisma statuitur, ubi Lux evasit colorata.

16. Sicui in potestate est Instrumentum aliquod ad quantitates Refractionum accuratè mensurandas paratum, nullus dubito, quin istius etiam ope seorsim dimetiendo refractiones diversorum generum radiorum, facilè observabit earum differentias; licet ego prædictis tanquam manifestissimis acquiescens, haud operæ pretium duxerim rem aliis modis experiri. Verùm, ut cuique magis pateat,

Lucis Coloribus.

teat, quanta sit prædictorum evidentia, quædam, quæ exinde scaturiunt notatu dignissima, proferre non pigebit.

EXPER. III.

17. Sit F*f* (fig. 3.) paries, vel operculum fenestræ duobus foraminibus, F & *f*, luci pervium, iisque digitos duos ab invicem distantibus; & intus disponantur duo Prismata, ABC, DEG, in situ sibi invicem parallelo, & perpendiculari ad lineam F*f* per centra foraminum ductam; quæ duo lucem ingressam refringunt ad imagines duas, PT & MN, in oppositum parietem projiciendas, simili prorsus modo, quo factum est in experimento priori; & præterea sint anguli Prismatum, ACB, DGE, comprehensi planis refringentibus æquales; quibus ita constitutis videbis imagines, PT & MN, in directum jacentes cum extremitatibus earum T & M contiguis. Quod si non eveniat, situs unius è Prismatibus parùm mutandus est, donec extremitates contiguas esse cernas, vel fortè nonnihil coincidentes. Purpurâ M & Rubore T sic juxta positis, adhibeatur Prisma tertium *abc*, quod primis Prismatibus & eorum imaginibus interponatur, in situ ad lineam F*f* sive ad imagines dictas, PT, MN, parallelo; ita nempe ut radios utriusque Prismatis ABC, DEG, tendentes versus PT & MN, pariter intercipiat, eosque refringens aliò projiciat, quemadmodum ad *pt* & *mn*; adeo ut quæ duobus Prismatibus in priori specimine facta sunt, hîc videas facta tribus.

18. His ita paratis & constitutis, videbis imagines *pt* & *mn* ab invicem disjunctas esse, quæ priùs apud PT & MN fuerunt contiguæ & in directum positæ; ita quidem ut Purpura, *m*, in extremitate imaginis *mn*, magis distet ab imaginibus primis PT & MN, quàm Rubor *t* in extremitate imaginis *pt*; id quod nullo modo potuisset accidisse, nisi radii ad Purpuram generandam apti aliquanto magis refringerentur ex incidentiâ pari, quàm radii generantes Rubedinem. Etenim, cùm radii coloris utriusque pariter incidant in Prisma posterius *abc*, pariter etiam emergerent, si æqualiter refringerentur; & exinde depingerent imagines, *pt* & *mn*, prioribus, PT & MN, parallelas & in directum jacentes. Dixi radios utriusque coloris (Purpurei Rubeique) pariter incidere in Prisma posterius *abc*: quod ne moram injiciat alicui, concipiendum

dum est, quòd radii FT tantùm inclinantur versus extremitatem ejus *c*, quantum alteri *f*M versus extremitatem alteram *ab*, & sic incident pariter sive ad eosdem angulos, licet non paralleli. Si quis tamen velit efficere, ut incidant etiam paralleli, nihil aliud agendum est, quàm ut alterum è Prismatibus anterioribus, ABC, vel DEG, circa suum axem paululum convertatur, donec inter T & M, interiores imaginum extremitates, tanta intercedat distantia, quanta est inter foramina F & *f*, sive quanta isti rei sufficiens videatur; imaginibus ad istam distantiam in directum jacentibus: & Prismate *abc* deinceps interposito, facilè percipiet, quòd incidentes parallelè emergent inclinati; tum quòd imagines non amplius in directum jacebunt, tum quòd Purpura M ad majorem distantiam transferetur quàm Rubedo T.

19. Si tria Prismata non præsto sint, experimentum jam recitatum duobus experiri possit, idque modo magis expedito & facili. Sit ABCDE (fig. 4.) prisma, cujus unum latus planum, ABDE, papyro denigratâ tegatur, duobus parvis foraminibus, F & *f*, luci perviâ, quorum foraminum situs esto ad longitudinem Prismatis transversus. Tunc Prismate hoc ita disposito, ut radii permeantes ista foramina terminentur in oppositum quoddam planum, puta papyrum HI; transferatur ista papyrus ultra citraque, donec videas imagines duas, PT & MN, contiguis extremitatibus in directum conjunctas ut priùs; deinde altero Prismate *abc* interposito, in situ ad alterum transverso, videbis imagines illas PT & MN ad *pt* & *mn* ita translatas esse, ut non ampliùs jaceant in directum, rubedine *t* à T minùs remotâ, quàm purpura *m*, sicut in prioribus contingebat.

EXPER. IV.

20. Est & aliud ex eodem fonte derivatum specimen, haud expertu difficilius aut minoris evidentiæ. Prismate ABC (fig. 5.) juxta foramen F ut priùs collocato, ad distantiam convenientem (veluti duodecim pedum) statuatur aliud Prisma, *abc*, in situ transverso respectu prioris, vel fortè parallelo, aut alio quovis pro arbitrio; ita tamen ut anterius Prisma, ABC, lucem refractam & coloratam projiciat in aliquod ex planis lateribus, *ac*; quod quidem latus obducatur papyro denigratâ, & exiguo foramine, G, per medium

medium transfossâ, per quod aliqui ex radiis, ab anteriore Prismate refractis, transeant in hoc Prisma posterius; ubi, cùm rursus refracti fuerint, pergant ad papyrum HI ab inde decem pedibus, vel pluribus, distantem. Quibus ita constructis & dispositis, in situ illo figatur papyrus, HI, & posterius Prisma *abc*. Denique præ manibus sumatur anterius Prisma ABC, non ut moveatur è loco ejus, sed ut motu tantùm angulari nunc huc nunc illuc paululum inclinetur, ut alios atque alios colores successivè trajiciat per foramen G in oppositam papyrum HI; & videbis, quòd color quilibet diversus ad locum diversum perget. Veluti, cùm ea sit positio Prismatis ABC, ut Rubeum colorem projiciat in G, si ponatur quòd ille ab altero Prismate *abc* refringatur ad T; tum positione Prismatis ABC paululum mutatâ, inclinando circa axem donec Purpura cadat in G; videbis, quòd ille color juxta obliquiorem tramitem refringetur, puta ad P: & pari modo, si color aliquis intermedius incidat in G, idem refringetur ad locum ipsis P & T interjacentem. Quamobrem, cùm radii cujuslibet generis pergentes à foramine F, positione dato, ad foramen G positione datum, & ideo similiter incidentes in Prisma posterius *abc*, refringantur ad loca diversa P, T, cæteraque intermedia; constat, quòd inæqualiter refringantur: & cùm refractus GP observetur magis deflectere ab incidente FG quàm refractus GT, constat, quòd radii Purpuram exhibentes magis refringantur quàm exhibentes Ruborem; cæterique deinceps in ordine intermedio.

21. Siqua forsan oboritur suspicio, quòd ex motu Prismatis ABC, foraminibus F & G interpositi, incidentia radiorum diversos colores efficientium tantum varietur, quantum sufficiat ad varietatem efficiendam locorum P, T, &c. ad quos refringuntur, quamvis motus iste sit exiguus & ineptus huic effectui; tamen, ut suspicio illa prorsus eximatur, anterius Prisma ABC ad alteras partes foraminis F, Solem versus, collocandum est; ut radii incidentes in foramen G directè veniant à dicto foramine F: eo enim pacto, cùm foramina F & G positione determinentur, positio radiorum per utrumque trajectorum determinabitur; eademque accurata erit omnium incidentia, quoscunque colores exhibentium: & tamen diversicolorum refractio non secus peragetur ad loca diversa, P, T, & C, quàm modò explicui.

EXPER.

De Radiorum

EXPER. V.

22. Ex abundanti denique placet alium recensere modum, quo hæc eadem tentari possint, ne copia desit experturis. Nimirum radiis, ut prius, per Prisma ABC (fig. 6.) trajectis, ad distantiam quamlibet, puta viginti pedum, adhibeatur Speculum planum, quale IK vel GH; quod eosdem versus locum quemvis D reflectat: ubi per aliud Prisma, LMN, transmittantur denuò versus *p* vel *t*. His positis, si Speculum istud ita collocetur ad IK, ut rubrum colorem reflectat, & notetur locus *t* ad quem hi radii tendunt, postquam transiêre per Prisma LMN; deinde Speculum statuatur ad GH, ut violaceum vel cæruleum colorem ad idem Prisma LMN secundum eandem lineam PTD, reflectat; & notetur locus *p*, ad ad quem isti etiam radii à dicto Prismate LMN refringantur: invenietur, quòd cæruleus color, versus *p* refractus, longiùs divaricabit ab incidentibus radiis PTD, quàm rubeus refractus versus *t*: atque adeo quòd radii Cæruleum generantes majorem refractionem patiantur, quàm generantes Rubeum.

23. Cum veritatem propositam sic fecerim stabilitam, hanc Propositionem concludam adnotando connexionem & affinitatem, quam Coloribus & Refractionibus interesse dixeram: nempe ex ostensis non solum pateat, quòd diversa Colorum genera cum definitis gradibus Refrangibilitatis reciprocantur; sed & iisdem experimentis probatur dari radios diversè Refrangibiles, & radios diversè Refrangibiles esse diversi Coloris; iisdemque probatur è contrà radios diversicolores esse diversè refrangibiles, & inde radios diversè refrangibiles dari. Et scopus eorum, quæ in primis Lectionibus de dispari Refrangibilitate radiorum edocui, quoad causas Colorum intelligendas, multum illustratur; ut pateat, quòd una absque aliis dilucidè tractari nequeant.

PROP. II.

Radiorum Formæ, sive Dispositiones Colorificæ, non sunt Refractione mutabiles.

24. Transactâ assertione, quòd diversicolores radii sint diversè refrangibiles, & è contrà; videamus, an cujuscunque radiorum, seorsim

Lucis Colorib.

seorsim spectati, generis Color à Refractione mutari possit; & hoc à novissimè (°) tradito experimento quadantenus decernitur. Scilicet, cùm extrema Purpura incidebat in foramen G (fig. 5.) radii, secundâ vice ad P refracti, Purpuram iterum exhibuêre sine aliquâ Flavedine, Rubore, aut Viriditate exinde generatâ: &, cùm extrema Rubedo in G projiciebatur; eadem Rubedo in T absque Violaceo, Cæruleo, aut Viridi emergente apparuit.

25. Sed experimentum nondum omnibus numeris absolutum est; nam ubi Prisma *abc* non transversum, sed alteri Prismati ABC parallelum statuebatur, è Purpurâ Cæruleus, & è Rubedine Flavus eliciebatur; præsertim si non summæ colorum extremitates per G trajiciebantur; cùm autem Viriditas trajecta fuit, colores utrinque proximi (Cæruleus nempe & Flavus) emersêre; & sic Flavus Citriusque Ruborem & Viriditatem, ac Cæruleus Viriditatem & Purpuram præbuerunt. Eorum itaque reminisci oportet, quæ sub initio de more, quo oblonga hæc imago, PT, ex circulis in directum positis formatur, explicui; & inde constabit hosce colores non simplices esse, sed è plurium misturâ componi. Nam concipe genus radiorum æqualiter refrangibilium, & intensam Purpuram generantium, ab integro Solari disco profluere, & per Prisma, versus imaginem PT (fig. 7.) trajectos incidere in circulum AC. Deinde aliud concipe radiorum, paulo minus refrangibilium, genus in alium circulum YZ, qui priorem in G contingat, incidere; & manifestum est, quòd nulli istorum generum radii commiscebuntur: quippe cùm circulos, AC & YZ, ex nullâ parte coincidentes occupant. Quòd si tertium radiorum, intermediam refractionem passorum, genus, in circulum EF, quasi in medio positum, incidere fingas, patebit aliquos ex istis cum utrisque prioribus in spatiis HI & KL misceri, in quibus nempe circuli ab illis illuminati coincidunt; atque ita, si concipias imaginem totam, PT, ex innumeris circulis, in longum dispositis, componi, quorum quilibet à diversis radiorum generibus illuminatur; constabit, quòd in omni ejus parte radii heterogenei commisceantur: quibus deinde per iteratam refractionem magis segregatis, color quilibet in simpliciores resolvi debet. Sic in Viridi latet Flavus & Cæruleus; qui tamen non conspiciuntur, tum quòd Viridita-

(°) Imo ex Quarto.

De Radiorum

tem generantes, sive (ut perspicuitatis gratiâ voces fingam) Viridiformes radii propter copiam præpollent, tum quòd Flavus & Cæruleus Viridem componunt; sed quatenus per secundam refractionem secernuntur, unusquisque sub propriâ formâ videbitur. Et sic in aliis.

Exper. VI.

26. His perspectis periclitatus sum, quid è pluribus refractionibus eveniret; hoc fretus consilio, quòd Colores iteratis Refractionibus plus plusque mutari deberent, si modò à singulis quamlibet internam mutationem paterentur; contrà verò, si non intrinsecus mutati, sed, per divergentiam difformium radiorum, è misturis tantùm educti & segregati essent: tum apparentes mutationes iteratis Refractionibus minores fieri, propterea quòd Colores quâlibet vice simpliciores evaderent: & experienti posterior casus evenit. Scilicet, cùm coloris per posterius Prisma *abc* trajecti, partem aliquam tertio Prismate, ad distantiam aliquot pedum dispósito, exceperim; Color ille denuo trajectus adeo perdurabat, ut, si ratione non constitisset mutationem aliquam eventuram fuisse, sensu judice haud mutari percepissem. Tentabam deinde, siquam quartâ Refractione mutationem sensibilem inducere potuerim, sed frustrà. Interea cavendum est, ne foramina, F ac G, cæteraque, per quæ lux transit, majora statuantur, quàm exigunt colores, ut evadant perspicui.

27. Est & alia methodus, quâ diversi Colores ab invicem segregari possunt, ut in segregatis examen statuatur; scilicet experimentum sub initio traditum est, quo Solis imago, PT, per contractionem cujusque circularis imaginis, oblongam illam efformantis, multo oblongior quàm aliâs evaserit. Nam in contractâ imagine *pt* (fig. 8.) quæ totidem constat circulis, eadem centra retinentibus, quot sunt in majori PT, circuli minus coincidunt. Sic enim AC & EF ex parte HI coincidunt; at cùm in minores *ac* & *ef* contrahuntur, videre est, quòd ex omni parte ab invicem distant, & sic de aliis. Quamobrem, cùm circuli à diversis radiorum generibus illuminati jam minùs confunduntur, Colores evadent minùs commixti, utut non fient omnino simplices; propterea quòd circuli, inter *ac*, *ef* cæterosque positi, cum illis ex aliquâ

quâ suâ parte possint coincidere. Sed hâc de causâ plures ejusdem cujusque coloris gradus tantùm commisceri possunt, ut Cyaneus & Indicus in Cæruleo, Coccineus, Minius, & fortasse Citrius in Rubro; & sic de aliis. Quæ quidem mistura semper fiet eo minor, quo imago *pt* in angustiorem contrahitur.

Lucis Colorifica

Exper. VII.

28. Disposui itaque Prisma ABC (fig. 9.) unà cum lente LM, ad distantiam quasi decem pedum à foramine F, per quod Sol illuxit cubiculum; & radii, per hæc duo vitra trajecti, desideratam imaginem contractam, *pt*, ad pedes exinde decem circiter formabant; lente LM existente tali, ut radios parallelos ad focum quinque pedibus à se distantem cogeret. Deinde aliud adhibui Prisma, HIK; cujus latus planum HI velamine nigro, ad *n* (ut dictum est) transfosso, tegebatur, & ad imaginem *pt* statui; ubi Colores secundum latitudinem maximè contractos & distinctè terminatos vidi, ut eorum aliquis pro arbitrio transmitteretur per *n* in parietem, vel papyrum YZ. Quibus positis observabam deinde, quòd Colores hoc modo multo minùs à repetitis Refractionibus mutati fuerint, quàm in præcedentibus. Cùm rubor per *n* transmissus est, idem rubor ad YZ apparuit, & non alius color quispiam, demptis variis ejusdem gradibus, ut Coccineo & Minio: et sic Viriditas in varios solummodo gradus discreta fuit, ex unâ parte vergens ad Flavescentem Viriditatem, & ex aliâ Thalassinum; sed in Flavum aut Cæruleum, aliumve colorem quemvis, ex nulli sui parte transformari potuit. Atque idem in aliis coloribus contigit.

29. Observabam præterea, quòd cùm foramen F factum erat angustius, ut per imaginis *pt* majorem contractionem colores evaderent simpliciores, colores ad YZ trajecti minùs adhuc mutati fuerint, & vix aliquam mutationem sensibilem passi fuisse videbantur, cùm foramina non latius duodecimâ parte digiti patuêre; hoc tantùm excepto discrimine, quòd lux apud *pt* fortior erat (quia magis contracta) quàm apud YZ. Atque adeo nil dubitandum esse censeo, quin colores evaderint prorsus immutabiles, si modò per indefinitam parvitatem foraminum, F & *n*, omnino in simplices discerni possunt. Et hoc ex eo etiam confirmatur, quod

cum

DE RADIORUM

cùm texi lentem LM, juxta perimetrum ejus, velamine nigro, per medium ad latitudinem ferè femiffis digiti circulariter pertufo, figura imaginis YZ pene orbicularis evafit; & eo magis orbicularis, quo magis foramen F contraxi. Id quòd notari vellem, cùm plurimum illuftret, caufam imaginis PT in longitudinem diductæ non aliam fore, quàm radiorum coloribus diffimilium diverfam refrangibilitatem.

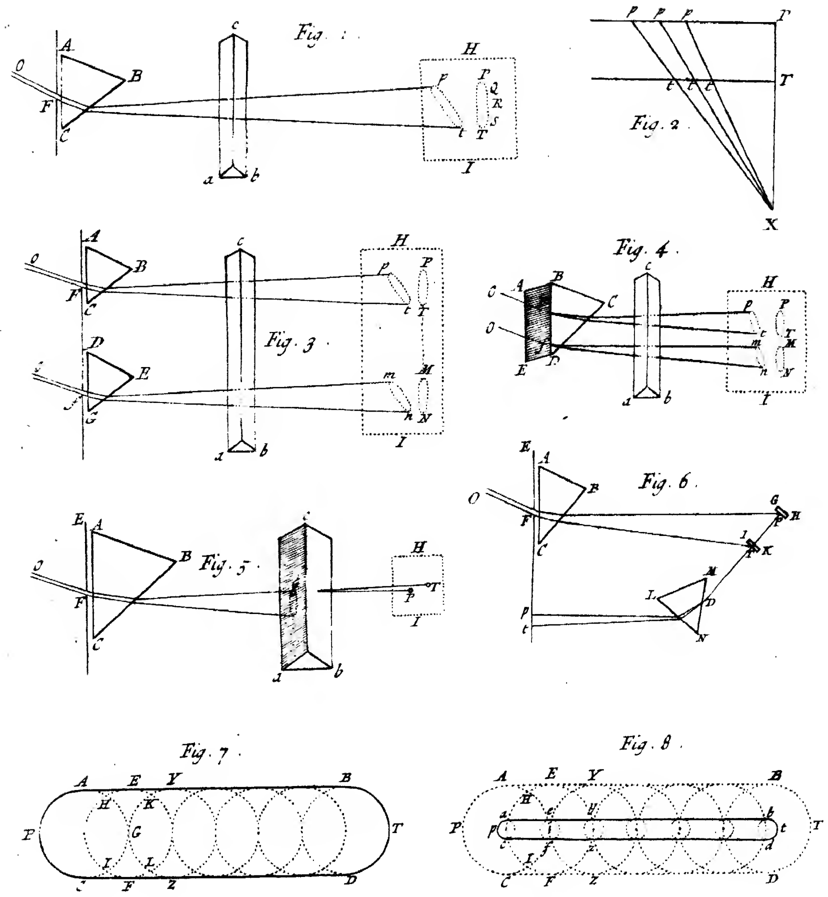
30. Cæterùm, quo propofitum adhuc magis pateat, & ex abundanti ut conftet, quinam fint Colores Primitivi; adverto circulos AC, EF, YZ cæterofque in alternas partes juxta lineam, quæ per omnium centra tranfit, maximè extendi, & ab invicem recedere, antequam attingant parallelas rectas AB & CD, quibufcum imago illa utrinque terminatur. Sic AC & EF, fe mutuò fecantes in H & I, recedunt poftea, non omnino coincidentes in triangulis AHE & CIF. Colores itaque juxta ipfiffimas extremitates AB & CD funt omninò fimplices. Et ex hoc fundamento propofitum affequi poffem; fed cùm circuli illi, ftatim ut ab extremitatibus ipfis recedunt, inter fe mutuò nimis interferuntur, quàm ut Colores, per aliquam fenfibilem latitudinem, fatis ad experimenta commodè inftituenda fegregantur; rem potius ad hunc modum affequar.

EXPER. VIII.

31. E præoftenfis conftat, figuras, ex quibus in longum difpofitis imago PT componitur, circulares effe propter Solis difcum circularem; & inde, fi difcus ille triangularis effet, vel aliâ quâcunque non circulari perimetro terminatus, illæ etiam figuræ vel triangulares, vel alio quovis modo ad inftar Solis terminatæ evaderent. Et par eft ratio de foramine F, & figuris ad inftar iftius foraminis; ex quibus, in longum fimiliter difpofitis, imago *pt* conftituitur. His animadverfis, vice orbicularis foraminis F triangulare fubftituitur, cujus altitudo verbi gratiâ fit plufquam digiti, bafis tertiæ quartæve partis digiti, & crura æqualia. Et Prifmate ABC ad trianguli hujus perpendiculum exiftente parallelo, imago *pt* (fig. 10.) quadrilatera ex triangulis *caf*, *emb*, *gni* cæterifque infinitè multis efformata eft; quibus juxta bafes, in lineâ *cd* pofitas, cum fe mutuò parte maximâ communicantibus, exinde

ad

Tab. I. Pag. 364.



ad usque ipsorum vertices recessio gradatim facta est, donec in verticibus, ad rectam *ab* sitis, penitus dissocientur, adeoque colores ibi simplices evadunt. LUCIS COLORIBUS.

32. Jam verò observabam, quòd simplices sive primitivi colores juxta terminum *ab*, etsi longè debiliores, tamen (sensu judice) ejusdem speciei apparuêre, ac compositi juxta terminum *cd*; cujus rei ratio est, quòd color quilibet primitivus per commisturam colorum utrinque confinium exhiberi potest, ut in sequentibus patebit. Colorum, verò quos hoc pacto primitivos esse constitit, gradus esse insigniores, Coccineus sive Purpureus, Minius, Citrius, Luteus sive Heliocryseus, Subflava Viriditas, Gramineus, Thalassinus, Cyaneus, Indicus & ejusmodi Violaceus; qui ad usque extremitatem imaginis extendebatur, sed absque immistâ rutili alicujus fulgoris tincturâ apparuit, si modò cubiculum factum fuerit valdè tenebrosum.

33. Observabam præterea, quòd coloribus hisce juxta terminum *ab* conspicuis, non potui sensibilem speciei mutationem, Refractionibus utcunque repetitis, inducere. Quinetiam tentabam, si quo alio pacto mutare possem, quemadmodum reflectendo à corporibus diversimodè coloratis. Sed in eo frustra fui; nam (superfluâ luce quaquaversum penitus exclusâ) si cæruliformes radii in aurum incidêre, illud aurum cærulei coloris evasit: si flaviformes in Indicum incidêre, flavescebat Indicum. Et sic in cæteris, adeoque hanc Propositionem satis superque stabilem esse censeam.

PROP. III.

Colores Albi & Nigri, cum Cinereis sive Fuscis intermediis, ex radiis uniuscujusque speciei confusè mistis generantur.

34. Assertionis veritas è præcedenti Propositione manifesta est; nam colores qui non sunt ex primitivis (quales non reperiuntur jam recensiti) per compositionem generari necesse est. At non gravabor tamen fusius probare; idque potissimum, cùm lucem cui color Albus competit, ex radiis quoad qualitates colorificas æquè ac refrangibilitatem heterogeneis componi, eâque de causâ albere certissimè constat. Proponitur itaque jam monstrandum esse,

eſſe, quòd, cùm omnes omnino Colores, quos priſmata generant, debitè commiſcentur, Albedo exinde reſultabit; deque tali miſturâ perfectè componendâ plures modos, eo quo cogitabam ordine, recenſere animus eſt.

EXPER. IX.

35. Ac primò rem aggreſſus ſum cum pluribus priſmatibus ita diſpoſitis, ut Colores eorum in eundem locum inciderent, & ſic inter ſe miſcerentur. Sint ABC, DEF ac GHI (fig. 11.) tria priſmata, juxta ſe, ſitu parallelo, ita diſpoſita, ut alterum DEF ſit alteris duobus, ABC & GHI, utrinque viciniſſimis intermedium, in morem trium linearum conficientium capitalem literam Græcam Ξ; & lux per unumquodque priſma liberè tranſiens, excipiatur in papyrum PT, pede uno vel duobus poſtpoſitam. Coloribus omnium priſmatum ſic in ipſam PT projectis, convertantur priſmata circa proprios axes, & videbis colores iſtos ſibi invicem accedere vel recedere. Quare convertantur, donec talis ſit eorum ſitus, ut unius priſmatis, ABC, Rubor, & alterius, GHI, Purpura, vel Color Indicus, cum Viriditate tertii, DEF, coincidant; ſicut vides factum ad R: & ex iſtis coloribus, ita ſibi commixtis, Albedinem generari cernes; colore Purpureo & Cæruleo juxta P conſpecto; Rubeo verò & Flavo juxta T; & Albo juxta R cæteros intercedente.

36. Cæterum in iſtis experiendis convenit obſervare ſequentia. Primò, ſi anguli priſmatum, planis refringentibus contenti, ACB, DEF & GHI, ſint inæquales; præſtat, ut illud priſma, cujus angulus GIH maximus eſt, ponatur verſus exteriorem partem anguli contenti radiis incidentibus & refractis, & iſtud verſus interiorem, cujus angulus ACB eſt minimus.

37. Secundo Aperturæ, per quas lux tranſmittitur trans priſmata, debent eſſe magnæ; imo convenit, ut tranſitus luci per tota priſmata pateat, obſtaculo nullo adhibito; neque opus eſt, ut experimentum in tenebris peragatur, ſicut in aliis quampluri-mis requiritur.

38. Tertio papyrus PT, in quam Colores incidunt, non nimis diſtare debet à priſmatibus: ſufficit diſtantia pedum plus minus duorum. Has autem aperturas & diſtantiam ſtatuo, ut colores eo

eo meliùs commiſceantur ad Albedinem perfectiorem componendam.

39. Quartò, ut colores ad R faciliùs etiam & ſatiùs commiſceantur, priſma ABC ſtatuatur in ſitu quocunque tali, ut radii, tum ingredientes, tum emergentes, Refractionem præterpropter æqualem patiantur, & in eo ſitu figatur. Et colores ejus ad diſtantiam duorum pedum excipiantur, vel ad eam potius, ubi vides Flavum ejus & Cæruleum modò contiguos, Albedine intermediâ tum evaneſcente. Poſtea figatur aliud priſma GHI in tali ſitu, ut Purpura ejus contingat Ruborem alterius ABC, non autem coincidat illi, & linea contactûs notetur. Deinde tertium priſma DEF ſic fige, ut ejus colorum medietas cadat in dictam lineam contactûs; quod ubi contingit, facilè cognoſces, intercipiendo lucem cætera priſmata ingreſſuram. Denique papyrus PT ultra citraque transferatur paululum, donec videas Albedinem perfectam in medio colorum ad R generari. Quam quidem Albedinem ex variis coloribus compoſitam eſſe conſtabit, intercipiendo colores unius duorumve priſmatum, priuſquam attingant papyrum; nam loco Albedinis, eos, quos non intercipis, colores intueberis.

40. Denique ſi velis, ut colores cujuſque priſmatis perfectiùs miſceantur, poſſis adhibere plura priſmata, modò præſto ſint; tamen eventus non deerit expectationi, ſi tria tantùm adhibeas. Etenim colores cujuſque priſmatis, ſeorſum ſpectati, non ſunt omnino ſimplices, ſed Viridis & Rubeus nonnihil miſcentur in Flavo; & Purpureus ac Viridis in Cæruleo; & ſic de reliquis, quemadmodum in ſequentibus oſtendetur: & inde fiet, quòd cùm tria tantùm Priſmata adhibentur, non ſolùm tres colores, Rubeus, Viridis & Indicus commiſceantur in R, ſed etiam Cæruleus & Flavus, unà cum omnibus eorum gradibus intermediis, iſtam Albedinis compoſitionem ingrediantur.

EXPER. X.

41. Verùm, cùm tot priſmata in ſitu tam accurato diſponere, propter motum Solis & alia incommoda, difficile forſan & laborioſum ſimul inveniatur, niſi adhibeatur machina quædam eâ de cauſâ fabricata, ut ejus ope priſmata in deſiderato ſitu figantur; alium propterea modum profero, quo iſta negotio leviori, idque unico

De Radiorum

unico prisinate periclitari poteris. Sumatur papyrus, vel aliud opacum corpus attenuatum, in morem laminæ, & in eo confodiantur oblongæ rimæ sex, aut plures, parallelæ, quarum latitudines sint æquales distantiis, aut iis paulo majores. Deinde papyrus ista figatur alicui ex planis lateribus prismatis. Sit illud latus papyro obductum ACED (fig. 12.) & rimæ in papyro excisæ litteris *l* designentur, quarum situs esto parallelus ad EC concursum laterum refringentium prismatis, sive ad verticem ejus. Papyrus autem debet toti isti plano, ADEC, superindui; nequa lux alibi transmissa quàm per prædictas rimas perturbet experimentum. Tum prisma statuatur in luce Solis, ut radii ejus per dictas rimas id ingrediantur, vel, postquam refracti fuerint, per eas egrediantur, & in isto situ figatur. Quo facto, sumatur alia papyrus PT, quæ sic teneatur à posticâ parte prismatis, ad distantiam trium duorumve digitorum, ut in eam lux terminetur; & videbis tot lineas colorum, quot sunt oblongæ rimæ *l*, quarum linearum cuique tot competunt colores, quot solent apparere virtute prismatum. Nempe quælibet rima subit officium unius è prismatibus, experimento priori adhibitis, & proprios colores, Cæruleum, Rubrum, cæterosque generat; quasi tot essent Prismata, quot sunt rimæ. Porro, si papyrus PT longiùs differatur à prismate, coloratas istas lineas paululum dilatari cernes, & interjecta spatia minui, donec absorbeantur à coloribus tandem factis contiguis. Et, si papyrus adhuc longiùs differatur, colores à diversis rimis effecti, Rubri cum Cæruleis primò, deinde alii cum aliis, incipient plus plusque misceri, & sic sese paulatim diluent; donec, cùm mistura satis absoluta est, convertantur in Albedinem, præterquam in eorum extremitatibus P ac T, ubi mixtura & confusio fere nulla est. Et isthæc accidunt, cùm papyrus PT quasi ad distantiam decem vel duodecim vicibus majorem ipsâ AC vel BC, latitudine planorum prisma constituentium, amovetur. Quòd si amoveatur adhuc longiùs, absimilium radiorum commistio perfectior fortasse evadet, sed colores Purpurei & Cærulei ad P, ac Flavi ac Rubri ad T, latiores fient, & interjectum spatium album minuetur, donec totum destruatur ab istis coloribus occupatum.

42. In hisce autem experiendis cavendum est, ut oblonga foramina, *l*, sint accuratè æqualia, & æqualibus distantiis ab invicem

Lucis Coloribus.

cem dissita; ne luce magis copiosâ per aliquod ingressa quàm per cætera, colores exinde generati prævaleant cæteris, & misturam perfectam conturbent, & sic vice Albedinis colores apparebunt hinc illinc more fortuito sparsi. Illa vero distantia rimarum *l*, ut & earundem latitudo, non malè statuitur esse pars digiti circiter duodecima, aut eâ major fortè, si prisma satis amplum adhibeas. Quinetiam, si cupias, ut experimentum sit omnibus numeris absolutum, vice prismatum vitreorum vulgo venalium, quæ sunt nimis gracilia, debes amplioribus uti; qualia possis efficere ex laminis vitreis utrinque perpolitis, & conjunctis in morem vasculi prismiformis; quod vasculum impleatur aquâ clarissimâ, & undique cemento obturetur. Non multum refert, quænam sit hujus latitudo; sufficit, ut sit trium digitorum. Sed refringentia latera debent esse quatuor vel sex digitos lata, aut amplius; ut rimæ præfatæ, *l*, cum distantiis earum fiant majores, & plures, & magis accuratæ. Sin utaris angustioribus, qualia vulgo venduntur, colores externi juxta P ac T, dilatando, priùs destruent interjectam albedinem, quàm perficiatur per remotionem papyri PT. Et illa præterea, quæ in totum constant ex vitro, colore aliquo vel Viridi vel Flavo plerumque tinguntur; & radios ita tingunt in transitu, ut Albedinem perfectam exhibere nequeant.

43. Jam verò audire videor objectionem, ex receptis Philosophorum opinionibus depromptam. Dicat enim aliquis, quòd Colores reverâ & propriè loquendo non miscentur, sed destruuntur potius; idque eâ de causâ, quòd umbræ vicinia, quæ necessaria est ad productionem Colorum, tollitur, cùm radii, per diversas rimas trajecti, commisceri incipiunt; & propterea, quòd radiis sic mixtis, quorum motus inter se dissentiunt, necesse est, ut isti motus destruant alterutros, quibus cessantibus Color omnis perit, & in Albedinem convertitur. Sic Cartesianus aliquis contendat fortè, quòd, cùm globuli miscentur, quorum rotationes contrariantur sibi; necesse est, ut impediant sese, & alternos motus destruant. Et sic alii objiciant alia.

44. Sed responsio multiplex in promptu est: & imprimis inquam, quòd, cùm umbræ, coloribus interjectæ, primùm evanescunt, removendo papyrum PT; colores tamen non ideo pereunt, neque minimum immutantur, donec incipiunt misceri per remotiorem

De Radiorum

tiorem diſtantiam papyri; & Albedo non producitur, donec, per diſtantiam adhuc remotiorem, miſtura radiorum omnis generis evadat perfecta. Unde confinium Umbræ non eſt neceſſarium ad Colores producendos, neque Albedo generatur ex iſto ſublato.

45. Secundo, Colores, qui primò omnium miſcentur, nimirum Purpureus ſive Violaceus, & Rubeus, videntur maximè eſſe omnium diſſimiles, propterea quòd adverſas colorum extremitates occupent. Quamobrem itaque motus eorum contrarii non deſtruunt ſeſe, neque color albus generatur, antequam cæteri etiam colores omnes miſcentur?

46. Tertio, cuique licet obſervare, idque nullo negotio, quòd colores non omnino mutantur trajiciendo radios per Medium quantumvis luminoſum: ſic colores Priſmatum ſunt iidem, ſive trajiciantur per ſpatium illuminatum, ſive tenebris involutum; & res omnes eodem modo coloratæ cernuntur, ſive conſpiciantur, cùm lumen Solis trajiciatur per intermedium ſpatium, ſive cùm excludatur; id quod ſecus eſſet, ſi lux in lucem, per idem Medium tranſeuntem, poteſt agere. Quinimo ſi radii, duobus priſmatibus refracti, ſeſe decuſſent, poſtquam ab invicem diſcreti ſunt, eoſdem colores efficient, quos aliâs efficerent, ſi non omninò miſcerentur. Id quod non poſſet evenire, ſi radii, diverſis coloribus tincti, ſibi mutuò per eadem ſpatia tranſeuntibus mutationem aliquam inducerent.

47. Quarto, cùm in illâ diſtantiâ papyrum PT fixeris, ubi colores Albedinem optimè componunt; ſtatuatur alia papyrus YZ, ad diſtantiam duorum vel trium digitorum à priſmate, & in eâ notentur lineæ coloratæ; tum exſcindantur iſtæ partes papyri, in quas dictæ lineæ cecidêre. Factis eo pacto rimis oblongis vvvvvv parallelis & æqualibus, ut & æquè latis ac diſtantibus; deinde papyrus iſta YZ in locum ſuum reſtituatur, tres digitos circiter à priſmate diſtantem; ut per rimas ejus lux colorata trajiciatur ad alteram papyrum PT longinquiorem; quo facto poſſis obſervare, quòd ſi parùm deprimas papyrum YZ, ut Purpureos colores & Cæruleos, ſuperioribus labris rimarum ejus impingentes, intercipiat, & tranſmittat cæteros; Albedo ad papyrum PT convertitur in Rubeum colorem, aut Citrium vel Flavum: ſin attollas eam, ut Rubei & Flavi labris inferioribus intercipiantur, cæterique perlabantur,

Lucis Coloribus.

bantur, Albedo iſta convertitur in Purpureum, Indicum & Cæruleum; perinde ut fieri oportet in mixturâ colorum: nam unis è mixturâ ſublatis, alteri debent ad propriam ſpeciem & formam reſtitui.

48. Quinto, papyro YZ ſublatâ, & reliquis ſtantibus, papyrum alteram PT in meditullio Albedinis acu perfora, ut lucis ejus alba portiuncula trajiciatur; quam deinceps accipe in aliam papyrum, iſti PT ad diſtantiam quatuor vel ſex digitorum poſtpoſitam, & vice Albedinis colores iterum apparebunt. At, quomodo colores ille de novo generari potuiſſent, ſi deſtruerentur in productione, potiùs quàm miſcerentur, non video. Concedendum eſt itaque, quòd tantùm miſcentur; & quòd radii, variis coloribus tincti, & promanantes à diverſis rimis *l*, *l*, decuſſant ſeſe in dicto foramine acu effecto, & poſtea divergentes ab invicem gradatim ſegregantur, & ſegregati proprios iterum colores depingunt, quemadmodum poſthac fuſiùs explicabitur. Ad eundem præterea modum, ſi Speculum aliquod planum & exiguum, K, ſtatuas in medio Albedinis, ad PT papyrum effectæ, ita quidem ut aliquos ex albificantibus radiis aliorſum, veluti ad *pt*, reflectat; lux alba ſic reflexâ degenerabit in colores, quos videre eſt ad *pt* papyrum objiciendo. Etenim radii tincti cum diverſis coloribus, & in albedinem ad ſpeculum K commiſti, inclinantur ad ſe invicem; propterea quod adveniunt à diverſis fiſſuris *l*, *l*, *l*, *l*, *l*, *l*. Atqui tantùm divergunt à Speculo, poſtquam reflectuntur, quantum antea convergebant. Divergentes itaque paulatim diſſocientur; ac diſſociati proprios colores non ſecus exhibebunt, quàm ſi nunquam fuiſſent commiſti. Liquet ergo, quòd in miſturâ radiorum diverſicolorum diſpoſitiones ad efficiendos varios colores non deſtruuntur, utut Albedinem exhibeant, dum commiſceantur ſibi.

49. Ad hæc, lamina K, ſi valde obliquetur ad radios in ipſam incidentes, non amplius Alba apparebit, ſed vel cùm Rubeo vel Cæruleo colore imbuta, prout vel verſus verticalem angulum, vel verſus baſin priſmatis inclinatur; id quod nullo modo accideret, ſi alba lux, quâcum illuminatur, homogenea eſſet; quandoquidem alba & ſpecularia corpora reflectendo lucem, non mutant colorem ejus. Sed hoc ex eo evenire fatendum eſt, quòd in Speculum, quando incidentibus radiis admodum obliquatur, pauciores ex obliquioribus

De Radiorum

liquioribus radiis in illud incidant, inque reflexâ luce major fit copia radiorum minus obliquorum, qui proinde prædominantur, & proprium colorem oftendunt; quem non poffent exerere, fi, ad albedinem lucis incidentis producendam, non tantùm cum aliis coloribus mifcerentur, fed reverâ tranfmutarentur in uniformem Albedinem. Cæterùm nota, quòd in ifthoc experimento faciendo, præftat laminam non perpolitam, fed fuperficie nonnihil afperâ, qualis eft nummi argentei vel chartæ, &c. præditam adhibere.

50. Præterea vulgo notum eft, quòd ex pulveribus diverficoloribus, inter fe commiftis, novus color emergit; tamen, fi pulveres ifti infpiciantur Microfcopiis, omnes videntur tincti propriis coloribus. Adeo ut ex mifturâ pulverum colores proprii non deftruantur, fed permifcendo tantùm color novus eliciatur. Verùm iidem planè colores ex mifturâ colorum Prifmatum ac Pulverum producuntur. Sic pulvis Cæruleus cum Flavo miftus producit Viriditatem; & eadem Viriditas etiam producitur ex mifturâ radiorum tinctorum cum Cæruleo & Flavo: & proinde non dubium eft, quin colores novi ex coalefcentibus Prifmatum coloribus, non factâ affimilatione fed mifturâ tantùm, fimiliter oriantur. Cæterùm, ut nullum dubitandi locum relinquerem, effeci, ut Pulveres colorum principalium, quos Prifmata generant, Rubei, Flavi, Viridis, Cærulei & Purpurei, in proportione certâ mifcerentur; & licet Albedo perfecta non prodibat, tamen ifti colores ad fenfum periêre, & quoddam genus Albedinis fufcum & obfcurum, five mediocre inter Albedinem perfectam & Nigredinem, producebatur: quod noftro propofito non minus infervit, quàm fi Albedo perfecta prodiiffet; quandoquidem Fufcus ille ab Albo perfecto tantùm differt quantitate lucis, non autem fpecie coloris; ut exinde pateat, quòd producitur ex Albo cum Nigredine contemperato. Neque expectandum eft, ut mihi videtur, alium quàm Fufcum colorem è tali Pulverum mifturâ generari. Nam, cùm Pulveres colorati intromittant maximam partem lucis, iftam ferè folam reflectentes, quæ apta eft ad exhibendos proprios colores, ut oftendetur poftea; eorum mixtura maximam quoque partem lucis intromittet. Unde pro Albedine perfectâ talis color generandus eft, qualis efficitur ex Albedine & Nigredine mixtis, id

Lucis Coloribus.

id eft Fufcus. Attamen non eo inficias, quin tales fortè Pulveres inveniantur, præfertim inter Mineralia, qui tantum lucis reflectant, ut mixti exhibeant Albedinem perfectiorem, quàm hactenus vidi ex mixturis effectam. Cæterùm, quòd Pulveres coloribus tantùm quinque præcipuis tinctos mifcebam; non ideo cogitandum eft Albedinem ex quinque folis productam fuiffe, fed ex omnigenis. Nàm in omnium corporum coloribus alii latent principalibus commifti, licet minùs fortes, ut à principali feparati non cernantur; fic in Cæruleo pulvere latent Cyaneus & Indicus, aliique gradus omnes ufque ad Viridem aut Flavum fortaffis ex unâ parte, & ad intenfum Purpureum ex alterâ; utut Cæruleus folus appareat, quòd fit cæteris longè copiofior.

51. Experientiis hifce admonitus in mentem præterea revocabam, quòd corpufcula, quæ confpiciuntur in radiis Solaribus, huc & illuc volitantia, varios colores exhibent, modò quifquam ea diligenter obfervat in cubiculo quaquaverfum luci occlufo, præter unicum foramen per quod illuminantur; & tamen, cùm ifti pulvifculi in acervum congregantur, nullus omninò color apparet præterquam fufcus.

52. Non minus appofita eft obfervatio, quòd, cùm Aqua, fapone in eâ foluto, paululum infpiffata, & in fpumam agitando converfa fuerit; poftquam paululum conftitit fpuma, in fingulis bullulis, ex quibus conglomeratis efformata eft, innumeri omnis generis colores acutiùs infpicienti apparuêre; & tamen fpuma, ad tantam diftantiam fpectata, ubi colores in fingulis bullulis ab invicem diftingui nequibant, apparuit perfectè candida.

53. Patet itaque colores Prifmatum reverâ non deftrui ad Albedinem producendam, fed commifceri tantùm; quandoquidem emergunt immutati, cùm radii coeuntes decuffavêre, & per fubfequentem divergentiam iterum diffociantur; & proprios etiam colores exhibent, cùm aliqui copiofiùs quàm cæteri reflectuntur: atque fubalbus color, è mifturâ Pulverum omnigenis coloribus præditorum, ut & Albedo perfectior, è diverficoloribus bullulis, fine aliquâ congredientium colorum mutatione fimiliter emergat. Ad hæc, cùm rei dignitas poftulare videatur, ut nullus non moveatur lapis; præter modos præcedentes componendi Albedinem lubet

De Radiorum

lubet adhibere Tertium & Quartum deinde, quo faciliùs prædicta experiri possis, & magis fortè cum evidentiâ.

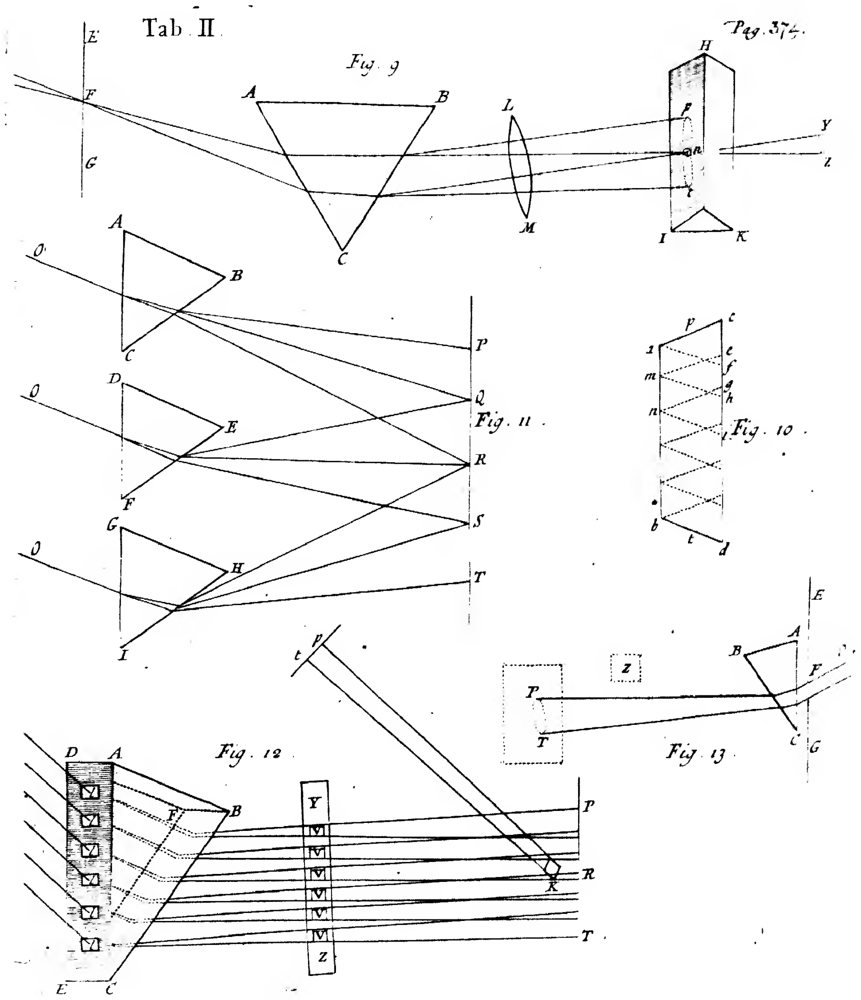
EXPER. XI.

54. Posito quòd Sol illuceat obscurato cubiculo per unicum tantum foramen F (fig. 13.) cui Prisma ABC affigitur, ingressam lucem refringens ad PT; juxta colores, in papyrum PT sic projectos, teneatur alia papyrus Z, ut illuminetur à coloratâ luce, quam altera papyrus PT reflectit. Quo facto, papyrus Z, sic illuminata radiis omnium colorum à PT confusè reflexis apparebit alba. De hoc autem specimine, maximè luculento & facili, juvabit observare sequentia.

55. Primo, quòd auferendo papyrum PT, ne lucem ampliùs ad Z reflectat; è consequente defectu lucis in Z, cognoscas eam illuminari per solam lucem coloratam à PT reflexam.

56. Secundo, si papyrum Z ipsi PT valde vicinam teneas, ut una pars ejus magis illuminetur ab uno colore, & alia ab alio; ipsa Z non apparebit alba, sed ejus partes ab omnibus coloribus istis tingentur, quibus sunt vicinissimæ. Sin ipsa Z ad majorem à PT distantiam transferatur, ut omnes ejus partes æqualiter ferè ab omnibus coloribus illuminentur, ex illâ colorum mixturâ generabitur Albedo. Pari ratione, si quemlibet è coloribus ad papyrum PT tendentibus intercipias, ne reflectetur ad Z; illud Z non ampliùs albescet, sed evadet coloratum pro mixturâ, quam cæteri colores, in ipsam PT prolapsi, componunt.

57. Denique, quòd Albedo illa Z, non destruendo colores, sed tantùm miscendo generatur, exinde pateat, quòd colores PT cernuntur beneficio radiorum non secus oculo mixtim incidentium, quàm papyro Z. Itaque, si colores destruerentur potiùs, quam miscerentur ad Z, etiam destruerentur ad corneam tunicam oculi, vel pupillam; ubi tamen certissimum est, quòd misceantur tantùm, ut decussantes postea divergant ad varias partes retinæ, & sic excitent phantasmata propria. Quinimo si radii, tincti cum diversis coloribus, dum per eadem spatia confusè transeant, possent inter se invicem agere, & dispositiones mutare, quas quilibet habent ad expingendos proprios colores; omnes omnium rerum colores conturbarentur, & se mutuò transmutarent, dum per Aera transmittuntur,



transmittuntur, ubique scilicet radiis aliorum corporum omnigenis coloribus tinctorum occurrentes; & sic in coloribus visibilium nulla esset certitudo, constantia nulla. LUCIS COLORIBUS.

EXPER. XII.

58. Quartum præterea modum descripturus, quo colores in Albedinem misceri possint, pono ABC (fig. 14.) esse prisma foras ante foramen F dispositum, quod refractam lucem in obtenebratum cubiculum transmittit versus MN. Tum lentem MN convexam sume, cujus focus est ad distantiam semipedis, vel pedis unius duorumve, quale est Objectivum Vitrum Perspicilli bipedalis, & eam statue paulo plus distantem à foramine F, quàm focus distat à se; ita scilicet ut lux colorata per eam deinceps trajiciatur, sicut videre est in schemate: sit autem ejus latitudo, sive Apertura tanta, ut omnes radios transmittat. Deinde, cùm lentem in dicto situ stabilitam feceris, ponè statuatur papyrus PT, in quam radii hi refracti terminentur; eamque primò colloca proximè ad lentem, deinde ad majorem distantiam continuato motu transfer; & videbis colores, Purpureum P Rubeumque T, contrahi, & eousque minui, dum omnes convertantur in Albedinem; puta ad X, quatuor vel sex pedes, aut longiùs fortè, distantem à lente, pro convexitate ejus vel positione. Deinde, si papyrum adhuc longiùs transferas, colores iterum emergent, sed in situ contrario; Rubeo ad τ conspecto, & Purpureo ad π; neque ulla inter eos ad PT & πτ differentia intercedit, præterquam quòd situs sit contrarius. Scilicet à lente MN effectum est, ut omnes radii venientes ab aliquot punctis foraminis F in totidem iterum punctis congregentur ad papyrum X; & sic omnes omnium specierum, tum Purpuram ad P, tum Rubedinem ad T, tum alios alibi colores efficientium, convergunt ad X; & ibi confusè miscentur ad Albedinem generandam: de quâ imagine albâ & orbiculari monebam suprà. Postea verò, cùm sese decussavêre in X, radii PX tendunt ad π, & TX ad τ, adeo ut colores * expingantur ad P & π per eosdem radios Pπ, & iidem ad T & τ per eosdem Tτ, & sic de aliis. Unde liquet iterum, quòd dispositiones radiorum dissimilium, ad diversos colores producendos, non destruantur per eorum mixturam; quandoquidem

* Lege *iidem colores*.

De Radiorum

doquidem eosdem expingunt cùm fegregantur, quos ante mixturam expingebant.

59. Porro, fi radios cujufvis coloris intercipias, interponendo aliquod corpus opacum prope lentem MN, & cæteros facias miffos; videbis non modò colores interceptos è papyris PT ac $\pi\tau$ tolli, fed & Albedinem X deftrui; & ejus vice colorem aliquem, qualis efficitur per mixturam radiorum præterlabentium, generari. Sic, fi radios intercipias oftendentes Rubeum ad N, Rubedo T ac τ tolletur, ac Albedo X convertetur in Cæruleum. Vel, fi fiftas tum Rubeum ad N tum Purpureum ad M, & intermedios Flavum, Viridem, & Cæruleum præterlapfos mittas, ex eorum mifturâ Viriditas producetur ad X. Et fic prætermittendo quos velis, & fiftendo alios pro arbitratu, poffis experiri mixturas quaflibet; & explorare, qui color inde generabitur, modò pretium laboris experientiam illam judicaveris.

60. Verum, cum experimenti hujus dignitas videatur exigere, ut fummâ cum diligentiâ retegatur, & penitus explicetur, dum plura de coloribus fimul complectitur & exhibet, quàm in unicò tantùm experimento folent latere; non gravabor modum copiofiùs oftendere, quo radii mifcentur ad X; & nonnulla poftmodo, fcitu non indigna, patefacere. Itaque concipiantur tales Refractiones in Prifmate fieri, ut radii incidant in varios circulos ad lentem MN, qui varios gradus Refractionis patiuntur, prout explicui in præcedentibus; fitque PQRST (fig. 15.) oblonga imago, compofita ex præcedentibus circulis, & in lentem projecta; quorum circulorum extremi duo funto PQ Purpureus, & ST Rubeus. Porro fit *fFf* diameter foraminis, per quod lux in lentem trajicitur; cujus foraminis punctum aliquod, ut F, primò confideremus, à quo venientes radii dictos circulos, PQ, ST, totamque imaginem PT efformant: & præterea, cùm radii eundem quemlibet circulum efformantes fint homogenei, ponatur, quòd lens fit tali figurâ prædita, ut eos omnes ad eundem illum circulum, puta Rubeum ST, pertinentes, verfus punctum quoddam, Z, exactè refringat; quod fieri poffe per lentem convexis Hyperbolis terminatam, ut & per lentes aliter formatas, Cartefius in Dioptricâ & Geometriâ edocuit. Eft itaque Z focus radiorum FS, FT, & cæterorum uniformiter Rubeorum, & recta FZ ducta erit axis lentis. Præterea, cùm radii

Lucis Coloribus.

radii FP, FQ, cæterique conficientes alterum extremum circulum PQ, colorem Purpureum oftendant, & propterea magis refringantur quàm alteri tendentes ad ST; illi ideo emergent ad punctum quoddam aliquanto propinquius quàm Z, veluti ad Y; ut ii facilè percipient, qui norunt focos lentium effe tanto propinquiores fibi, quanto major eft earum vis refractiva. Liquet itaque radios, in coloribus & refractionibus abfimilibus, ad diverfos focos convergere. Sed, cùm eadem lens pluribus focis haud queat aptari, & ideo, cùm Z fupponatur focus in quem omnes radii ad circulum Rubeum ST pertinentes exactè conveniant, radii pertinentes ad alterum circulum, PQ, purpureum omnes in ejus focum Y exactè convenire nequeunt; attamen eorum concurfus juxta Y in axe tam proximè accuratus erit, ut quoad fenfum & experientiam omnem habeatur pro accurato.

61. Quinetiam, fi lens MN ponatur fphæricè convexa, ut neuter focorum Y vel Z ftrictè loquendo poffit effe accuratus; tamen, quantum ad præfentia fpectat, pro accuratis habere liceat. Itaque concipiendo, quòd radii manantes à PQ & ST convergant ad Y vel Z, & fibi decuffantes divergant itidem; patebit, quòd hi duo radiorum penicilli concurrent, & mifcebuntur in fpatio focis Y & Z intermedio, veluti ad *t*, modo lentis centrum R ponatur intermedium circulis PQ & ST. Ad eundem modum radii cæterorum generum convergent in alios focos ipfis Z & Y intermedios, ac tanto propinquiores ipfi Y, quanto major eft eorum paffio refractiva. Sic focus viridiformium radiorum cadet in medio fpatio, veluti ad X; radiique cæruliformes convenient citiùs inter X & Y, & flaviformes longinquius inter X & Z; ac cæteri colores intermedii in fpatiis intermediis, eorumque penicilli fefe decuffabunt ultra citraque locum *t*; ita tamen ut iftæ decuffationes fint eo denfiores, quanto fint ipfi *t* viciniores, & ut fpatium X*t* fit minimum, per quod omnes radii tranfeunt manantes ab eodem puncto F. Non diffimili modo radii venientes ab alio quovis puncto foraminis, ut *f*, fi fint rubriformes, convergent ad *z*; fin purpuriformes ad *y*; & ad intermedium aliquod punctum, fi fint intermedii generis, & eorum concurfus denfiffimus erit in loco medio, veluti *xl*. Atque adeo ex radiis, ab integro foramine *fFf* manantibus, foci minimè refrangibilium jacebunt in fuperficie

De Radiorum

yry lenti proximâ, & foci maximè refrangibilium jacebunt in aliâ superficie *zzz* à lente remotissimâ, focique mediocriter refrangibilium jacebunt in aliis intermediis superficiebus. Et sic omnes omnium radiorum foci totum spatium *yzzy*, à superficiebus istis integratum, occupabunt, & in eo præcipuè penicilli decussabunt, & commiscebuntur.

62. Jam ex hâc descriptione venit observandum, quòd si papyrus HI teneatur in medio dicti spatii *yzzy*, ut in eam radii terminentur, ubi est densissimus eorum concursus, & mistura ad Albedinem generandam perfectissima; radii viridiformes, tendentes ad focos in papyro sitos, in eam incident intra literas *xx*. Sed rubriformes venientes ab ST, ac tendentes ad focos in superficie *zzz* sitos ut dictum est, incident in papyrum intra literas *ll*, paulo vicinius ad I. Et pari modo purpuriformes incident in eundem locum *ll* dum tendunt à PQ ad focos sitos in superficie quâdam *yry* ad lentem proximâ. Cæteri autem radii cadent in alia spatia inter *xx* & *ll* mediocria, ipsisque *xx* tanto viciniora, quanto foci eorum minùs absint à papyro. Liquet itaque, quòd totum spatium *xxtl* non debet albescere, sed pars ejus tantùm media inter literas *x* & *l* interiores sita, ubi scilicet colores omnes commiscentur. Etenim in extremitate *x* versus H radii viridiformes cadunt soli, qui proinde tingent extremitatem istam cum Viriditate. Ad alteram autem extremitatem, versus I, nulla miscetur Viriditas, sed Purpura tantùm cum Rubore. Qui dicta perpendet, etiam facilè concipiet, quòd, cùm papyrus paululum transferatur ultra citraque, colores alii præter Viriditatem apparebunt ad extremitatem imaginis versus H. Sic videlicet inter P & *y* Purpureus apparebit extrinsecus; inter *y* & *x*, Cæruleus & Viridis ad *x*, deinde Flavus inter *x* & *z*, ac Rubeus denique ad *z*, & postea perpetuo. Ad adteram autem imaginis extremitatem, versus I sitam, Rubeus erit extimus à T usque ad *l*, ubi commiscetur Purpuræ: quæ quidem mixtura dat pallidum. At ultra *l*, Purpura semper conspicietur. Cæterùm, cùm distantia inter *y* & *z* valde parva sit, & multo magis distantia inter x & *t* sive *x* & *l*, hoc est, latitudo limbi colorati; propter summam ejus exilitatem, conspectui vix patebit, sed totum spatium *xxtl*, nisi acrius observanti, apparebit album.

63. Cùm hæc advertissem, experiebar deinde an responderent præconceptis; & licet malè successit primò, dum utebar angustâ lente; postea tamen, cùm adhibui lentem eâ de causâ latiorem, ut angulus XYt sive *xyl*, & inde *xl* sive X*t*, hoc est, latitudo dicti limbi colorati fieret major; quod optabam, evenit. Adhibeatur igitur lens, cujus latitudo, sive Apertura sit trium digitorum aut major eo, foci autem longinquitas pro lubitu pedum trium vel quatuor; tum ea collocetur ad distantiam sex vel octo pedum à foramine *fFf*, ut colores, PQRST, in eam prolapsi usque ad extremitates ejus extendantur, nullis tamen præterlabentibus. Deinde papyrus HI pone collocetur, & transferatur ultra citraque, & ad extremitatem imaginis, versus H, videbis omnes Prismatum colores à Purpurâ ad Rubedinem usque gradatim successivos. Sed ad alteras imaginis partes, versus I, inter Purpuram ad *z* & Rubedinem ad *y* conspicuam, neque Viriditas, neque alius quisquam ex intermediis coloribus apparebit, nisi fortè qui fiunt ex Rubeo & Purpureo mixti; quemadmodum ex eo cognoscas, quòd, cùm intercipis extremitatem Purpuræ, ope corporis opaci juxta lentem interpositi, ille limbus imaginis versus I fiet rubeus; sin extremitas Rubedinis ad T intercipiatur, limbus idem fiet Purpureus. Et hinc est, quòd transitus à Purpurâ ad Rubedinem, ex hac parte imaginis, fiet multo celerior quàm ex alterâ versus H, ubi colores Refractionibus absimiles omnes interveniunt. Cæterùm, cùm dictorum colorum latitudo tam exigua sit (scilicet haud major centesimâ parte digiti, ut nisi vitra sint benè polita, & à venis libera, & insuper experientis diligentia & curiositas solito major, fortè excidet proposito) Quamobrem in majorem evidentiam rei & experiendi copiam, addo, quòd, si Microscopium sumas, atque ita disponas, ut papyrum aliquam affixam laminæ, super quàm Objecta collocantur contemplanda, distinctè amplificet; dein ita statuas, ut imago lucida *xxtl* incidat in istam papyrum, colores in ejus limbo, sic ampliatos, videbis sat manifestos.

Lucis Coloribus.

EXPER. XI.

64. Verùm, cùm mistura radiorum, quoad colores dissimilium, non sit adeo perfecta in hoc specimine, quin ut è coloribus aliqui in extremitate albedinis appareant (licet tam exigui, ut in-

De Radiorum

cautus fortè non advertat); placet insuper obſervare, quòd ſi vice lentis refractoriæ ſpeculum concavum, accuratè formatum & perpolitum, adhibeas, dicta miſtura fiet omnibus numeris perfecta. Etenim irregularitas illa, quâ refractiones ita perturbantur, in reflectionibus nulla eſt; ſed radii quoſcunque colores depingentes, & utcunque refrangibiles, ad eoſdem tamen angulos reflectuntur, in quibus incidunt. Quamobrem, ſi MN (fig. 16) ſit Speculum Ellipticum, cujus foci ſint F & X; radii omnes à puncto F manantes, cujuſcunque ſint generis, ſive Purpuram ad P, ſive Rubedinem ad T, ſive alios alibi quoſcunque colores ad Speculum exhibentes, omnes accuratè conveniunt in eodem puncto X. Quinimo, licet Speculum MN non ſit ex Ellipticâ figurâ ſegmentum, ſed è Sphæricâ, modo ſemidiameter ſphæræ, hoc eſt diſtantia ejus à focis prædictis F & X ſatis magna ſit, puta trium pluriumve pedum, & diſtantia focorum valdè parva, puta non plus quàm unius digiti: ſi hæc inquam ponantur, radii ab F manantes adeo propemodum convenient in X, ut iſtud X quoad ſenſum pro exacto foco habeatur: & eodem modo radii manantes ab aliis punctis, ut *f*, ipſi F vicinis, in aliis, ut *x*, ipſi X vicinis quàm proximè convenient. Et ſic omnes omnino colores reflectuntur à ſpeculo PT in unumquodque punctum imaginis *xXx*, totamque exhibebunt albam.

65. Sunt & alii modi componendi Albedinem; quemadmodum, ſi vice lentis ſpeculive, duo Priſmata, ILM & KMN (fig. 17.) in ſitu ad conſimile Priſma ABC parallelo, ad diſtantiam aliquot pedum juxta poſita adhibeantur; quæ radios in contrarias partes refringant, faciantque verſus X convergere, quos Priſma ABC divergentes effecerat. Colores ad X congregati component Albedinem, ac poſt decuſſationem ſub propriis (ut antea) formis ad πτ denuo apparebunt.

66. Opportuna hìc alia ſubit aſſertionis demonſtratio, quòd colores in concurſu non deſtruuntur ad Albedinem efficiendam, ſed commiſcentur tantùm: utpote rotam, dentibus undique in perimetro conſitam, ita colloca juxta duo priſmata ILM & KMN, vel juxta lentem MN in præcedenti experimento, ut è coloribus aliqui in dentem aliquem impingent, dum cæteri per intervallum inter illum & proximum dentem præterlabantur, & in chartam ad

Lucis Coloribus.

ad præfatum colorum concurſum, X, excipiatur. Tum rotam imprimis lentè circumvolve, & videbis ſingulos colores in chartam, ſine aliquâ albedinis apparitione, ſucceſſivè procedere; poſtea, ſi rotam tam celeri motu circumagi facias, ut ſuccenturiantes colores, propter velocitatem conſecutionis, ab invicem diſtingui nequeant, tranſmigrabunt in Albedinem, eamque quoad ſenſum homogeneam; ſine aliquâ colorum apparitione, ex quibus, celerrimè ſe mutuò conſequentibus Albedo illa efficitur: & hanc Albedinem, è coloribus illis ſucceſſivè commiſtis componi per ſe manifeſtum eſt.

67. Quinetiam Albedo non tantùm ad locum concurſûs, X, è commiſtis coloribus componitur, ſed etiam ad foramen *fFf*, ubi lux modò tranſiit Priſma & colores nondum apparuêre; quandoquidem omnes radii, quibuſcunque coloribus affecti, qui ad punctum quodvis imaginis *xXx* convergunt, ab alio quodam puncto foraminis *fFf* manârunt, & ſic iidem radii ad utrumque ſpatium *fFf* & *xXx* miſcentur, & utriuſque albedinis eadem eſt compoſitio.

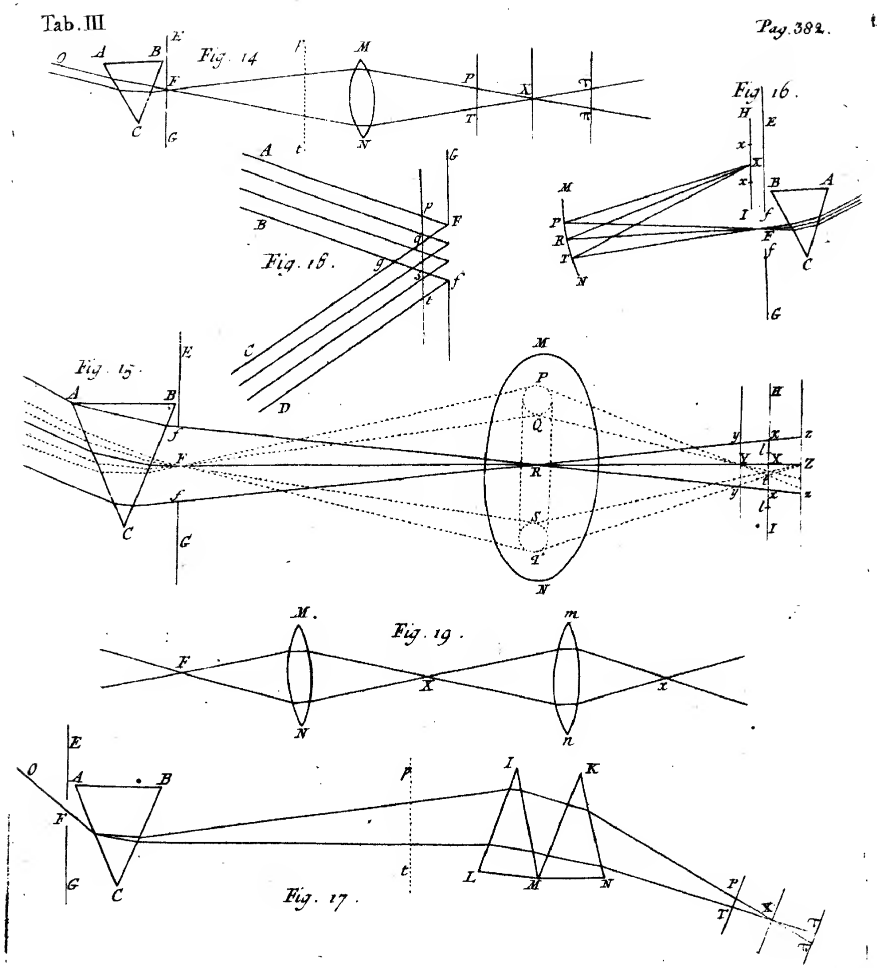
68. At hæc clariora fient obſervando primò, quòd rei alicujus utcunque figuratæ, & applicatæ ad foramen *fFf*, umbra diſtinctè projicitur in papyrum radios excipientem ad X. Quinimo bullularum Aeris in priſmate latentium (ſicut vitris omnibus contingere ſolet) umbras videre licet, ad inſtar macularum in dictam papyrum projectas: id quod nullo pacto contingere potuiſſet, niſi radii manantes ab aliquot punctis ipſius *fFf*, in totidem punctis rurſus convenirent ad *xXx*. Et licet non exactè conveniant in iiſdem punctis manantes ab iiſdem, cùm lens refractaria vice ſpeculi adhibetur ut in figuris 14 & 15, & proinde colores nonnullos generent in confinio lucis & umbræ, ſicut fuſè explicui; tamen ſpatium, in quod conveniunt, tantillum eſt, ut pro puncto ſenſibili fermè habeatur.

69. Secundo, ſi lentem in figurâ 14 ita ſtatuas, ut æquidiſtet à focis ejus F & X in medio poſita, ac deinde colores excipias in papyrum PT, tum ultra lentem verſus X, tum citra verſus F alternis temporibus admotam; poſſis obſervare, quòd colores eodem plane modo apparent, diminuuntur, & in Albedinem paulatim convertuntur, dum dicta papyrus motu lento & continuo transfertur ad F, atque dum transfertur ad X; adeo ut divergentia colorum

rum ab F & convergentia ad X omnino ſimilis ſit. Pari ratione, ſi papyrus πτ lentè moveatur ad X, juxta & *pt* moveatur ad F, iidem colores conſpicientur in utrâque, & eodem modo deſinent in Albedinem; hoc tantùm excepto, quòd eorum ſitus contrariatur propter decuſſationem radiorum in X; atque adeo divergentia colorum ab utriſque, F & X, ſimilis eſt. Quid itaque concludendum eſt exinde, quàm quòd eodem modo commiſcentur, & ad F, antequam divaricaverunt ab invicem, & ad X, ubi rurſus congregantur in Albedinem? Sed, ut comparatio modò facta evadat illuſtrior, venit obſervandum porro, quòd cùm papyrus ſtatuitur ipſi F contigua, & amovetur deinde verſus *pt*, & poſtea ſtatuitur ad X, & amovetur verſus πτ; quòd inquam Albedo ad F & X, in utroque caſu, primò degenerabit in colores ſecundum extremitates ejus, dum in meditullio manet alba; cujus rei ratio non eſt alia, quàm quòd radii divergentes perinde ſegregantur in confinio lucis & umbræ. Sic, poſito quòd radii divergant à ſpatio F*f* (fig. 18.) alii quidem paralleli tendentes ad AB, atque alii ad priores inclinati ſed inter ſe paralleli tendentes ad CD; prima ſegregatio fiet in extremitatibus juxta lineas FA & *f*D, ultimaque in medio veluti ad *g*: nam in lineâ *pt*, inter F*f* & *g* ductâ, videre eſt, quòd paralleli juxta extremitates *pq* & *st* ab invicem ſegregantur, ſed maxtim tranſeunt per intermedium ſpatium *qs*.

70. Tertio, ſicut lens MN in fig. 14. refringendo radios divergentes ab F, facit ut convergant ad X & ibi conficiant Albedinem; eodem modo, ſi iſti radii, poſtquam decuſſavêre, divergentes ab X iterum trajiciantur per aliam lentem *mn* (fig. 19.) priori ſimilem, & ſimiliter poſitam inter focos ejus X & *x*, id eſt æquali ab utriſque diſtantia; colores, ſic ad *x* ſecundâ vice congregati, Albedinem rurſus component, ſicut antè compoſuerant ad X; hoc tantùm interpoſito diſcrimine, quòd apparebunt in limbo Albedinis ad *x* duplo latioris, quàm (è mox oſtenſis) apparent ad X, atque inſuper in ſitu contrario. At ſpeculis, ut dictum eſt, adhibitis, quæ lucem aliquoties repercutiant, iſti colores erunt nulli; atque adeo penicilli FX & X*x* evadent omnino ſimiles, & ſimilis fiet decuſſatio & commixtura radiorum ad F, X & *x*. Concludendum eſt itaque, quòd Lux, cùm modò trajicitur per Priſma, licet Albedinem exhibeat, tamen conſtat ex radiis heterogeneis confusè

mixtis,



mixtis, & ab invicem per divergentiam mox discessuris; qui postquam ita segregantur, propriis apparent formis; sin iterum congregantur, Albedinem rursus componunt, & sic præterea in infinitum. LUCIS COLORIBUS.

EXPER. XII.

71. Imo verò Lux non solùm componitur ex omnium colorum radiis, ut egreditur prismate, & nondum discernitur in colores istos; sed etiam cùm nondum attigit Prisma, & antecedenter ad omnem refractionem: & inde non mirum est, quòd, cùm segregantur in colores, virtute prismatis radios inæqualiter refringentis, & colores iterum commiſcentur ope lentis, aut alio quovis modo præmonstrato; quòd inquam rursus componunt Albedinem: neque hoc solùm exinde confirmatur, quòd lux è coloribus composita primigeniæ luci persimilis sit; sed etiam ex eo, quòd radii penitus differunt Refrangibilitate, & conceptus non est durior, quòd differunt coloribus: imo cùm eidem refrangibilitatis gradui color idem perpetuò competat (ut Purpureus maximè refrangibilibus, Rubeus minimè refrangibilibus, & sic porro); quid aliud ab istâ cognatione innuitur, quàm quòd sint congenita, & fortassè quod à communi quâdam causâ dependent? Sed in hujus rei majorem evidentiam ostendam præterea, quòd radiorum Solis æqualiter incidentium quædam genera reflecti possunt, dum alia per reflectentem superficiem trajiciuntur; adeoque diversos colores diversis radiis, ante omnem refractionem, inesse. Sit ABC (fig. 20.) Prisma, quòd excipit radios, in obscurum cubiculum per foramen F, uno digito latum, trajectos, eosque refringit ad papyrum vel parietem, HI, iis obsistentem apud T: porro autem, cùm superficies prismatis BC non omnes refringat radios versus T, sed & plurimos reflectat; eos apud P siste etiam cum aliâ papyro KL, in morem albæ imaginis, foramini F persimili, terminante. Deinde converte Prisma circa axem ejus secundum ordinem literarum ABCA, & videbis tum amplitudinem colorum ad T, tum quantitatem lucis ad P augeri perpetuò; donec tandem, cùm Refractio ad planum BC fit maximè obliqua, colores ad T incipient evanescere, & reflecti ad P; Purpureus primò, deinde Cæruleus, Viridis & Flavus, & denique Ruber, cujus quidem lucis accessu

imago

De Radiorum

imago P fiet multo lucidior quàm antea. Interea verò, dum colores ad T gradatim evanefcunt, videbis Albedinem ad P paululum mutari, & nonnihil vergere ad Cæruleum, per acceffum nempe Purpurei & Cærulei, qui primò reflectuntur; id quod nullo modo accidiffe potuiffet, nifi radiis, prout à Sole veniunt, difcrimen ineffe concedatur: fcilicet quòd ex iis quidam, ad efficiendos Rubeum & Flavum difpofiti, pertinaciùs, & cum minore Refractione, penetrant fuperficiem BC, & verfus T perlabuntur; dum alii, ad exhibendum Purpureum & Cæruleum parati, fuperficiem dictam aut penetrant languidiùs, majores refractiones patientes; aut, fi nequeant penetrare propter nimiam eorum obliquitatem, tum faciliùs & citiùs reflectuntur ad P, iis primò omnium reflexis, quorum potentia ad iftam fuperficiem penetrandam fit minima; id eft purpuriformibus & cæteris deinde fuo ordine, prout incidentia fit magis obliqua; donec rubriformes ultimò reflectantur, obliquitate tantâ & debilitati, ut non fint ampliùs potentes dictæ fuperficiei refiftentiam fuperare. Atque hæc facilè conftabunt iis, qui nôrunt, quòd quo major eft vis refractiva fuperficiei cujufvis, eo citiùs & ad minorem obliquitatem radii reflectuntur; & quo minor, eo magis obliqui penetrabunt.

72. De hoc autem experimento convenit obfervare, primò quòd, cùm prædicta variatio Albedinis ad P fit admodum parva, propter exuberantiam lucis albæ collatæ ad reflexum Cæruleum, itaque cavendum eft, ne prifmate utaris, quod ex vitro conflatur tincto cum colore aliquo; ne lucem ad P reflexam ita tingat, ut difficile fit dictam variationem obfervare; præftat adhibere prifma ex laminis vitreis tenuibus & perpolitis confectum, & aquâ limpidiffimâ repletum.

73. Secundo, licet mutatio dicta fit parva, tamen fatis eft ad oftendendum, quòd radii retinent eofdem colores cùm reflectuntur, quos exhibent, cùm trajiciuntur per fuperficiem BC; fiquidem tingunt Albedinem P colore fuo, quantum liceat tam paucis tingere. Colores itaque fuos habuêre prius, & eofdem retinent, five refringantur, five reflectantur; licet in mixturis plerumque celati lateant, donec eruantur (non autem fiunt) virtute prifmatum.

74. Tertio,

Lucis Coloribus.

74. Tertio, ex luce ad priorem fpeciem Albedinis, per reflexionem omnium colorum à T, reftitutâ, quid aliud denotatur, quàm Albedinem iftam per mifturam omnium colorum reproduci? Scilicet, cùm Rubor ultimò reflexus admifcetur cæteris coloribus antea reflexis, reflexorum colorum miftura tunc perfecta eft ad Albedinem componendam, quæ fuperadditur albedini prius exiftenti in P.

75. Quarto, ne qua oriatur fufpicio, quòd refractiones in fuperficiebus AC & AB, ad ingreffum radiorum in Prifma & egreffum factæ, poffint aliquid conducere ad effectus hofce producendos; obfervare licet, quòd effectus iidem producuntur, cujufcunque licet magnitudinis ftatuatur angulus ABC; hoc eft, quæcunque fit refractio fuperficiei AC; modò angulus ABC ponatur ejufdem effe magnitudinis atque angulus ACB; aliâs enim pro imagine albâ ad P generabuntur colores. Experimentum itaque nullatenus dependet à refractionibus fuperficierum AC & AB; imo poffis efficere, quòd, cùm colores partim reflectuntur ad P, & partim trajiciuntur ad T, radii perpendiculariter incidant in AC, emergantque ex AB, & fic neutrâ fuperficie refringantur, modò ftatuas angulum ABC, ut & ACB, effe grad. 40. circiter, & iidem tamen effectus producentur.

EXPER. XV.

76. Cæterùm in majorem evidentiam & explicationem modi, quo prædicta fiunt, liceat experiri per lucem in colores difcretam, quòd Purpureus primò, & cæteri deinde (quifque fuo ordine) reflectuntur. Etenim (in fig. 21.) fint ABC & *abc* duo Prifmata parallela, quorum alterum ABC projiciat colores in alterum *abc* ad diftantiam duodecim vel plurium pedum. Tum Prifmate *abc* circa axem ejus fecundum ordinem literarum *abca* converfo, donec tanta fit obliquitas radiorum in fuperficiem *bc* incidentium, ut incipiant ad *p* reflecti, non amplius potentes penetrare ad *t*; videbis omnes purpuriformes primò omnium reflecti, cæterofque deinde fuo ordine.

77. Veruntamen quia purpuriformes radii paulo magis refringantur in primo Prifmate, ABC, & ideo magis inclinentur ad fuperficiem *bc* fecundi Prifmatis, *abc*, quàm cæteri; poterit objici,

 quòd

De Radiorum quòd eâ de causâ primò omnium reflectuntur. Quamobrem (in fig. 22.) duo prismata statuantur non parallela sibi invicem, sed in situ transverso; ut omnicolores radii quasi ad eosdem angulos incidant in præfatam superficiem *bc*; quo posito, possis observare, convertendo prisma *abc* circa axem ejus secundum ordinem literarum *abca*, quòd radii purpuriformes primò omnium reflectuntur, & ultimò rubriformes, coloribus ad *p* continuò translatis, prout à *t* dispareant.

Exper. XVI.

78. Sunt & alii præterea modi, quibus experiri liceat, quòd ex radiis similiter incidentibus quædam genera penitus reflecti possunt, dum alia partim transmittantur. Quemadmodum si EFG (fig. 23.) sit operculum fenestræ ad F tenebratum, & foras statuatur Prisma ABC, quod lucem Solis, foramen F ingressuram, intercipiat, & refringat versus *f*; ad illud *f*, pedibus ab F duodecim aut longius postpositum, statuatur opacum corpus *efg*; quod lucem sistat, dempto parvo foramine *f*, per quod aliqua pars lucis, nempe Violacea, longiùs trajiciatur ad *y*. Istud autem *f* non sit semisse digiti latius. Deinde præ manibus sumatur aliud Prisma *abc*, & ad radios transversè positum statuatur, à posticâ parte foraminis *f*, circaque axem ejus convertatur, donec videas lucem Violaceam, postquam ab ejus basi *bc* obliquissimè refracta fuerit versus *t*, totam à *t* disparuisse modò, & ad *p* reflecti. Luce Violaceâ tam obliquè ad *p* reflexâ ut ad *t* statim pervasura esset, modò ex angulari motu Prismatis, secundum ordinem literarum *abca* facto, angulus *cyf* vel minimum augeretur; prisma istud *abc* in eo statu figatur. Tum alterum prisma, ABC, motu circa axem ejus nunc hâc nunc illâc parùm convertatur, ut colores, quos projicit in obstaculum *eg*, paululum attollantur; eoque pacto omnes successivè transmittantur per foramen *f* in posterius prisma *abc*: & videbis, quòd, cùm Flavedo transmittitur ad *y*, illi radii non omnes ad *p* reflectentur, sed plurimi perrumpent superficiem *bc*, & ad *t* pertingent; et cùm Rubor ad *y* transmittitur, illi radii fortiùs adhuc perrumpent, ut ex copiâ perrumpentis lucis & minori ejus refractione constet. Neque mirum videatur, quòd purpuriformes radii sint minùs potentes penetrare superficiem *bc*, quàm

quàm rubriformes; quandoquidem Prismatibus eodem modo dispositis antehàc ostendi, quòd majorem refractionem patientur, posito scilicet angulo *cyf* tanto, ut omnigeni radii possint superficiem *bc* penetrare. Jam, cùm radii, qui citiùs & faciliùs reflectuntur in experimento ad fig. 20. tradito (P), nempe purpuriformes, etiam citiùs & faciliùs reflectantur in experimentis duobus novissimè recitatis; cùm eadem iisdem radiis semper eveniant, liquet quòd hoc fit non ex contingentiâ, sed ex prædispositione radiorum; & quòd antecedenter ad omnem reflectionem aut refractionem, quidam ad exhibendos quosdam colores sunt apti, & faciliùs reflexibiles, alii verò aliis coloribus & progrediendi viribus afficiuntur. Neque aliud experimentis jam recitatis discrimen interesse videtur, quàm quòd in primo radii omnium formarum, prout à Sole adveniunt, confusè mixti incidant in prisma, quod rubriformes transmittit & reflectit cæruliformes: in reliquis autem duobus experimentis, dissimiles radii priùs discernuntur ab invicem, quàm incidant in dictum prisma.

Lucis Coloribus.

Exper. XVII.

79. Ad hæc lubet aliud adducere modum, quo dissimilitudo radiorum, in luce Solis mixtorum, innotescat, non multo dissimilem ei ad fig. 20. ostenso, sed conspectui jucundiorem & æquè scientificum. In fig. 24. sunto A*a*B*bc* & B*b*D*d*c duo Prismata, ita juxta se posita & colligata, ut duo ex eorum planis CB*b* conveniant sibi & coincidant; excepto tantùm quod nonnihil aëris, in morem tenuissimæ laminæ, intercedat iis; id quod eveniet ultrò, siquidem haud queas prismata tam arctè constringere, quin tantum intercedet aëris, quantum proposito sufficiet. Porro in majorem rei evidentiam convenit, ut anguli ACB & CBD sint æquales proximè; eò ut plana A*a*c & B*bd*D fiant parallela, licet hoc non sit omninò necessarium. His præmissis, statuantur dicta prismata juxta foramen F; ut lux ingressa per ea trajiciatur versus 7, primò permeans superficiem A*a*c, deinde intermediam superficiem B*b*c, & inde per B*bd*D prolapsa in papyrum ad 7 collocatam, quam Albedine tingit, tanquam si non omnino transiret prismata, sed vitrum parallelis planis, A*a*c & B*bd*D, terminatum. Præterea, cùm intermedia superficies B*b*c lucem ei incidentem non omnem

(P) Id est, decimo quarto.

transmittat ad τ, sed multam reflectat, quæ aliquò exibit è prismate ABC per superficiem ejus *a*A*B**b*, puta versus ϖ: ad illud ϖ statuatur alia papyrus, quæ lucem hanc similiter albicantem terminet. Quod ubi feceris, converte Prisma quadrangulare (ex duobus triangularibus colligatis confectum) motu lento circa axem ejus secundum ordinem literarum ABDCA; tandemque videbis, quòd albedo ad ϖ ac τ degenerabit in colores, Flavedine primò, deinde Rubedine ad τ conspectâ, Cæruleo autem colore ad ϖ; donec, post intentissimam Rubedinem ad τ, color & lux omnis evanescat inde, & Cæruleus ad ϖ iterum tranformetur in Albedinem aliquanto lucidiorem quàm antea. Utpote dum Prismata circa communem axem, ut dictum est, convertantur, radiorum, in mediam superficiem B*b**c* (hoc est in laminam aëris prismatibus interjectam) prolapsorum, incidentia continuò fit obliquior; donec tanta sit eorum obliquitas, ut nequeant ampliùs penetrare dictam laminam, progredique ad τ, sed abinde reflectantur ad π: quod accidet, cùm angulus F*e**c* (obliquitas incidentium) fit graduum ferè quinquaginta. Radii autem purpuriformes, minimè omnium potentes penetrare dictam laminam aëream, reflectentur primò, & Albedinem, priùs reflexam ad ϖ, nonnihil tingent eorum colore; dum ex radiis præterlabentibus ad τ Flavedo imperfecta, aut potius color inter Flavum & Viridem mediocris, componitur. Postea Cæruleus, & Viridis deinde reflexus, paulo magis tinget lucem in ϖ cum colore Cæruleo (licet admodum diluto propter exuberantiam Albedinis commixtæ) manebitque Rubor in τ, qui mox, per Flavedinis, hactenus commixtæ, reflectionem, fiet intensior, donec ipse etiam denuo reflexus Albedinem in ϖ redintegret.

80. Cæterùm ut hoc specimen evadat illustratius, sumatur aliud Prisma GHI, quod à posticâ parte prismatum ABCD ita collocetur, ut lucem *o**e*τ, per ea transmissam, refringat versus PT, & in colores permutet; Violaceo in P, Rubeo in T, cæterisque in intermedia loca projectis. Tum Prismata colligata circa communem axem (ut priùs) rotentur, donec lux alba versus τ transmissa incipiat flavescere; & videbis, quòd color purpureus in P simul evanescet. Id quod arguit purpuriformes radios non amplius ad prisma

prisma GHI pertingere, sed à superficie CB*b* primò omnium ad ϖ reflecti; & lucem *e*τ ideo flavescere, quòd Purpura è misturâ tollitur, quâ priùs Albedinem exhibuit. Ad eundem modum, si prismata ABCD diutiùs rotentur, videbis reliquos colores ad P ad T successivè disparere, prout lux *e*τ plus plusque rubescit; & cùm fit ruberrima, tum solam rubedinem in τ manere: quòd manifesto convincit hanc lucem *e*τ non aliunde rubescere, quàm quòd à radiis aliorum colorum, per superficiem CB*b* reflexis, secernitur.

81. Simili ratione, si cum prismate quarto, KLM, refringas radios ad ϖ reflexos, & colores eo pacto productos, & in album parietem projectos, duodecim pedes aut longius distantem, animadvertas; videbis, quòd, cùm lux *e*τ incipit viridè flavescere, purpura *p*, quam prisma hoc elicit è luce *e*ϖ, plusquam cæteri colores augebitur; per accessum nempe purpuræ, quæ tum in P disparuit; cæterisque deinde coloribus in *pt* gradatim fiet accessus prout à PT disparent; donec, cùm omnis color à PT disparuit, colores ad *pt* non ampliùs augeantur; hoc autem discrimine, quòd Violaceus & Cæruleus ad *pt* augmentum suum omne paulo citiùs obtinent, quàm Rubeus aut Flavus: sed hoc tam exile est, ut observator, nisi sit attentus, ægrè advertat.

EXPER. XVIII.

82. Ut istis denique finem imponamus, lubet alium adducere modum, quo quædam genera radiorum, luce Solis intermista, partim transmitti possint, dum alia reflectuntur. Nempe si duas laminas vitreas CB (fig. 25.) planè perpolitas, & ad invicem applicatas, secundum planitiem earum connectas, easque vasi RQ aquæ pleno immergas, extremitate superficierum juxta positarum undique cerâ vel pice priùs obturatâ, ut aqua non interrepat & expellat aërem, qui more laminæ tenuissimæ, ut dictum est, interjacebit vitris; si hæc inquam fiant, possis efficere dictorum vitrorum talem esse situm, ut (illucente Sole) aër interjectus cæruliformes radios reflectat versus *p*, & transmittat rubriformes versus *t*, atque alias omnes apparentias modò recensitas exhibeat.

83. Cæterum de hisce modis experiendi notandum venit, primò, quòd Colores hîc producuntur à parallelis superficiebus, quarum aliquæ recurvant radios, quantum aliæ incurvant; atque adeo

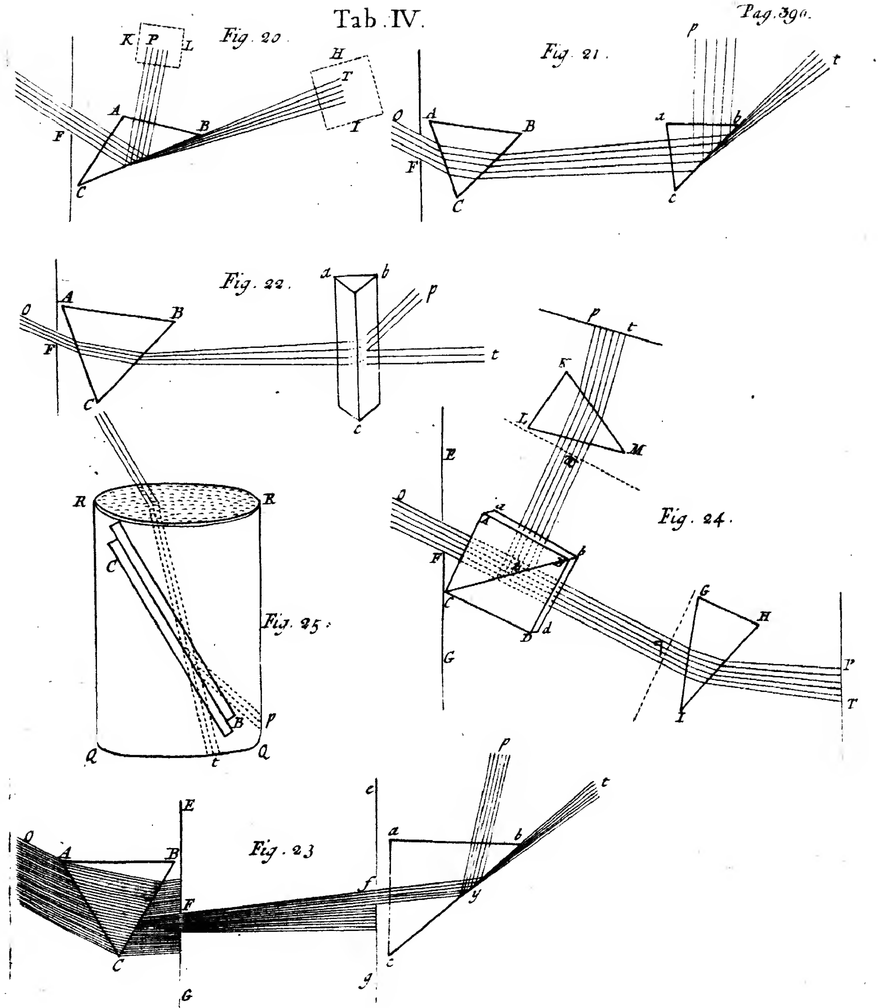
De Radiorum

adeo quæ mutuos effectus destruerent, si quos in immutandis intrinsecis dispositionibus radiorum, quoad eorum colores, ut opinantur Philosophi, producerent. Deinde quòd Lux postquam per istas superficies trajiciatur, licet Alba sit, manifestò tamen constet ex heterogeneis radiis; quandoquidem eorum aliqua genera penitus reflecti possunt ad p, dum alia ad t partim trajiciantur. Et eâdem ratione constat reflexam Albedinem similiter compositam esse, siquidem (ut dixi) redintegrata est, cùm Rubor omnium ultimus reflectitur à t; & hæc ex eo etiamnum summè confirmantur, quòd à solâ vitrorum obliquitate, sine aliquâ Refractionis vel Reflectionis novâ modificatione, efficiuntur.

84. Lux itaque, quamvis uniformis esset, quæ à Sole immediatè profluit, postquam tamen unquam reflexa vel refracta fuit, constat ex heterogeneis radiis. Et ejusmodi est ea lux omnis, quæ per vitreas fenestras trajicitur, vel quam Planetæ, Nubes, &c. ad nos reflectunt. Imo Lux omnis, à Sole aut lucernis quibusvis derivata: siquidem aliqualem saltem refractionem ab Atmosphærâ (ut dicunt Astronomi) patitur; ut taceam, quæ in Objectis, denuoque in oculi tunicis, ante visionis actionem impressam, fiunt. Jam, si nihil aliud ostenderam, fuisset aliquod prodiisse tenus; siquidem omnia Visibilium phænomena nobis per ejusmodi lucem exhibentur. Atqui, cùm Solis lux immediatè albere censeatur, & ille color non sit ex Primitivis, sed per misturam generari ostendatur; &, cùm nullum inter lucem originalem & illam, quæ à diversicoloribus radiis componitur, sensibile discrimen intercedat; haud dubitandum est, quin utraque sit ejusdem naturæ. Imo verò certissimum est; siquidem (in Prop. II.) ostenditur, quòd inhærentes dispositiones, vel Formæ radiorum, quibus apti sunt ad proprios colores exhibendos, nec destrui possunt, nec ullo modo vi secundariæ Refractionis mutari. Et par est ratio de Refractione primariâ. Concludendum est itaque, quòd istæ dispositiones sunt insitæ radiis ab eorum origine, quamvis proprios colores, antequam heterogenei ab invicem virtute Refractionis secernantur, exhibere nequeant.

85. Cæterùm de eo quod dixi lucis colorem Album esse, & tamen Sol aliquantulum flavêscere videtur; notandum est, quòd cæruliformes radii ab Atmosphærâ præ cæteris conturbantur (ut

cæruleus



cæruleus ejus color innuit) & inde quòd è directis solaribus radiis flaviformes prævalere solent; & efficere, ut Sol flavescat, qui secus fortasse appareret albus. Et ad hunc effectum atmosphæra circa Solem forte conglobata potest etiam conducere. At non eo inficias, quin aliquod radiorum genus in originali luce sæpissimè redundet, quandoquidem flammarum & siderum diversi sunt colores. Lucis Coloribus.

86. De Lucis & Albedinis compositione hæc satis. Quòd autem Nigredo ex omnibus coloribus similiter composita sit, & in solo lucis defectu ab Albedine differat, ex eo manifestum est, quòd nigrorum, in radiis solaribus intra cubiculum (aliàs obtenebratum) intromissis positorum, termini omnigenis coloribus tincti apparent, si prismate juxta oculum interposito inspiciantur; quòd singulos prismatis colores, seorsim incidentes, pari intentione reflectant, idque longè debiliori quàm alba corpora; & quòd alba defectu lucis nigrescere videntur, ita ut corpus, quod reverà album est, in debiliori luce nigrius apparere possit.

87. Denique de Cinereis cæterisque non Primitivis coloribus Propositio manifesta est; siquidem Cinereos ex Albo & Nigro, cæterosque omnes ex Rubro, Flavo, & Cæruleo componere nôrunt Pictores.

PROP. IV.

Primitivi colores per compositionem colorum sibimet utrinque confinium exhiberi possunt.

88. Hoc variis modis (perinde ut in Albedinis compositione, sistendo aliquos è coloribus antequam compositionem ingrediantur) tentari potest; & ipse aliquos expertus sum, quibus constitit Luteum à Croceo & subflavo, Porraceum à subflavo & Thalassino (vel etiam minus perfectè à Luteo & Cyaneo) & Cyaneum à Thalassino & Indico, aliosque omnes colores à coloribus hinc & inde conterminis componi posse. Quinetiam Indicus cum Rubei extremitate contemperatus purpurascebat; & Minius cum extremâ Purpurâ paululum conspersus Coccineus evasit; tanquam si inter colorum extremitates intercederet affinitas, qualis est in sonis inter Octavæ terminos.

89. Iidem

De Radiorum

89. Iidem colores à coloratis Pulveribus componi possunt, sed minus perfectè ut opinor; propterea quòd ipsi componentes ex aliis coloribus, quorum aliqui sunt dissimiliores, componuntur.

90. Cæterùm, ne nimius hîc sim, breviter dicam, quo pacto Prismatici Colores, in hos effectus producendos, optimè misceri possunt. Nempe Prisma GDE (fig. 26.) ex pellucidissimis & perpolitis lamellis vitreis, in vasculum aquæ plenum coaptatis, efficiatur; quo radiorum, in colores per divergentiam discretorum, duo quælibet genera, juxta diversos angulos, D & E, sat acutos & æquales transmissa, ad invicem versus H cogantur.

PROP. V.

Corporum naturalium Colores è genere Radiorum derivantur, quos maximè reflectunt.

91. Hoc è præmonstratis tantâ necessitate & evidentiâ consequitur, ut supervacaneum esse videatur, me aliquid de industriâ hîc in probationem ejus moliri. Utpote cùm ostensum sit, quòd nullius generis uniformium radiorum color, per reflectionem à corpore Physico mutari possit, sed unumquodque colore radiorum tinctum appareret, quibuscum illuminatur. Si corpus, cujuscunque subdialis coloris, à Solis rubriformibus radiis in tenebroso cubiculo illuminetur, rubescit; si flaviformibus illuminetur, flavescit; si viridiformibus, virescit; & sic præterea.

92. Sed in hujus rei majorem evidentiam observandum est insuper, quòd unumquodque corpus proprium colorem præ cæteris, seorsim incidentibus, copiosè reflectit. Sic Cinnabaris in luce Rubeâ maximè resplendet, in Virid: minùs, & adhuc minùs in Cæruleâ. Sic Indicum in Violaceâ & Cæruleâ luce maximè resplendet, & splendor ejus gradatim deminuitur, prout in Rubeam lucem per gradus intermedios continuò transfertur. Sic Porrus lucem Viridem plus quàm Rubeam aut Purpuream reflectere conspicitur, & sic in aliis. Et quo corpora sub dio sunt intensiorum & magis specificorum colorum, eo minùs in alienâ luce resplendent.

93. Quamobrem, ut hæc faciliùs & magis cum evidentiâ pertentes, corpora seligere oportet intensis coloribus, & quàm poteris maximè

Lucis Coloribus.

maximè simplicibus prædita; id quod cognosces, si, prismate adhibito, seligas, quæ ad extremitates, nigredini conterminas, distinctiora apparent, & minùs variegata. Præterea colores Prismatum, quos in hæc corpora projicis, debent esse ab invicem per plures refractiones optimè discreti. Nam, si colores per unici tantùm Prismatis, juxta lucis ingressum positi, refractionem secernantur, non color lucis incidentis, sed alius quidem, inter corporis, in aprico conspecti, & lucis hujus incidentis colorem intermedius generabitur. Quemadmodum, si hujusmodi lux Flava in Cæruleum corpus incidat, corpus illud non flavescet, sed virebit potius: propterea quòd plures è viridiformibus radiis, in hâc flavâ luce latitantibus, quàm è flaviformibus reflectere aptum sit; & sic Rubeum corpus in Viridi luce flavescere potest, & in Cæruleâ luce virescere, si modò lux illa ab aliis commistis coloribus non bene purgetur. Et ob hanc causam summè cavendum est in faciendis hisce experimentis, ut cubiculum fiat obscurissimum, ne lux erratica cum Prismatico colore commisceatur.

94. Denique, quo coloris cujusvis, à corporibus sub dio diversè coloratis reflexi, quantitas innotescat meliùs, corpora illa in eâdem lucis quâlibet specie, juxta posita, confer; & videbis unumquodque in luce proprii coloris præ cæteris resplendere. Sic Indicum in Cæruleâ vel Purpureâ luce plus quàm Cinnabaris resplendet, & Minius in Rubeâ. Aut si fortè (propter alterutrius coloris imperfectionem & obscuritatem) ambo æqualiter in luce Violaceâ resplendere contingat, tum in Rubeâ luce Cinnabaris fiet longè illustrior, aut contrà longè debilior in luce Violaceâ, si æqualiter resplendeant in Rubeâ. Cinnabaris itaque plures è rubriformibus quàm aliis quibuslibet radiis reflectit, & proinde rubet. Indicum verò plures è cæruliformibus & purpuriformibus reflectit, & proinde fit intermedii coloris. Et ad eundem modum si in Albis corporibus fiat experimentum, constabit, quod omnigenos reflectant æqualiter, & sic in aliis.

95. Antequam huic de coloribus physicorum corporum Propositioni finem impono, placet annotare de quibusdam apparentiis, quantâ necessitate consequuntur è nostris principiis, quæ aliàs miræ viderentur & explicatu difficillimæ. Et imprimis, quia corpora evadunt colorata, reflectendo quædam genera radiorum

De Radiorum

& intromittendo cætera, ſi aliquatenus tranſpareant; concludendum eſſe videtur, quòd colores maximè tranſmittantur, qui minimè reflectuntur, & inde quòd alius ſit eorum color cùm tranſpiciuntur, atque alius cùm cernantur luce reflexâ. Et hoc quàm bene convenit cum experientiâ, videre eſt in Libro Boylei de Coloribus conſcripto. Scilicet infuſio ligni Nephritici, quando diverſâ luce tranſpicitur, Rubea vel Flava appareat, & Cærulea cùm cernitur ad plagas lucis incidentis. E contra verò Aurum Foliatum apparet Flavum, & tranſparet Cæruleum. Sic vitri fragmenta, per totam profunditatem colorata, qualia in antiquis templorum feneſtris reperiuntur, varios plerumque colores pro poſitione ſpectatoris exhibent. Et craſſiorum laminarum vitri pellucidiſſimi (qualia ad fabricanda Teleſcopia adhibentur) cùm obverſas oras aſpexi, Cæruleum vidi reflexum; & Flavum tranſmiſſum, cùm perſpexi: Cæruleus autem maximè apparuit, cùm illuſtrabatur jubare in obſcuratum cubiculum immiſſo, & à lente concavâ diſtracto, ne nimiâ luce color perfunderetur. Neque ullus dubito, quin plurima exiſtant hujus rei exempla, ſi quis operæ pretium duxerit in variis liquoribus, aliiſque corporibus tranſparenter coloratis, examen inſtituere; interea cavendo, ne lux è pluribus plagis ſimul incidat.

96. Quòd autem iſthoc non ſemper eveniat (quemadmodum in eâdem infuſione ligni Nephritici, cùm Cæruleus color ſalibus acidis deſtruitur, & in aliis pleriſque, quæ undique ſunt ejuſdem coloris) ratio eſt, quòd corporibus non ſolum inſit poteſtas reflectendi vel tranſmittendi radios, ſed etiam ſuffocandi, & in ſe terminandi. Sic aliqua obſtruunt & retinent omnigenos radios, eoque pacto fiunt undique nigra; alia reflectunt quoſdam, cæteroſque ſupprimunt, ut opaca colorata; alia quoſdam ſupprimunt, cæteroſque partim reflectunt & partim tranſmittunt, ut tranſparenter colorata, quæ circumcirca ejuſdem ſunt coloris; & alia quoſdam reflectunt, cæteroſque tranſmittunt, ut in exemplis jam allatis conſtitit. Atque ita præterea.

97. Porro, quòd Liquoris colorati varia craſſities aliquando ſpeciem Coloris variare poteſt, cum noſtris principiis quàm optimè conſentit. Sic infuſio ligni Nephritici pro variâ ejus craſſitie, vel Flavum vel Rubeum colorem referre poteſt. Cujus rei rationem

Lucis Coloribus.

nem ut intelligas, concipe, quòd liquor ille ſit aptiſſimus ad reflectendum purpuriformes & cæruliformes radios; ineptiſſimus, ad reflectendum rubriformes; & mediocriter aptus ad reflectendum mediocres: & (in fig. 27.) poſito ABC vitro coniformi hujus infuſionis pleno, ſit FI craſſities ejus, cum Aureo colore ſplendentis; EH major craſſities, ubi incipit rubeſcere; ac DG craſſities, ubi ſit intenſioris & ſubobſcuri ruboris. Et, cùm cæruliformes & purpuriformes radii citiſſimè reflectantur, ut ex eo patet, quòd unius tantùm guttulæ craſſities ad eos colores reflectendos, & ſpectantibus, exhibendos ſufficit: ex illis pauciſſimi penetrabunt ad profunditatem FI; ſed plurimi viridiformes, & adhuc plures flaviformes unà cum rubriformibus trajicientur, ex quâ miſturâ fiet iſte color Aureus. At per profunditatem EH pauci è flaviformibus tranſibunt, & pauciores è viridiformibus; ac ſoli ferè rubriformes ad uſque profunditatem DG pervadere valebunt; quinimo ex illis etiam complures in itinere reflectentur, & inde rubor trajectus ſubobſcurus evadet.

98. Ad eundem ferè modum, cùm Lux per plura corpora, diverſis coloribus pellucidè tincta, trajicitur, color ille ex adverſo videbitur, qui facillimè pertranſit omnia. Quòd ſi nullus poteſt omnia pertranſire, utcunque ſeorſim pellucida exiſtunt, conjunctim tamen evadent maximè opaca. Quemadmodum, ſi lamina AB tranſmittat ſolos rubriformes, & CD ſolos cæruliformes, cùm juxtà ponuntur, tranſmittent nullos. Cujus quidem rei exemplum habes in Micrographiâ Hookii de Cæruleo & Rubeo liquore, qui ſeorſim apparuêre, & conjunctim fuêre opaci.

99. Denique huc referri poteſt, quòd, cùm aliquis è coloribus Priſmaticis per corpus tranſparenter coloratum trajicitur, intermedius color emergit. Sic Viriditate v. g. in vitrum tranſparenter Rubeum incidente, flaviformes radii, qui in illâ Viriditate commiſti latent, præ cæteris vitrum fortaſſe pervadent; efficientque, ut lux emergens flaveſcat.

Sed videor officii limites exceſſiſſe, in campum Phyſicum nimis expatiatus. Viſum quidem fuerit hæc attigiſſe, ut univerſa rerum conſenſio pateret; ſed ſiſto gradum, ac tandem, coronidis loco Inſtrumentum quoddam haud inelegans deſcribam, quo præfata omnia ſummâ cum evidentiâ tentari poſſunt.

De Radiorum

100. Sit ABC*abc* (fig. 28.) Prisma, quòd radios, per foramen F in obscuratum cubiculum transmissos, refringat versus lentem MN, ut colores, quos efficit in *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, per lentem deinde tranjiciantur ad X, & ibidem commisceantur in Albedinem componendam, sicut in præcedentibus ostendi. Deinde aliud Prisma, DEG*ged*, priori parallelum ad locum X, ubi Albedo redintegrata est, statuatur; quod lucem versus Y refringat. Hujus autem prismatis verticalis angulus, G*g*, sit æqualis angulo verticali, C*c*, prismatis anterioris, aut eo fortè minor, & similiter positus; ut incidentes radios in parallelismum reducat, quos prisma anterius dispersit.

101. His positis, observabis an lux Y (pedes aliquot distans trajecta) æquè alba maneat ac fuerit in X; vel sensim abeat in colores. Si penitus appareat Alba, tunc prismata cum lente rectè disposuisti; sin aliqui colores ad Y cernantur, prisma DEG circa suum axem eo modo parùm converti debet, ut colores minuantur; &, cùm penitus evanuêre, & lux in totum albescit, siste Prisma. Quòd si nequeas hoc modo efficere, quin lux, inter transeundum ab X ad Y, ex aliquâ suâ parte transmigret in colores; lentem MN paulo longiùs à prismate ABC transfer, & loco X rursus invento, ubi Colores in Albedinem accuratissimè convergunt, in eo statue prisma DEF ut priùs; & rursus experire, an possis lucem sine coloribus ad Y projicere; & cùm eo usque mutaveris positiones prismatum & lentis, dum effeceris lucem ad Y trajectam, quàm minimè possis coloratam, prismata cum lente in eo situ figantur; idque vel ope trabis, ut in schemate describitur, vel tubi aut instrumenti cujusvis in eum finem fabricati.

102. Cùm habeas hanc machinam è prismatibus & lente, ut dictum est, compositam, ope lucis per eam transmissæ cuncta possis experiri, quæ hactenus fuerunt tradita. Hæc enim lux XY jubari à Sole directo persimilis est, & easdem omnes apparentias exhibet, ac si à foramine F rectâ promanâsset, nullum omnino refractionem passa; adeoque ejusdem esse constitutionis facilè credamus. Et tamen, cùm in sua principia componentia, hoc est in radios diversorum generum, apud lentem MN discreta fuerit, facilè erit modos examini subjicere, quibus posthac in colores converti potest, idque tantùm sistendo hoc vel illud radiorum genus apud

Lucis Colorisus.

apud MN, ut constitutio lucis XY, quoad ejus conversionem in colores, pateat.

103. Quemadmodum, si desideretur, ut sensui planissimè pateat, quòd Prisma convertit lucem in colores, non transmutando proprietates ejus intrinsecas, sed segregando tantùm radios, ad excitandum varia colorum phantasmata dispositos, ex quibus lux omnis albens constituitur. Nihil aliud agendum est, quàm ut prisma aliquod HIK ita statuatur, ut lucem XY excipiat, & refringendo transmutet in colores P, Q, R, S, T in papyrum aliquam procidentes. Deinde, si colorem quemlibet apud lentem MN interposito obstaculo sistas, videbis eundem colorem à papyro LV deficere. Sic Purpuram *p* obstruendo, disparebit Purpura P, cæteris coloribus non omninò mutatis; (dempto fortè Cæruleo, quatenus aliquid Purpuræ commixtum habeat). Sic Viridem *r* intercipiendo, Viridis R evanescit, & sic de aliis. Atque ita videre est, quòd iidem colores apud papyrum LV & apud lentem MN pertinent ad eosdem radios; iisque non communicantur à Refractione prismatis HIK, siquidem præexistebant segregati quidem ad lentem MN, & congregati in luce XY.

104. Ad eundem modum, si cupias experimenta penitus rimari, quibus aliqua genera radiorum omninò reflecti possint, dum alia, licet similiter incidentia, partim transmittantur: prisma HIK circa axem ejus converte, donec altera pars colorum (Violacea nempe & Cærulea) postquam obliquissimè refracta fuerit versus LV, abinde penitus dispareat versus π deflexa; parte tamen alterâ ad LV pervadente. Deinde, si dimidium colorum, rubedinem versus, intercipias ad MN, Rubor & Flavus disparebunt ad LV, & lux ad π reflexa fiet admodum Cærulea. Sin alterum dimidium, Purpuram versus, intercipias; Rubor apud LV non mutabitur, sed lux in π, propter ablatum Purpureum & Cæruleum, flavescet aut rubescet. Id quod indicat purpuriformia & cæruliformia radiorum genera penitus ad π reflecti, dum cætera partim refranguntur ad LV. Præterea, si corpus aliquod coloratum, v. g. Cinnabaris, hac luce XY illuminetur, sub proprio colore perindè apparebit, quasi in luce subdiali constitutum aspiceres. Quòd si cæruliformes & viridiformes radios, juxta lentem prælapsuros, intercipias, Rubor ejus intendetur: at cùm rubriformes radios intercipis, Cinnabaris

De Radiorum Lucis Coloribus.

nabaris non amplius rubebit, sed Flavedinem aut Viriditatem, aliumve quemvis colorem, pro specie radiorum, quos prætermittis, induet. Nec secus alia Colorum phænomena, quæ prismata ab immediatâ Solis luce eliciunt, ope lucis hujus XY poteris experiri, & intercipiendo quodvis radiorum genus apud MN, eorum causas intueri.

105. Si quis autem velit Instrumentum, quale jam descripsimus, ad experimenta hujusmodi instituenda conficere, lentem adhibeat latam tres digitos & ampliùs; quæ radios parallelos ad focum duos pedes circiter distantem congregat: atque ita prismata distabunt octo pedibus, & conficient instrumentum satis magnum, quo omnia strictius examini subjiciantur. Quod ad positionem lentis attinet, si Prismatum anguli verticales, ACB & DGE, sunt æquales, puta 60 vel 70 graduum, ipsa æqualiter ab utrisque distabit. Sin alter angulus sit major altero, lens illi prismati vicinior collocetur, cujus angulus verticalis, existit major. Et nota, quòd jubar XY per spatium eo latius diffunditur, quo lens statuitur anteriori prismati ABC vicinior. Atque adeo, siquando opus sit amplo jubare, debes tantùm efficere, ut lens sit aliquanto vicinior anteriori prismati quàm posteriori; & adhibere prisma posterius, cujus angulus verticalis sit tanto ferè minor quàm angulus verticalis anterioris. Denique, si velis, ut colores, in lentem illam procidentes, sint magis directi & ab invicem distracti, quàm more jam descripto contingat, eâ nempe de causâ, ut singula radiorum genera pro lubitu distinctiùs, sive magis sejunctim, intercipiantur, id quod in experimentis nonnullis necessarium duco: nihil aliud agendum est, quàm ut Lux per duo parva foramina F & *f*, ab invicem longe distantia, priùs trajiciatur, quàm incidat in Prismata: vel ut alia lens non procul ab interiori prismate collocetur, quæ apta sit, ut lucem, à longinquo foramine F divergentem, congregat ad alteram subsequentem lentem MN. Cæterùm hoc instrumentum sic rectè disponere invenio molestissimum esse, ut & effectus ejus haud ita distinctos & sensui patentes ac in præcedentibus; ubi per pauciores refractiones & majora vitrorum intervalla ostendebantur. Et ea propter auditores imprimis illa simpliciora & faciliora experimenta examini consultiùs subjicient.

SECTIO

SECTIO SECUNDA.

De variis Colorum Phænomenis.

De Variis Colorum Phænomenis.

De Phænomenis Lucis per Prisma ad Parietem trajectæ.

106. Hucusque fundamenta struxi, quibus Colorum, quocunque modo effectorum, phænomena explicari possunt; effectuum verò, quos suprà minùs attigi, jam causas particulares & immediatas, non Geometrarum, quibus scio supervacaneum videatur, sed aliorum gratiâ sigillatim describam. Malo enim hîc aliqua, quæ plerisque superflua fortasse videbuntur, interserere, quàm quicquam alicujus momenti omittere, quod incautis, & prejudicio laborantibus, difficultatem subministrare possit.

Et imprimis circa Prismatis vulgo notos effectus, quorum causam abundè satis retexi, circumstantiæ nonnullæ supersunt explicandæ: utpote cur Primitivi Colores non omnes eliciuntur, cùm lux (cujus radios, ab origine heterogeneos, Prisma per inæquales refractiones dispergit) non transit per angustum foramen, sicut passim in præcedentibus supposui, sed ex unicâ tantùm parte limitatur. Verbi gratiâ, si corpus aliquod opacum FG (fig. 29.) Soli interponatur & Prismati, juxta basem ejus AB, quòd umbram projiceat in MP, colores efficiat in spatio PT, & lucem permittat in ipsum NT influere: in PT, confinio Lucis & Umbræ, nulli colores generabuntur præter Purpureum & Cæruleum cum variis eorum gradibus. Et ratio est, quòd ex radiis omnium formarum, qui transeunt per extremitatem dicti corporis opaci FG, soli purpuriformes propter maximam eorum refractionem possunt ad P usque deflecti, unde color Purpureus ibi conspicitur. Deinde cæruliformes, cùm paulo minùs refrangibiles existant, incident in totum spatium NQ, non potentes ulterius versus M deflecti quàm ad Q. Atque ita duæ radiorum species eæque solæ incident in Q, & colorem ex Purpureo & Cæruleo compositum exhibebunt. Præterea viridiformes, minùs adhuc refrangibiles, in spatio NR non ultra extendentur quàm ad R. Flaviformes autem terminabuntur in S. Quare tres tantùm species colorum miscebuntur ad R, & color ex iis omnibus, nempe ex Purpureo, Cæruleo & Viridi, generabitur.

De Variis

nerabitur. At cùm Purpureus & Viridis commixti producant Cæruleum (ut facile est ex ante dictis experiri) liquet colorem ad R non fore alium quàm Cæruleum. Denique, cùm radii rubriformes minimè omnium refringantur, ut in spatium NT incidentes non magis deflectantur versus N quàm ad T; liquet quòd in dicto spatio NT fiet mistura colorum omnium, & proinde albescet; sed in ipso S (ubi color omnis dempto rubeo miscetur) Cæruleus ad Viriditatem nonnihil vergens apparebit, sed maximè dilutus, propterea quòd solus Rubor ex Albedinis compositione desit.

107. Porro, si corpus opacum, *fg*, Soli interponatur & Prismati, juxta verticem ejus C, sicut videre est in schemate 30: inter obscuratum spatium, NT, & lucidum PM, cernes alios duos colores, Rubeum in T & Flavum in R, idque propter jam dictas rationes. Quippe radii, prout apti sunt ad hos ordine colores, Rubeum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generandos, intenduntur per spatia MT, MS, MR, MQ & MP; cùm Soli rubriformes extenduntur usque ad T, cæteris propter majorem refractionem citiùs terminatis, necesse est, ut iste color in T sit Rubeus. Item, cùm tria radiorum genera in R incidant, color ex istis, nempe Rubeo, Flavo & Viridi, compositus ibidem cernetur. Rubeus autem & Viridis Flavum constituunt, atque adeo Flavus apparebit in R. Præterea, cùm omnium formarum radii misceantur in P, & postea perpetuò versus M, spatium illud PM apparebit Album. Nec secus constat, quòd citreus in S, & in Q Flavus ad viriditatem vergens, apparebit; sed adeo dilutus tamen & Cæruleo redundans, ut nomen Viriditatis non mereatur.

108. Tertio, si opaca duo corpora GF & *gf* (fig. 31.) Soli & Prismati interponantur, ut radii inter utrumque, quasi per oblongam rimam prismati parallelam, transeant, atque distantia F*f* sit satis magna, pro utroque termino F & *f* generabuntur colores; Purpureus nempe ad P, & Cæruleus ad R, per terminum F; atque Flavus ad *r*, & Rubeus ad *t*, per terminum *f*; sicut modò explicatum fuit: eritque T*p* spatium album utrisque coloribus interjectum. Jam, si obstacula GF & *gf* ad se invicem paululum admoveantur, ut intermedium spatium F*f* evadat angustius, isto pacto spatium album quoque T*p* fiet angustius, donec tandem evanescat & colores utrinque coeant. Si spatium F*f* magis adhuc coarctetur,

Colorum Phænomenis.

coarctetur, Viriditas in medio colorum emerget vice Albedinis, quæ jam evanuit, quæ quidem Viriditas non antea apparuit, propter commisturam radiorum heterogeneorum, quibus involuta latuit; jam verò heterogeneis istis per obstacula duo, sibi propiùs admota, alternè interceptis, Viriditas ea paulatim detegitur, patet, & evadit perfectior; donec, cùm dictum F*f* satis angustum est, ab omni ferè misturâ liberatur & eruitur, propriâque specie non minùs quàm cæteri colores elucet. Et hinc in transitu colligitur, quòd Viriditas inter colores medietatem exactè obtinet, non magis ad Rubeum vergens quàm ad Violaceum, neque ad Flavum quàm Cæruleum; hoc est, in specie coloris, & respectu multitudinis radiorum, ad colores utrinque pertinentium. Nam in gradu refrangibilitatis minùs differt à parte Rubeâ Flavâque, & in aliâ quâdam proprietate (cui jam explicandæ non est locus) minus differt à parte Purpureâ & Cæruleâ.

109. Præterea, cùm Albedo T*p* propter angustiam pervii spatii F*f* incipit evanescere, colores etiam contractiores paulatim apparebunt; ita ut, cùm istud F*f* sit valdè angustum, Flavus ad Rubeum & Cæruleus ad Violaceum quasi duplo vicinior evadat, quàm cùm amplitudo ejus permisit Albedinem in medio colorum produci, & ut quinque colores (Viriditate jam internatâ) non occupent plus spatii quàm eorum duo priùs occupavêre. Cujus rei ratio ex schematum inspectione patebit animadvertenti, quòd Flavus ad *r*, & Cæruleus ad R, ex heterogeneis radiis compositus, mutatur in ferè uniformem Flavum ad loca S & *s* incidentem, & in ferè uniformem Cæruleum ad loca Q & *q* similiter incidentem, heterogeneis radiis è misturâ per angustiam spatii F*f* magnâ ex parte sublatis.

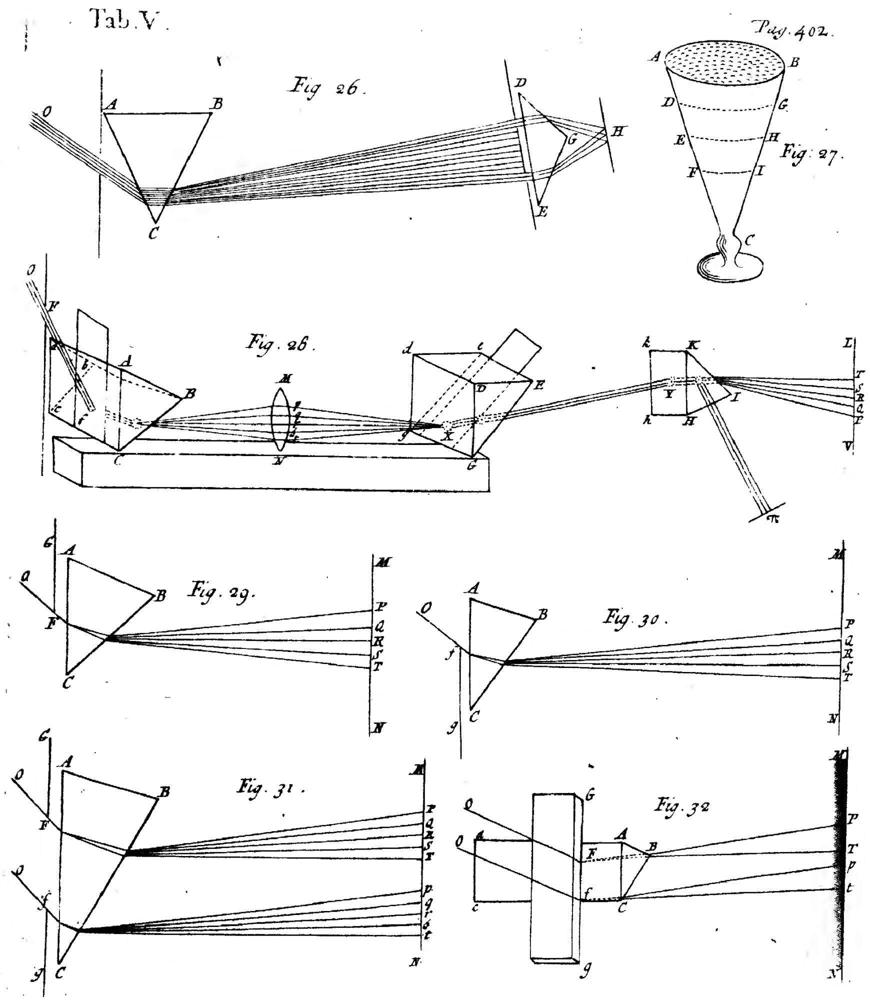
110. Quarto, si Lux terminetur obstaculo G*g*, cujus extremitas perpendiculariter transversa est ad longitudinem prismatis, Colores omnino nulli virtute termini illius generabuntur. Etenim ponamus parallelos radios, OF & O*f*, cæterosque (fig. 32.) juxta extremitatem dictam G*g* in Prisma ABC prolapsos, ibidemque refractos esse ad PT & *pt*, atque MN esse umbram ipsius G*g*. Jam licet radii purpuriformes, FP & *fp*, magis refringantur quàm rubriformes, FT & *ft*; tamen istâ refractione secundum terminum umbræ factâ, ita ut ex dictis radiis multi magis deflectant versus umbram

De Variis

umbram quàm cæteri; palam eſt, quòd ubicunque purpuriformes incidunt, rubriformes etiam incident in eundem locum, & è contrà. Quod idem de radiis intermediis pari modo concipiatur. Et ſic radiis omnium ſpecierum ubique per extremitatem umbræ commixtis, umbra benè definietur ſine aliquo colore (præter Album vel Fuſcum ex luce & umbrâ mixtis) conſpecto. Sed cavendum eſt, ne colores, per limites priſmatis A*a* vel C*c* generati, habeantur pro generatis à limite G*g*. Quamobrem priſmata, quæ ex vitro in totum fiunt, ad examen hujus & proximè præcedentis commodè inſtituendum, nimis ſunt exigua; propterea quòd Colores per extremitatem verticis & baſis producti, interjectum ſpatium album haud relinquent ſatis amplum, in quo generatio colorum prædictis modis probetur. Itaque, ut priſma conficiatur ex vitris planis & benè politis, qualia ad Specula conſpicienda adhibentur, moneo; quibus in morem cunei connexis, & in vaſculum dein priſmiforme completis, ut ſuprà dictum, vaſculum iſtud impleatur aquâ limpidiſſimâ, & occludatur; & ſic priſmata ad arbitrium ampla conficias.

111. Quinto, ut omnia jam uno comprehendam ſpecimine, ſit G*g* (fig. 33.) corpus opacum orbiculari foramine, F*f*, unum duoſve digitos lato, pertuſum; per quod Lux in Priſma trajiciatur: ubi, cùm refracta fuerit, projicitur in papyrum, vel quodvis album corpus MN, quaſi ſemiſſe pedis à priſmate poſtpoſitum: & videbis illuminatum ſpatium, PYTZ, rotundum ad modum foraminis F*f*; album in ejus medietate; & duobus ſemilunulis colorum terminatum, Purpureo & Cæruleo ad P, Flavo autem & Rubeo ad T; qui colores paulatim deficiunt verſus Y & Z, ubi nulli omninò conſpiciuntur. Præterea, ſi papyrum ad majorem diſtantiam paulatim diſtuleris, velut ad *mn*; videbis colores diſtendi & augeri, & intermediam Albedinem uſque comminui, dum prorſus evaneſcat; totumque ſpatium coloribus Rubeo, Flavo, Cæruleo & Purpureo tinctum appareat; & papyrum longius differendo, Viriditas è medio emerget, & creſcet tum amplitudine ſpatii, tum perfectione ſpeciei, totumque ſpatium coloratum diſtrahetur in oblongam formam. Quorum omnium rationes ex ſupradictis depromantur.

112. Adhæc,



112. Adhæc, ſi Lux obſtaculo ad quamvis diſtantiam poſt Priſma collocato terminetur, conſimilis erit Colorum generatio. Sit v. g. obſtaculum G*g* (fig. 34.) perforatum in F, & ad diſtantiam pedis unius, aut ampliùs, poſt Priſma ABC collocatum. Priſma autem ſatis amplum adhibeatur (quale ex laminis vitreis, ut ſuprà, poſſis efficere) ne lux omnis priùs abeat in colores, quàm attingat foramen F; & lux illa, poſtquam tranſiit per F, non ſecus convertetur in colores apud P, Q, R, S, T, quàm contigit in præcedentibus. Scilicet inſpicienti ſchema patebit, quomodo radii diverſorum generum, inæqualiter refracti, convergant à diverſis partibus priſmatis ad iſtud F, ubi (ut & hinc inde verſus G, & *g*) componunt Albedinem; ſed inibi decuſſantes divergunt poſtea, diverſique Colores in diverſa ſpatia P, Q, R, S, T tendunt. Et hinc, cùm radii repagulo quolibet H ex utrâvis parte priſmatis intercipiuntur, è coloribus P, Q, R, S, T aliqui tollentur. Si radios nempe vertici C vicinos intercipias, tolles Purpureum P; vel tolles Rubeum T, ſi intercipias eos baſi AB vicinos. Et ſic de aliis; ita ut quoſlibet pro arbitrio poſſis tollere, vel efficere, ut quilibet ſolus appareat. COLORUM PHÆNOMENIS.

113. Denique, ſi Lux ex unicâ tantùm parte pone Priſma limitetur, vel ſi duo ſtatuantur limites, iique vel ad eaſdem vel ad oppoſitas partes priſmatis, vel quocunque alio modo Lux terminetur; modus, quo Colores exinde generantur, ex antedictis facilè patebit, ut jacturam temporis fecero de hâc re plura verba facturus. Quinetiam, ſi duo vel plura priſmata quocunque modo inter ſe diſponantur, peritus Optices facile explorabit cauſam.

114. Cæterùm de modo tollendi quoſlibet colores in fig. 34, per interpoſitionem obſtaculi H, hîc obiter notandum venit, quantum iſta circumſtantia adverſatur hypotheſibus Philoſophorum, quæ de coloribus huc uſque fuerunt excogitatæ. Ex illis enim poſitis Refracta Lux ad eas ſemper partes cum Cæruleo & Violaceo terminanda eſt, verſus quas fit refractio; quandoquidem gyrationes Globulorum ex opinione Carteſii, vel partes anteriores pulſuum Ætheris obliquè vibrantis, ex hypotheſi Hookii, per viciniam quieſcentis Medii ad eas ſemper partes impediuntur, & hebeſcunt. Et tamen hîc videre eſt, quòd admoto obſtaculo H, ut radios vertici Priſmatis vicinos intercidat, poſſis Violaceum & Cærulcum

De Variis

ruleum tollere; & efficere, ut Viridis vel Flavus aut etiam Ruber, ad eas partes maneant extimus, versus quas refractio peragitur. Nec hypothesis eorum tutior est, qui supponunt colores ex Lucis & Umbræ misturâ generari; nam eadem videtur esse in eorum confinio mistura, sive aliqui ex radiis ante refractionem limite H intercipiantur, sive omnes per prisma liberè transeant.

115. Hujusmodi etiam hypotheses ex aliis experimentis passim occurrentibus everti possent, modò id instituto meo necessarium ducerem. Quemadmodum ex illis ubi lucem partim reflecti posse, & partim transmitti docebam; nam lux transmissa dabat Flavum Rubeumque, idque in meditullio ejus, ubi à nullo quiescente Medio, vel tenebris, terminabatur. Sic etiam maximè valet, quòd ostendi Colorem lucis, ex uniformibus radiis constantis, non posse per quaslibet Refractiones mutari. Cæterùm non opus est, ut hypotheses refutem, quæ ex inventâ tandem veritate suâ sponte corruent.

116. Phænomenis jam antè explicatis affinia sunt sequentia, quæ circa compositionem Albedinis versantur. Prismata duo, ABC & *abc* (fig. 35.) quorum anguli verticales, ACB & *acb*, æquentur, ita parallelis axibus dispone, ut alterius linea verticalis, c, cum *b*, extremitate basis alterius, conveniat; planis BC & *bc* in directum jacentibus. Quo facto, si Sol transluceat ea in papyrum MN, octo vel duodecim digitos postpositam, Colores quidem generabuntur ad M & N, per exteriores prismatum terminos B & *c*, non autem per interiores c & *b*; sed medium spatium PT totum apparebit album. Sin alterutrum prisma tollas; alterius extremitas, c vel *b*, generabit colores ad PT: ac dein, si restituas, Albedo etiam restituetur. Scilicet Albedo ista componitur ex coloribus ab extremitate, c vel *b*, prismatis utriusque prolapsis; id quòd facile constet ex præfatis. Nam radii purpuriformes, ab utroque prismate refracti, limitantur in eodem puncto P; ita ut ab uno prismate manantes incidant in PM, ab altero in PN, & ab utroque simul in totum MN, non secus ac si omnes ab unico prismate venissent. Eodem modo Cæruliformes extenduntur per totum spatium MN, & eorum terminus communis est Q, prout manant à diversis prismatibus; & sic de cæteris. Quare omnigeni radii commiscentur in unâquâque parte spatii PT, & Albedinem ideo component. Sin alterutrum

Colorum Phænomenis.

alterutrum Prisma tollas, puta ABC, vel Lucem ei potius occludas; tum radiis rubriformibus ab MT, flaviformibus ab MS, viridiformibus ab MR, cæruliformibus ab MQ & purpuriformibus ab MP sublatis, manebunt rubriformes in NT, flaviformes in NS, viridiformes in NR, cæruliformes in NQ & purpuriformes in NP: adeoque Purpureus apparebit in P, & Cæruleus in R, ut ostendimus antè. Et simili ratione, si lux occludatur alteri prismati *abc*, ne permeet, Rubor apparebit in T, & Flavedo in R.

117. In istis autem experiendis requiritur, ut anguli ACB & *acb* sint æquales; id quod tentabis, si Prismata secundum longitudinem eorum ita connectas, ut duo ex planis dictos angulos comprehendentibus, puta BC & *bc* (fig. 36) fiant contigua, & reliqua duo AC & *ac* sibi opposita. Quo facto, si radii solis ingressi foramen F pergunt ad eundem locum s, cùm trajiciuntur per dicta prismata perpendiculariter ad eorum latera AC & *ac*, atque cùm liberè progrediuntur nullo interjecto obstaculo; tum plana AC & *ac* sunt parallela, & anguli ACB & *acb* æquales: sin istud non eveniat, sunt inæquales. In quo casu notetur præterea, quòd inclinando plana BC & *bc* (fig. 35.) vel ab invicem reclinando, possis Albedinem in PT haud secus componere, ac si dicti anguli fuissent æquales, & plana BC & *bc* in directum jacentia.

118. Quinetiam possis hoc idem cum unico tantùm Prismate perficere, dummodo satis magnum sit; puta cujus refringentia latera AC & BC (fig. 37.) sint sex vel octo digitos lata. Etenim sint FG & *fg* duo corpora opaca, plana, rectangula & ad Prismatis planum, AC*ca*, secundum planitiem ejus sic applicata, ut eorum angularia puncta, G & *g*, juxta plani istius centrum se mutuò contingant, & latera concurrentia (quorum FG & *fg* sint ad axem prismatis parallela) ex adverso jaceant in directum. Quo facto, si Lux refracta projiciatur in papyrum MNX pedes quasi duos distantem, obstaculum FG projiciet umbram in MH; Purpuram efficiet in PHIQ, ac Cæruleum colorem in QILT, & permittet lucem in LN. Dico jam, si Speculo aliquo, μνx, colores, ex alterutrâ parte lineæ HL, velut HL*pt*, ita reflectantur, ut incidant in papyrum ad eundem locum cum coloribus HLPT ex alterâ parte, color omnis evanescet, totumque HL*pt* apparebit album. Nam purpuriformes radii à prismate ad PHIQ directè tendunt; & cætera quatuor

De Variis

quatuor radiorum genera ad eundem locum reflectuntur à ſpeculo, incidentes puta in HIπχ. Item purpuriformes & cæruliformes directè tendunt ad QIXR; & cætera tria genera illuc reflectuntur ab IXϱχ; & ſic de reliquis: adeo ut omnes omnium generum radii paſſim per ſpatium PHLT miſceantur, ibidemque componant Albedinem. Sed notandum eſt, quòd, cùm lux reflexione ſemper debilitatur, radiis quamplurimis inter reflectendum amiſſis, exinde forſan eveniat, quòd lux directa nonnihil prævalebit reflexæ, & color ejus dominabitur; niſi compenſatio fiet, ita papyrum inclinando, ut directa lux paulo obliquiùs in eam incidat quàm reflexa, de quâ re facile judicium feras ex perfectione Albedinis emergentis.

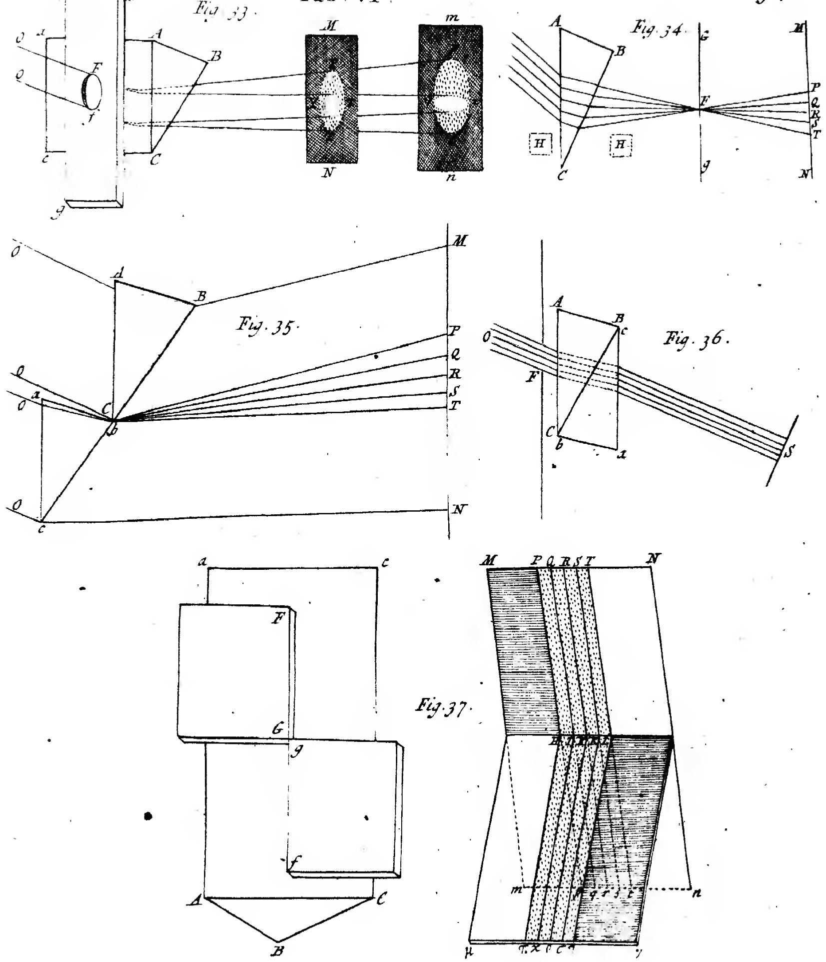
119. Antequam ad aliud experimentorum genus tranſeo, neceſſarium erit, ut formam Imaginis Coloratæ, quam Lux, per arctum orbiculare foramen in tenebroſum cubiculum influens, & per priſma deinde tranſmiſſa affingit, paulo magis articulatim inſpiciamus; & ſingulorum ejus colorum dimenſiones ac diſtantias ab invicem, nec non Refrangibilitatis gradus ſingulis radiorum generibus competentes ſedulò rimemur.

Exper. XIX.

120. Oſtendebatur ſub initio, quòd, ubi Priſma (cujus angulus verticalis erat quaſi 63 grad.) imaginem ad diſtantiam 22 pedum projiciebat, longitudo ejus erat $13\frac{1}{4}$ dig. & latitudo $2\frac{5}{8}$ dig. Adeoque centra extimorum circulorum, ex quibus in longum diſpoſitis imago illa conſtitit, diſtabant $10\frac{5}{8}$ dig. Jam ad hanc diſtantiam, ſive diſtractam longitudinem imaginis, cæteras ejus dimenſiones referre convenit; propterea quòd ad abſolutam ejus longitudinem (quæ à magnitudine componentium circulorum dependet) non habent certam relationem. Quo autem dimenſiones ejus majori ἀκριβείᾳ inveſtigarem, loca ubi Colores in ſuo genere perfectiſſimi, eorumque confinia in tranſverſam papyrum incidebant, calamo ſcriptorio notabam; & obſervationibus hujuſmodi ſæpiùs repetitis & inter ſe collatis, has tandem concluſiones ſigillatim perdidici.

I. Cæruleus & Violaceus ex unâ parte, & Viridis ac Rubeus ex alterâ imaginem bipartiebantur; adeo ut Viridis & Cærulei confinium

Tab. VI. Pag. 406.



confinium (quod Thalaffinum appellare poffim) meditullium ejus occuparet. COLORUM PHÆNOMENIS.

II. Locus ubi Porracea, five floridiffima Viriditas apparuit, divifit imaginis diftractam longitudinem in ratione 3 ad 5; utpote longitudine illâ in 8 partes divifâ, Viriditas illa tribus partibus à Rubeo termino diftabat, & quinque partibus à Purpureo.

III. Spatium, per quòd Viriditas omnis adufque Cærulei & Flavi confinium diftendebatur, fuit quafi fexta pars totius diftractæ longitudinis.

IV. Cærulei & Purpurei confinium, five Indicus perfectiffimus, à confinio Rubei Flavique, five à perfectiffimo Citrino, quafi $\frac{7}{12}$ partibus totius diftractæ longitudinis diftabat.

V. Denique hæc Indici & Citrini diftantia per confinium Viridis & Cærulei in ratione 2 ad 3 dividebatur; ita fcilicet ut confinium iftud, five meditullium Imaginis, ab Indico $\frac{14}{60}$ partibus totius diftractæ longitudinis diftaret, & $\frac{21}{60}$ partibus à Citrino.

121. Cum ifthæc quantâ potui diligentiâ obfervâffem, non proprio tantùm fenfu confifus, fed (propter fummam difficultatem præcifè diftinguendi confinia colorum, & loca maximæ perfectionis) aliorum judiciis fretus; imaginis dimenfiones juxta hæc inventa delineavi, quemadmodum videre eft in fig. 38. Scilicet centris X & Y $10\frac{1}{4}$ unciis diftantibus, & femidiametris $1\frac{5}{16}$ unciis, femicirculos duos, APC & BTD, è regione defcripfi, & rectis, AB & CD, tangentibus connexui.

Deinde lineâ XY (quam fuprà denominavi diftractam longitudinem imaginis) in 60 partes æquales divifâ, fumfi LY=9, IY=20, HY=30, & FY=44 partes ejufmodi. Et perpendiculis ad ifta puncta erectis, imaginem in quinque partes, coloribus quinque infignioribus competentes, diftinxi; parte PF referente expanfionem Violacei, & FH expanfionem Cærulei, & fic deinceps. Quo facto coloratam lucem in hanc figuram projeci; ut conftaret denue, an Color quilibet intra limites fic affignatos contineretur: & cùm tota imago totam occupabat figuram, finguli etiam colores cum fingulis partibus quàm optimè conveniebant. Interea verò in fpatiis iftis loca obfervabam, qualia in hoc fchemate punctim notantur, ubi finguli Colores faturi & in fuo genere illuftriffimi apparuêre.

Jam

De Variis

Jam horum locorum & limitum, Colores disterminantium, intervalla non alia fore manifestum est, etiamsi circulos, ex quibus imago conflatur, per methodos sæpiùs recensitas, centris non mutatis, quantumvis minueres. Eâ scilicet de causâ, ut heterogenei plus segregarentur, & Colores evaderent simpliciores. Quippe, cùm in ipsissimis rectilineis terminis, AB & CD, colores sint absolutè simplices; & Colores in mediâ imagine, prope lineam XY, cum istis, quibus interjacent, marginalibus congeneri appareant; ratio etiam suadet, quòd heterogeneorum mistura non sensibiliter mutet locum alicujus Coloris; siquidem hinc & inde venientes se mutuò contemperant. Sic radii viridiformes & purpuriformes, per Cæruleum sparsi, æquipolient; & ideo non dimovent aut conturbant Colorem illum, ut soli (quamvis nulli purpuriformes intermiscerentur) ibidem componerent & exhiberent. Sed hìc excipienda sunt spatia circulis terminalibus, AC & BD, comprehensa; ubi contemperamentum illud, ex parte exteriori, gradatim deficit, & ideo saturi Ruboris, qui solus è præfinitis in circulum terminalem se extendit, positionem in imagine è parte marginali, ubi transibit circulum, expedivi, ut indicat fig. 39. In his autem si quid hæsites, possis experimenta de novo instituere, contrahendo imaginis latitudinem, ut circuli, cæteris partibus, minores, evadant, & nullus dubito, quin omnia quadraverint.

122. Cæterùm, quamvis colorum confinia in lineas ad F, M, I & L erectas incidebant, tamen loca, ubi saturi & intensi apparuêre, non omnia constitere in medio interjecti spatii. Nam Cæruleus, qui in suâ specie illustrissimus erat, & nullatenus purpurascens, propiùs ad F cadebat quàm ad X; et plenissima Flavedo videbatur esse aliquantulum propior ad H quàm ad I. Atque ita Rubedo & Purpura propiùs ad centra X & Y quàm ad alteros limites intensæ apparuerunt; solaque Viriditas in medio limitum F & H effloruit. Unde constat ratio, quòd, etsi Flavus & Cæruleus commixtione Viridem componunt, Rubeus tamen & Viridis, propter majus intervallum, non benè componunt Flavum, nec Viridis & Purpureus Cæruleum. Cùm igitur Colores, juxta medium constipatiores sunt, ita ut inter Flavum & Rubeum, juxtà & inter Cæruleum & Purpureum, quasi triente majus intersit intervallum quàm inter Viridem & Flavum, vel Cæruleum sibi hinc

 &

& inde conterminum; quo Imago elegantiùs in partes inter se proportionatas distinguatur, in numerum quinque insigniorum colorum duos alios, Citreum scilicet inter Rubeum & Flavum, ac Indicum inter Cæruleum ac Violaceum, asciscere convenit; idque potissimè quòd, post quinque insigniores, illi duo eminere videntur; spatiaque, ubi interferantur, pro speciei perfectione satis ampla obtinent; & sic exteriorum Colorum redundans expansio præscindetur, omnesque ad quantitatem Viriditatis politiori symmetriâ proportionati evadent. Colorum Phænomenis.

EXPER. XX.

123. His itaque intertexis coloribus, observationes denuo instituebam; &, ut breviter dicam, omnia comparuêre juxtà ac si partes Imaginis, quas colores occupant, proportionales essent chordæ sic divisæ, ut singulos gradus in Octavâ resonare faciat. Quod cùm tandem deprehendi, figuram Imaginis in partes perinde divisi, ut videre est in schem. 39. Atque iterum tentavi, quàm benè cum his partibus Colores convenirent. Scilicet Imaginis distractâ longitudine XY productâ ad Z, ut YZ sit æqualis XY, finge XZ chordam esse; quam in XY ita dividere oportet, quasi singula segmenta, ad usque Z protensa, singulos octavæ gradus (*sol, la, fa, ut, re, mi, fa, sol*) edere deberent. Id quod fiet bisecando XY in H, & trisecando in G & I; rursusque trisecando XI in E, & capiendo KY quintam, & MY octavam partem totius XY. Et semitonia, EG & KM, Indicum & Citrium referent, cæterique quinque toni, XE, FG, GH, HI, IK, cæteros quinque præcellentes Colores; quorum singuli, cùm tota colorum congeries in totam figuram adæquatè incidit, intra has singulas respective partes comprehensi fuerint. Inque meditulliis harum partium circiter, Color quilibet in propriâ specie illustrissimus & intensissimus apparuit; etiam Purpura & Rubedo, quamvis ultra, versus P ac T, marcescente luce exundârunt.

124. Cæterùm hæc non adeo præcisè observare potui, quin ut fateri cogar, ea posse paulo aliter fortasse constitui. Quemadmodum, si inter XZ & YZ sumantur undecim mediæ proportionales, quarum EZ secunda sit, FZ tertia, GZ quinta, HZ septima, IZ nona, & KZ decima; hæc etiam Imaginis distributio cum Co-

 lorum

De Variis

lorum expanſionibus ſat benè convenire videbitur. Nam differentiæ adeo minutæ, quales inter hanc & ſuperiorem diſtributionem intercedunt, acutiſſimo ſenſu judice vix comparaturos errores efficere poſſunt.

125. Quantum verò diſtributiones iſtæ differunt, ex adjunctis numeris patebit; quorum ſuperiores ad chordam 720 partium, ratione Muſicâ diviſam, reſpiciunt; & inferiores, ad eandem chordam quàm proximè diviſam ratione Geometricâ.

$$360.\ 320.\ 300.\ 270.\ 240.\ 216.\ 202\tfrac{1}{2}.\ 180.\ \left\{ \text{Chorda Muſicè diviſa.} \right.$$

$$360.\ 321.\ 303.\ 270.\ 240.\ 214.\ 202.\ 180.\ \left\{ \text{Chorda Geometricè diviſa.} \right.$$

Superiorem verò diſtributionem potius adhibui, non tantùm quòd cum phænomenis optimè convenit, ſed quòd fortaſſe aliquid circa Colorum harmonias, qualium pictores non penitus ignari ſunt, ſed ipſe nondum ſatis perſpectas habeo, ſonorum concordantiis fortaſſe analogas, involvat. Quemadmodum veriſimilius videbitur animadvertenti affinitatem, quæ eſt inter extimam Purpuram ac Rubedinem, Colorum extremitates, qualis inter Octavæ terminos, qui pro uniſonis quodammodo haberi poſſunt, reperitur.

126. Ex his demum proportiones ſinuum Refractionis, cuique radiorum generi competentium, ratione mechanicâ, determinantur; utpote ad Vitrum Aeri contiguum, cùm ſinus radiorum hinc & inde extimorum ſint ut 68 ad 69, divide intermediam unitatem in ratione partium hujus imaginis; & orientur 68, $68\frac{1}{8}$, $68\frac{1}{5}$, $68\frac{1}{3}$, $68\frac{1}{2}$, $68\frac{2}{3}$, $68\frac{7}{9}$, 69, pro ſinubus ad confinia terminoſque ſingulorum ſeptem Colorum pertinentibus, reſpectu communis ſinûs incidentiæ $44\frac{1}{4}$, cùm refractio fit è Vitro. Cùm verò fit in Vitrum, pro ſinubus iſtis adhibe numeros 68, $68\frac{2}{9}$, $68\frac{1}{3}$, $68\frac{1}{2}$, $68\frac{2}{3}$, $68\frac{4}{5}$, $68\frac{7}{8}$, 69, exiſtente communi ſinu incidentiæ 106. Et pro ſinubus ad radios, ubi Colores ſunt in propriis ſpeciebus perfectiſſimi, pertinentibus, numeri inter hos numeros intermedii adhiberi poſſunt.

127. Sic ad Aquam Aeri conterminam, ubi extremi ſinus refractionis ſunt ut 90 ad 91, ſinus intermedios, per conſimilem unitatis intermediæ diſſectionem (ſtatuendo ſcilicet eſſe 90, $90\frac{1}{8}$, $90\frac{1}{5}$, &c. vel 90, $90\frac{2}{9}$, $90\frac{1}{3}$, &c.) elicere poſſis. Aſt hic memento determinationes

Colorum Phænomenis.

determinationes haſce non eſſe præciſè geometricas, ſed tam proximè tamen accuratas quàm exigunt hujuſmodi res practicæ; & quidquam ampliùs moliri, præter computandi tædium, affectatam & inanem curioſitatem argueret.

128. Sunt & aliæ circa hos Colores circumſtantiæ, quas jam determinare potuiſſem; quemadmodum variæ eorum Formæ, & Expanſiones, pro variis poſitionibus Priſmatis circa axem convolventis; vel pro variâ materiâ refractivâ, ex quâ Priſma fabricatur, quâve circundatur; vel etiam pro variâ magnitudine ejus anguli verticalis. Sed ea omnia ex oſtenſis in parte priori, conferendo cum jam explicatis, ſat manifeſtantur; ut & effectus, quantum ſcio, omnes, quos vel unicâ tantùm refractione, vel utcunque pluribus, & quâvis terminatione Lucis elicere liceat.

SECTIO TERTIA.

De phænomenis Lucis per Priſma in Oculum tranſmiſſæ.

129. Poſt explicata Colorum à parietibus aliiſve Objectis reflexorum phænomena, ordo poſtulat, ut ad affines Objectorum trans Priſmata, prope oculum interpoſita, conſpicuorum apparentias explicandas jam animum adjiciam. Et, cùm doctrinam, in quinque Propoſitionibus ſuprà traditam, per prioris generis experimenta ſolummodo probaverim, & hoc experimentorum genus, eo quòd non ſit adeo ſimplex, conſultò reticuerim, explicationem ejus jam fuſè tradere non pigebit.

Hic ideo imprimis recordari oportet, quòd Objectorum, mediante refractione viſorum, imagines non in propriis locis, ſed aliis quibuſdam videntur, à quibus viz. refracti radii rectâ ad oculum tendunt: atque adeo, ſi ita refringantur, ut, qui fluunt ab iiſdem partibus Objecti, à diverſis locis directè ad oculum veniant, Objectum illud in totidem locis apparebit. Sit e. g. x (fig. 40.) Objectum; o, oculus; & BC, lens interpoſita; quæ pluribus planis ſuperficiebus CD, DE, EF, &c. terminetur, ſicut ad Objecta multiplicia reddenda fabricari ſolet. Dein ſuppone hæc plana radios in ſeſe incidentes ita refringere, ut oculum petant quaſi à loco *x* venientes qui incidunt in planum DE; vel à loco *y* venientes, qui incidunt in planum EF, & ſic porro; & manifeſtum eſt, tum ratione

De Phæno-menis Lucis per

tione tum experientiâ suadente, quòd idem Objectum x in diversis locis, x & y, ad instar plurium videbitur.

130. Ad eundem modum, stantibus jam positis, nisi quòd vice polygoni BC Prisma ABC (fig. 41.) substituatur; cùm è præmonstratis constat, quòd è radiis, versus oculum refractis, purpuriformes, propter maximam refrangibilitatem, longissimè à lineâ rectâ oculum & objectum interjacente divaricant; suppone, quòd purpuriformes (9) oculum petant quasi venientes à P, & quòd rubriformes oculum petant quasi venientes à T, cæterique in locis intermediis, pro gradu refrangibilitatis, fluant; & manifestum est, quòd Objecti, si ope purpuriformium radiorum solummodo conspiceretur, imago foret ad P, idque Cærulei coloris; sin radiis solummodo rubriformibus conspiceretur, imago ejus ad T existeret, idque Rubei coloris; & ad R Viridis appareret, si modò viridiformibus radiis conspiceretur; & sic præterea. Quòd si Objectum duo tantummodo radiorum genera simul emitteret, duplicem sortiretur imaginem; sic emissis rubriformibus & purpuriformibus radiis, imago altera ad T Rubea appareret, & altera ad P Purpurea. Et sic denique, si omne genus radiorum simul emitteret, ut solent corpora naturalia, tunc innumeras colorum, gradatim differentium, obtineret imagines, per totum spatium PT ordine continuo dispositas; quæ, cùm in locis non penitus discretis formarentur, se mutuò obliterarent, efficerentque, ut nil nisi confusa colorum series appareret.

131. Hoc pacto quidem colores omnigenos generari oportet, cùm Objecti lucidi, nigredine vel tenebris terminati, perexigua est apparens magnitudo; qualis est Solis vel Lunæ aliorumve siderum, aut foraminis in fenestrâ lucem à nubibus in obscurum cubiculum intromittentis. Quòd si expansius Objectum intueamur, quale ad X designatur, terminum ejus, GH, vertici Prismatis propriorem imprimis animadvertamus; & manifestum est, quòd imaginum ejus, ex variis radiorum generibus formatarum, purpureâ longissime omnium veluti ad P divaricante, color ille apparebit extimus. Imago autem Viridis, adusque R translata, cum parte aliquâ Purpureæ imaginis, ut & intermediæ Cæruleæ, ibidem coincidet & confundetur; à quâ misturâ Cæruleum colorem

(9) Vocem purpuriformes conjecturâ inserui.

generari

Prisma in oculum transmissis.

generari oportet. Et Rubea, in T terminata, cum partibus cæterarum omnium imaginum eousque extensis coincidet, & colorem Objecti ibi restituet; Album puta, si modo Objectum sit albi coloris.

132. Et quemadmodum juxta limitem GH Objectum Purpureo & Cæruleo fimbriatum apparebit; sic in opposito limite IK per consimile ratiocinium patebit alteros colores, Rubeum Flavumque, produci.

133. Nec secus, cùm ejusdem Objecti partes aliquæ sunt aliis utcunque lucidiores, colores varii generari debent.

134. Et quantitas anguli POT, sub quo Colores apparent, erit maxima, cùm Prisma statuitur oculo vicinissimum; eoque minor evadet continuò, quo Prisma propius ad objectum collocatur. Quemadmodum, si Prismatis, ex vitro confecti, angulus verticalis sit 60 gr. colores sub angulo 2°. 2′ circiter apparebunt, cùm proxime oculum disponitur, & 1°. 1′ cùm in mediâ inter oculum & Objectum distantiâ statuitur; & quasi $30\frac{1}{2}$ min. cùm triplo plus distat ab oculo quàm ab Objecto, & sic præterea. Hîc autem suppono radios ad utramque superficiem ejus æqualiter refringi. Nam, cùm positionem ad radios ex alterutrâ parte obliquiorem, convertendo circa axem, acquirit, ille angulus augebitur. Suppono etiam Objectum satis lucidum esse, ac tenebris densissimis terminatum, ut colores adusque summas extremitates videri possunt. Nam secus per latitudinem jam assignatâ minorem distendi videbuntur; ut ut de quantitate aliisque colorum circumstantiis in quibuslibet Objectis, sub dio conspectis, apparentium, idque pro refractionibus utcunque factis ex his facile est conjicere.

Cæterùm in allatæ doctrinæ illustrationem Phænomena aliquot insigniora, & minus obvia, ex abundanti jam breviter describere est animus.

EXPER. XXI.

135. Et imprimis, accepto filo aliquo PT (fig. 42.) ejus alterum dimidium, PR, Cæruleo colore tinxi; atque alterum, RT, colore Rubeo. Dein Prismate adhibito hoc filum intuebar; cujus à tergo, nisi locus erat tenebrosus, corpus aliquod nigerrimum statuebam; vidique præfata dimidia non in directum jacentia, sed in

duas

De Phænomenis Lucis per duas lineas discreta, quas in *pr* & *st* habes designatas. Scilicet cærulei dimidii, propter majorem eorum radiorum refractionem, imago paulo longiùs translata fuit. At linea tamen subobscura ipsius PT refracta apparuit, cujus partes in directum jacere & à quâ colores aliquantulum prostare visi sunt; id quod ex imperfectione & misturâ in utrisque fili coloribus latente contigit. Nam quanto illustriores erant & simpliciores, ea linea tanto obscurior evasit, & colores *pr* & *st* clariores & magis interrupti.

136. Cæterùm cùm lux, quam filum tenue reflectit, perexigua sit, præstat adhibere corpus aliquod expansius, quale per PN (fig. 43.) designatur; quod v. g. concipe papyrum esse, ex parte PRLK Cæruleam, & ex alterâ parte Rubeam. Tum prismate juxta oculum interposito, nigroque corpore aut loco tenebroso pone hoc Objectum sito, videbis imaginem Cæruleæ partis paulo longiùs translatam esse, terminis *pt* & *kn* in confinio colorum, *rs* & *lm*, ut ante diffractis. Sed hîc summè cavendum est, ut papyrus cum crassis & intensis coloribus illinetur.

EXPER. XXII.

137. Huic affine est experimentum, cùm statui duo prismata ad foramina duo, quibus lucis patuit aditus in tenebrosum cubiculum; ac in eo situ disposui, ut unius Purpura & Rubor alterius in eundem locum coirent. In quo loco fixi papyri segmentum circulare, & non latius dimidio vel triente latitudinis coloratarum imaginum; eapropter ut duobus illis solummodo coloribus illuminaretur. Quo facto papyrus pallidi cujusdam coloris apparuit. Tum, cæteris utrinque coloribus Objecto nigro terminatis, vel, quod satius erat, longius projectis, ut præfata papyrus nigredine vel tenebris circumcincta appareret, tertium prisma ad oculum applicavi; & ad distantias abinde pro arbitratu varias me submovens, unicæ illius subpallidæ papyri geminam vidi imaginem, Purpuream & Rubeam. Et imago Purpurea longius à papyro translata erat quàm Rubea, prout major eorum radiorum Refrangibilitas exigit. Rem schemate 44 designatam habes, ubi papyri *p*T imagines sunt X & Y.

138. Ad eundem modum si duo Pulverum genera, quorum alterum perfectè rubrum est, & alterum purpureum vel indicum, sine

sine misturâ cyanei, viridis, aut flavi parari possent, Objectum aliquod perexiguum, cum misturâ pulverum istorum crassè illitum, geminam imaginem exhiberet: spectaculum fortè causas ignorantibus mirandum. Sed vereor, ut Pulveres coloribus adeo simplicibus præditi parari possint. Prisma in oculum transmissis.

139. His præterea non multum dissimile est, cum colores duorum prismatum ita in parietem trajiciuntur, ut, unius Rubore contingente Purpureum alterius, in directum jaceant, quemadmodum videre est ad P, τ; & mediante prismate, parallelis interposito, intuentur. Nam imagines non ampliùs in directum jacebunt, sed ab invicem apparebunt distincta, sicut ad *mn* & *μν* designantur, fig. 45.

140. Atque ita, si duo prismata A ac B (fig. 46.) sic statuantur, ut eorum colores ad locum P*p* adæquatè coincidant in ordine tamen contrario; Purpurâ alterius, A, cadente ad *p*, & Rubore ad P; alterius autem, B, Purpurâ cadente ad P & Rubore ad *p*: & per tertium prisma EF imagini P*p* parallelum perspexeris; unicæ P*p* duas decussantes imagines intueberis; alteram, MN, è coloribus prismatis B productam; & alteram *mn*, è coloribus prismatis A. Et quo longiùs ab Objecto P*p* te conferas, eo magis extremitates imaginum, M à *n* & N à *m*, distabunt.

141. His etiam contraria sunt experimenta, quòd Objecta duo, sive sunt circelli chartacei X & Y (fig. 44. diversis coloribus illustrati, sive diversorum prismatum paralleli vel decussantes colores, ut MN & *mn* (fig. 46.) ita possunt mediante alio prismate conspici, ut in unum coalescere videantur.

EXPER. XXIII.

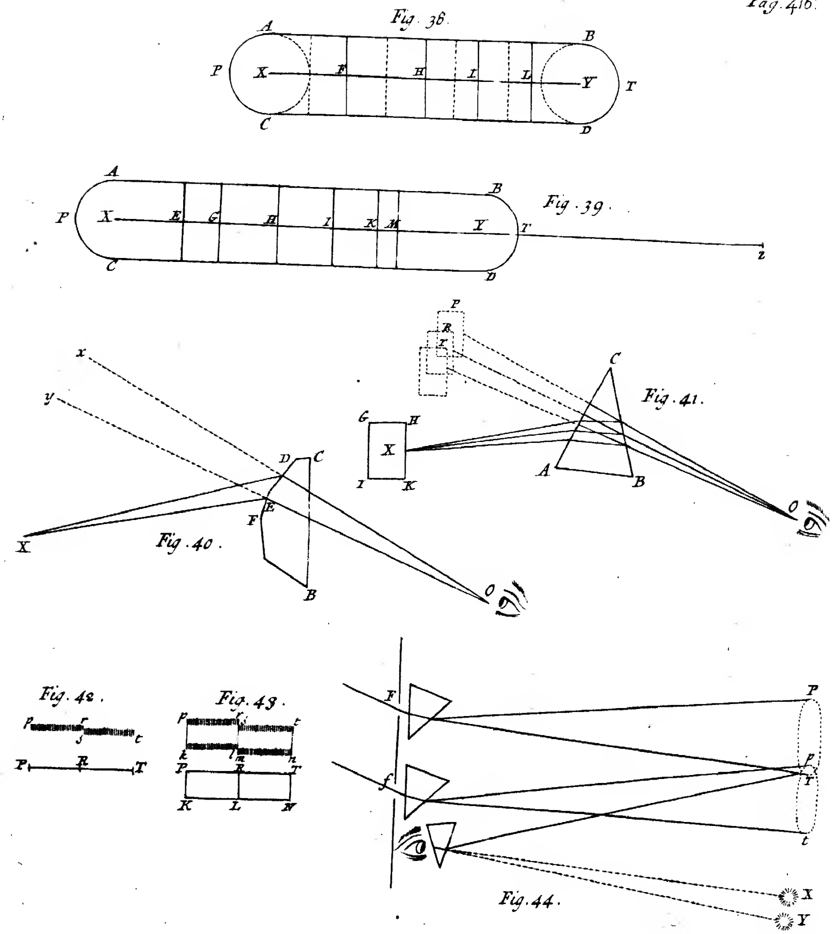
142. Et præter jam recensia perinsigne est hujusmodi experimentum, quo Objecta coloribus per interpositionem prismatis denudantur, quibuscum nudo oculo tincti apparent. Instantiam in Solis imagine coloratâ accipe, quæ in parietem à prismate ABC (fig. 47.) projecta, cùm cernitur mediante alio parallelo prismate, *abc*, manibus prehenso, cujus vertex ad plagas versus Rubeum colorem convertitur; si spectator se longiùs ab imagine gradatim amoveat, percipiet colores paulatim contrahi, & ad invicem eousque accedere, donec tandem uniti reficiant imaginem albam & circularem.

De Phænomenis Lucis per circularem. Id quod accidet, cùm ſpectatoris eadem eſt à coloribus diſtantia ac priſmatis ABC; ſi modo priſmatum anguli verticales æquentur. Et ratio ex eo manifeſta eſt, quòd oblongam illam imaginem, ex circulis, ſive circularibus imaginibus, infinitè multis, & in longum continuè diſpoſitis efformatam eſſe docuerim; quare quæ ſunt ad Purpuream extremitatem longiùs per refractionem ſecundi Priſmatis transferuntur, ut cæteras aſſequi poſſint, & ſic omnes coincidere.

143. Ad hunc modum cùm Objecta quælibet, ut QR, foras poſita confuſas & coloratas eorum imagines, ut x/ ad parietem per priſma tranſmittunt; ſi mediante alio priſmate inſpicias, poſſis imagines haſce coloribus denudare & efficere præterea, ut diſtinctiores appareant, quemadmodum ad *qr* (fig. 47.) videre eſt. Quoniam verò ad ſufficientem copiam lucis requiritur, ut foramen F ſit amplum; per ejus autem amplitudinem tranſmiſſæ imagines evadunt confuſæ; lens aliqua convexa, ut MN, prope foramen iſtud ſtatuenda eſt, quæ radios à ſingulis punctis Objecti, foras poſiti, venientes congreget in totidem aliis punctis ad parietem; & inſuper Priſmata debent eſſe admodum tranſparentia, perpolita, & ſuperficiebus accuratè planis terminata, inque ſitu quàm poteris exactè parallelo diſpoſita. Tanta quidem diligentia non requiritur, ut imagines *qr*, *s* ſine coloribus appareant; ſed ut inter tot ac tantas refractiones diſtinctæ appareant, præter accuratam fabricam vitrorum, requiritur experientis ingenium, quo omnia rectè diſponantur.

144. Hic in cumulum præterea adjici poteſt, quòd Objecta, quo ſimpliciori luce illuminantur, eo diſtinctiora per priſmata apparent; quippe cùm eorum per priſmata ſub dio viſorum confuſio ex inæquali refrangibilitate illuminantium radiorum oriatur. Et hinc eſt, quòd ſolaris imaginis ſæpiùs commemoratæ termini rectilinei, in quibus nullam eſſe heterogeneorum radiorum commiſturam indicavi, præ cæteris omnibus Objectis diſtincti, mediante Priſmate, appareant. Et ſic muſcæ, & ſimilia animalia, cùm in Rubeâ vel aliâ quâvis luce ſimplici, priſmatibus elicitâ, ſtatuantur, tranſvidentur ſolito diſtinctiores. Quinetiam oculus Engyſcopio armatus, omnia, hâc luce ſimplici illuſtrata, diſtinctiora cernit.

Tab. VII. Pag. 416.



cernit. Id quod infignem in contemplatione Infectorum, vel texturæ aliarum rerum naturalium præ fe ufum ferre poteft. PER PRISMA TRANS-MISSÆ.

145. In tertiâ Propofitione fuprà de Phænomenis quibufdam differui, ubi è radiis, ad refringentem fuperficiem æqualiter inclinatis, aliqua genera pervafère, dum alia penitus reflectebantur; & illis affinia quædam jam attingere opportunum duco. Efto s fpectatoris oculus, quo lucem à nubibus fub dio ingreffam planum FG (fig. 48.) reflexam à plano HI, & plano FH regreffam excipit; & cùm Prifma commode ftatuitur ita, ut radiorum, è medietate bafis HI verfus oculum reflexorum, angulus reflexionis fit quafi 50 gr. pars proximior bafis remotiori aliquantum obfcurior videbitur; & in utriufque partis confinio fimbria, qualis DE, fubcærulei coloris apparebit. Utpote cùm radii, qui à remotiori parte bafis ad oculum reflectuntur, obliquiùs incidant, quàm qui eò refiliunt à parte proximiori; talis poteft affignari eorum circa medium bafis obliquitas, ut è proximioribus, propter minorem obliquitatem, aliqui perrumpere & refringi poffint; dum remotiores, propter majorem obliquitatem, omnes ad oculum reflectuntur. Sic ad Vitrum, cujus refractionem per rationem finuum 42 ad 62 metimur, in plano SABC ad prifmatis longitudinem tranfverfo, pofito angulo c*t*s 49°. 22′, ang. c*r*s 49°. 44′, & ang. c*p*s 50°. 5′; *t* erit limes refractionis rubiformium radiorum, ultra quem nulli fuperficiem HI penetrabunt, qui propter debitam obliquitatem incidentiæ ad oculum reflecti poffunt; & à citeriori parte c*t* complures è radiis fic incidentibus, propter minorem obliquitatem, pervadere poffunt & refringi; qui oculum peterent, fi modò reflecterentur. Et fic *r* erit limes radiorum viridiformium, & *p* limes purpuriformium. Adeoque fuperficiei IH pars citima c*p*, propter complures radios omnis generis tranfmiffos, obfcurior apparebit quàm pars ultima *t*B, quà omnes, qui oculum attingere, eò reflectuntur. Et quia rubriformes à limite *t*, & viridiformes à limite *r* incipiunt ex parte pervadere, manifeftum eft, quòd ex illis pauciores à fpatio *pt* ad oculum refilient, quàm è purpuriformibus; qui non priùs incipiunt pervadere, quàm ad limitem *p*: ut & pauciores, quàm è cæruliformibus, qui ad limitem inter *p* & *r* tantùm pervadere incipiunt. Et proinde

in illo ſpatio Purpureus & Cæruleus color aliquantulum dominabitur. Deque totâ ſubcæruleâ lineâ DE conſimilis eſt diſcurſus.

146. Hæc autem linea non recta eſt, ſed in morem arcûs incurvata; propterea quòd puncta radios à baſi Priſmatis ad oculum, in angulo reflexionis dato, reſilientes reflectentia ejuſmodi Curvam conſtituunt.

147. Quod ad Refractiones in ſuperficiebus Priſmatis FG & FH factas ſpectat, nihil refert in remotiori FG quænam ſint; dummodo radii è proximiori FH perpendiculariter emergant, angulo KHG exiſtente quaſi $40\frac{1}{4}$ gr. Quòd ſi angulus ille major exiſtat, colores in lineâ DE, adjuvante refractione, paulo diſtinctiores evadunt; & minùs diſtincti, ſi ſit minor. Major etiam oculi à Priſmate diſtantia, vel (quod perinde eſt) pupillæ coarctatio, colores nonnihil perficit.

148. Ad hæc, cùm duo Priſmata, parallelis axibus & baſibus contiguis, ad invicem applicantur, & in eo ſitu colligantur, iidem omnino effectus per radios ab aëre intercluſo reflexos producantur. Sed radii tranſmiſſi contrarios exhibebunt. Eſto ACDB (fig. 49.) ſectio utriuſque Priſmatis ad orum longitudines perpendiculariter tranſverſa, & CB contactus baſium, aut potius aër intercluſus. Quippe Priſmata vix queant tam arctè comprimi, quin ut aër nonnullus, in morem tenuiſſimæ lamellæ, maneat intercluſus. His poſitis, oculo *S*, radios à CB, lamellâ aeris interjectâ, reflexos intercipienti omnia apparebunt ut antè: at oculo *s* trajectos excipienti omnia cernentur contraria; ſpatio *t*B opaco & obſcuro exiſtente, & C*p* tranſlucido; ac eorum confinio *pt* juxta *t* Ruborem ſaturum, juxtaque *r* Citrium Flavumque exhibente; qui color uſque ad *p* gradatim diluitur, ubi in Album *p*C deſinit. Et hi colores longe intenſiores & illuſtriores apparent, quàm ſubcæruleus color ex alterâ parte ad oculum S reflexus. Quorum quidem omnium rationes è ſupra dictis patent; ſiquidem è radiis verſus oculum *s* tendendibus, qui incidunt in ſuperficiei partem *t*B, omnes propter nimiam obliquitatem alio reflectuntur, ſolique rubriformes ſuperficiem iſtam, à C uſque ad limitem *t*, viridiformes ad limitem *r*, & purpuriformes ad limitem *p* tantùm pervadere poſſunt.

149. Cæterum hìc cavendum eſt, nequa lux in ſuperficiem CB à parte D incidat, quæ vel ad oculum *s* reflexa, vel tranſmiſſa ad oculum S, colores conturbet. Et inſuper ne refractiones, à ſuperficiebus AB & CD factæ, ad effectus jam explicatos quicquam conducere videantur; præſtat ut ſuperficies iſtæ ſtatuantur parallelæ: quo mutuos effectus, ex opinione receptâ, deſtruere poſſint.

SECTIO QUARTA.

De phænomenis Lucis per Medium Refractivum parallelis planis terminatum tranſmiſſæ.

150. Tranſactis Triangularium Priſmatum phænomenis, quæ Quadrangulis per parallela plana efficiuntur, jam opportunè ſubveniunt enarranda. Id quod lubentius aggredior, cùm Philoſophi hactenus crediderunt colores nullos hoc pacto generari; exiſtimantes poſteriorem ſuperficiem effectus omnes, per contrariam refractionem, radiis auferre, quos prior inducit: & hoc pro experto habere rati, quod in Vitris feneſtrarum, aut aliis conſimilibus, nullos produci videant. At in eo decepti ſunt, quòd hujuſmodi Colorum quantitas & perfectio dependet à diſtantiâ parallelarum ſuperficierum. In laminis quidem vitreis, propter parvum ſuperficierum intervallum, Colores ſunt adeo tenues & exiles, & in ſpatio tam anguſto comprehenſi, ut effugiant ſenſus: at, cùm vitra magis craſſa adhibentur, aut potius vitrea vaſcula parallelepipeda, aquâ limpidiſſimâ plena, Colores tunc liquidò generari cernuntur.

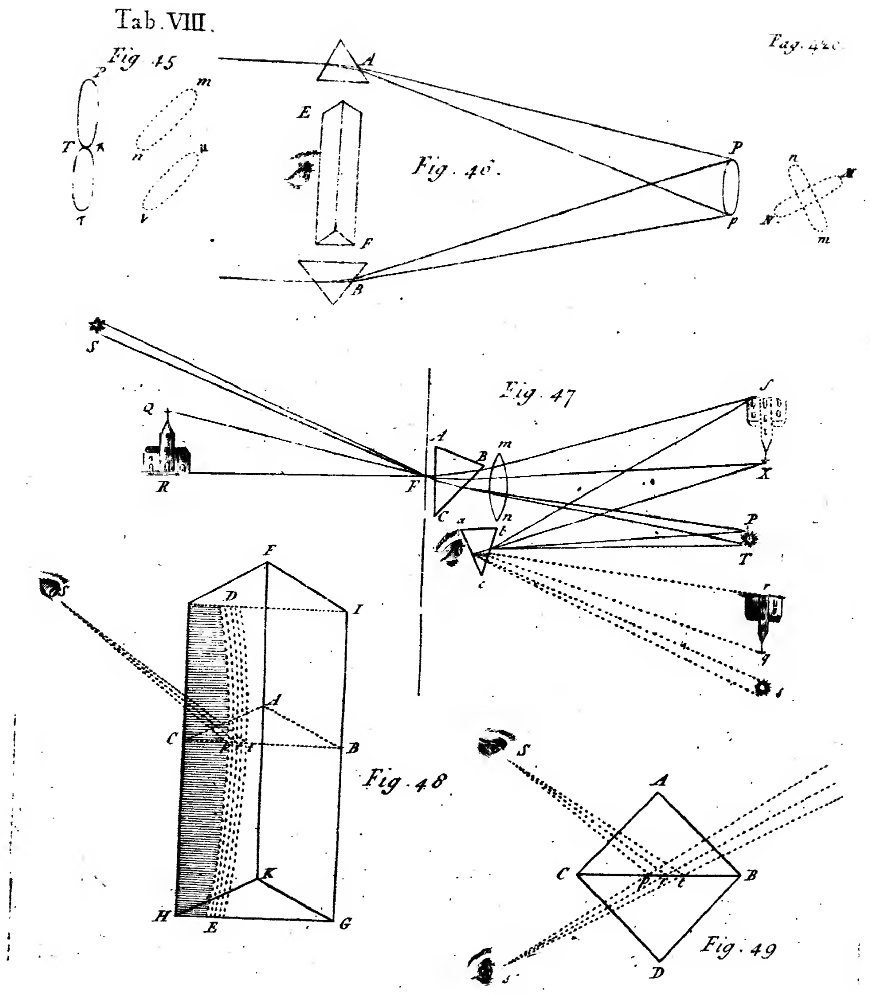
151. Nam concipe ABCD (fig. 50.) eſſe Vitreum vel Aqueum parallelepipedum aëre circumcinctum, cujus ex oppoſitis & parallelis planis duo lineis AC & BD deſignentur. Et Sol illud per exiguum foramen F obliquè tranſluceat, ejuſque paralleli vel convenientes radii in anteriori ſuperficie ad H ita debent inæqualiter refringi, ut ab invicem deinde divergent, uſque dum incidant in poſteriorem ſuperficiem ad PT, & ibidem colores omnigenos depingant, perinde ut ſuprà ſat fusè explicui. Jam, cùm propter paralleliſmum ſuperficierum refringentium radii tantum à poſteriori recurventur, quantum incurvantur à priori, neceſſe eſt, ut ſibi ipſis ex aere ſecundum SH incidentibus emergant paralleli:

GENERATIO COLORUM

adeoque diſtantias ac poſitiones acquiſitas in infinitum ſervent, & elicitos colores eo uſque ſine aliquâ variatione promant. Quemadmodum ſi PH è refractis ad H ſit purpuriformis radius, & TH rubriformis; eorum denuo refracti Pp ac Tt incidentibus SH, adeoque ſibimetipſis paralleli emergent; & proinde Purpuram & Rubedinem, quam ad P ac T exhibuere, ad quamlibet diſtantiam pt immutatam transferent, & ſine quâvis uſpiam variatione conſervabunt, Purpureo à P in p tranſlato, Rubeo à T in t, cæteriſque à locis intermediis in loca correſpondentia.

152. Hoc equidem præciſè debet evenire, ſi modò radii ſecundum eundem SF, vel parallelas lineas, in hoc Priſma inciderent; ſiquidem tunc emergent paralleli. At, cùm inclinantur ad invicem, uti de promanantibus à diverſis partibus Solaris diſci contingit, tunc etiam emergent inclinati, & eapropter mutationes quaſdam in ulteriori tranſlatione patientur. Utpote circuli, à ſingulis radiorum generibus effecti, ex quibus in longum diſpoſitis colorata Solis imago in ſuperficiem BD procidens conſtituitur, propter divergentiam radiorum, in foramine F decuſſantium, eo dilatiores evadunt, quo radii longiùs poſt emergentiam fluunt; dum eorum centra, quæ radiis à centro Solis, ſecundum eandem quampiam lineam ante refractionem, effluentibus illuminentur, eaſdem, poſt refractionem, diſtantias & poſitiones inter ſe perpetuò conſervant. Et hinc eſt, quòd ſpatium prt ſolari luce in tenebroſum cubiculum immiſſâ illuminatum, eo magis dilatetur, & in orbicularem formam contrahatur, quo longiùs poſt Priſma terminatur; & Viriditas in medio R, ſiqua ſit, paulatim tranſmigret in Albedinem; vel ſi nulla ſit, ſed propter anguſtiam Priſmatis hujus, aut amplitudinem foraminis lucem intromittentis, Albedo medietatem colorum occupet, eadem Albedo ſenſim dilatetur. Sed colores tamen hinc inde non diluuntur, nec in ſpatium anguſtius contrahuntur, utut minus luminoſi propter dilatationem imaginis evadant.

153. Ad hæc ſi mediante Parallelopipedo intueamur Viſibilia, coloribus non ſecus tingantur, quàm ſi priſma triangulare adhiberetur; præſertim ſi Parallelopipedum ad pertranſientes radios ſat obliquetur, ut multum refringat, & Objecta ſint admodum propinqua. Nam, ſi Objecta longinqua ſint, ſive intervallum iſtud intercedat



intercedat Parallelepipedum & Objecta, five Parallelepipedum & oculum, utcunque refractio per obliquitatem Parallelepipedi fiat magna, colores tamen non generabuntur. Sit X (fig. 51.) punctum lucidum, radios per parallelepipedi refringentia plana, AC & BD, ad oculum S emittens; & manifeftum eft, quòd ductâ S*t*NX, quæ rubriformem radium defignet, & S*p*MX, quæ defignet purpuriformem, hi radii ad utramque fuperficiem æqualiter refringentur; adeoque triangula, *pst*, MXN, fimilia conficient, purpuriformi radio, propter majorem refrangibilitatem, hinc & inde apud *p* & M plus vergente à directo tramite quàm rubriformis: unde neceffe eft, ut fefe alicubi intra Prifma decuffent, quemadmodum videre eft ad O, iterum conficientes triangula *pot*, MON fimilia, five trapezium S*pot* fimile trapezio XMON; adeoque oculum petent, tanquam fi primariò fluxiffent ab eodem O, & refractionem ab unicâ tantum fuperficie AC paffi fuiffent. Et hinc non tantùm fequitur Colores generari, fed & angulum *pst*, five colorum apparentem latitudinem, aliafque circumftantias pro quâlibet oculi pofitione determinari poffe. Quemadmodum manifeftius erit, fi conferas cum experimento, quo Objecta, in aquam altè immerfa, oblique infpicienti coloribus nonnihil tincta videntur, propter refractionem ftagnantis fuperficiei. Nam AC fuperficiem ftagnantis aquæ, & O Objectum aliquod immerfum, quod fpectator S intuetur, referre poteft. Quod quidem O facilè invenies, ducendo rectam SX, quæ refringentes fuperficies fecet in K & L, ac dividendo in O, ut fit SK ad LX ut SO ad OX, five ut KO ad OL.

A PLANIS PARALLELIS.

154. Quinimo ad hæc experienda pro Parallelepipedo vas optimè adhiberi poteft, quod in fundo transfoditur, & vitri laminâ perpolitâ & horizonti parallelâ refarcitur, ut aquam cohibere poteft. Nam, cùm aqua ad altitudinem pedis, aut ampliùs, infunditur, Lux, per vitri aut aquæ iftius parallelas fuperficies obliquè trajecta, Colores pro more explicato producet, poffifque fucceffive collocando Objecta ad X & O phænomena conferre. Id quod etiam fieri poteft difponendo duo vitrea Prifmata triangularia ut ACE, DBF (fig. 52.) ad diftantiam pedis aut amplius in eo fitu, ut eorum latera correfpondentia AC & DB & CE ad BF evadant parallela, & radii per interiores fuperficies perpendiculariter proximè trajiciantur.

GENERATIO COLORUM

trajiciantur. Tunc enim exteriores AC & BD refringentia plana Parallelepipedi referent. Et propter Vitri majorem quàm Aquæ vim refractivam, Colores eliciantur magis illustres.

155. Et hæc de Colorum à parallelis planis genesi monuisse sufficiat; nisi fortè juvet annotare diversitatem effectuum, qui ab hisce producuntur, & à Triangularibus Prismatibus. Ejusmodi sunt 1° Quòd Colores, cùm in papyrum projiciuntur, splendidiores evadunt per auctam papyri longinquitatem, si modo Prisma sit triangulare; sin Parallelepipedum, hebescunt. 2°. Cùm Objecta per Prismata triangularia transpiciuntur, Colores itidem splendidiores evadunt ex Objectorum auctâ longinquitate, at secus fit in parallelepipedis. 3°. Cùm Sol transflucet Prisma triangulare, Colores oriuntur terminando lucem ex utrâvis parte Prismatis: at cùm transflucet Parallelepipedum, Colores non oriuntur terminando lucem à posteriori ejus parte. Cujus rei ratio est, quòd heterogenei radii à triangulari Prismate divergentes fiunt, adeoque post emergentiam plus plusque segregantur; at in parallelismum restituuntur emergentes è Parallelepipedo, & non ampliùs ab invicem recedunt. Denique notum est, quòd Colorum, in extremam partem oculi, in Solem vel lucernam per Prisma triangulare respicientis, quilibet astans videbit ordinem ei contrarium, quem videt ipse spectator. At, cùm Parallelepipedum adhibetur, idem erit ordo colorum in utroque casu, propter decussationem radiorum in Parallelepipedo, ubi spectator transpicit, quemadmodum inspicienti schemata manifestum.

156. Et ex hâc effectuum diversitate phænomenon componitur, quo Colorum ad diversas distantias diversi fiant ordines. Utpote per vas aqueum ABCD (fig. 53.) in cujus fundo YZ refert laminam vitream, quam in superioribus horizonti parallelam esse suppofui, jubare trajecto, si vas ad partes Solem versus elevetur, ut fundum ejus magis obliquetur ad perlabentem lucem, quam superior stagnans superficies; heterogenei radii, propter majorem in egressu refractionem, convergentes evadent, adeoque decussando mutabunt situm. Si lucem chartâ proximè egressam excipias, Purpura cadet infra Ruborem; & chartam longiùs differendo, in loco decussationis, per commisturam, evanescent converſi in

Albedinem; ac postea de novo emergent in ordine contrario, ut videre est ad Q, R & V.

A PLANIS PARALLELIS.

157. Ad aliud experimentum jam transeo, his quodammodo affine; quo Colores non à parallelis quidem superficiebus generantur, sed è superficiebus ita inclinatis, ut, interpositâ reflectione, parallelarum rationem habeant. Sit SF (fig. 54.) linea coloribus omnigenis irradiata, quorum Purpurei, dum ad F ingrediuntur Prisma, refringuntur versus H, & Rubei versus G: abinde verò reflectuntur ad K & I, unde egredientes refringuntur denuo ad M & L. Dico jam, si Prismatis anguli ABC & CAB æquentur, emergentes radii, IL & KM, paralleli erunt. Nam in triangulis FGA, IGB, cùm anguli A & B ex hypothesi æquentur; ut & anguli FGA & IGB, propter æqualitatem incidentiæ & reflectionis; triangula erunt similia, angulique AFG, BIG æquales; atque adeo æqualis erit refractio in F & I, & inde anguli CFS, CIL æquales. Et eâdem ratione patebit angulum CKM angulo eidem CFS æqualem esse, adeoque radios IL & KM parallelos. Jam, cùm radii IL & KM, secundum eandem lineam SF successivè incidentes, non secus emergant paralleli quàm in præcedentibus, ubi superficies refringentes erant parallelæ, eadem omnia phænomena, quæ ibi ostensa sunt, huic competere certum est. Quemadmodum lucem Solis coloribus tingi, si Prisma satis amplum adhibeatur, ut spatium FGI vel FHK sufficiat ad efficiendam sensibilem divergentiam radiorum, antequam per iteratam refractionem in parallelismum reducantur; sed ejusmodi Colores non perfectiores per longinquitatem obstaculi, quo interciduntur, evadere. Item istos colores, si oculo postposito immediatè excipiantur, eo magis manifestos fore, quo Objectum, quod intuemur, sit oculo propinquius, ut & eo magis, quo anguli CAB & CBA majores existent; & eundem denique ordinem servare cùm in obversum oculum directè mittuntur, atque cùm cernuntur ad parietem aliudve obstaculum terminati. Hæc inquam evenire debent, si amplum Prisma adhibeatur (quale ex aquâ vitro circundatâ fabricari possit) & anguli A & B constituantur æquales. At in angustis Prismatibus distantia radiorum IL & KM minor est, quam ut colorum sensibilis possit esse latitudo; & cùm anguli A & B sunt inæquales, perinde

GENERATIO COLORUM.

perinde est, ac si refringentes superficies in præcedentibus non sunt parallelæ, & similes sunt effectus.

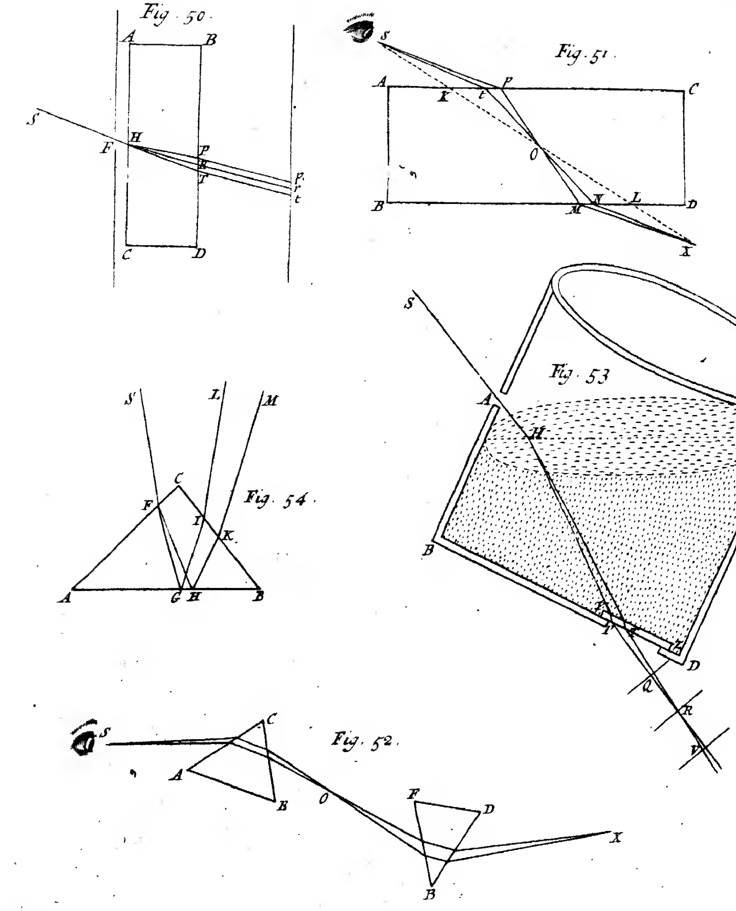
158. Quod de Coloribus dicitur, cùm unica tantùm reflectio refractionibus intervenit, facilè applicatur ad alios casus, ubi plures interveniunt; sed placet aliquod præterea de reflexionibus exponere, quibus generantur effectus, quos solæ refractiones exhibere possunt. Sit SF (fig. 55.) ut prius linea diversis coloribus successivè irradiata; qui, versus *p*, *t* aliaque intermedia loca pro gradibus refrangibilitatis refracti, à Prismatis latere BC reflectantur ad M, N, ubi iterum impingentes in latus AC refringantur denuo ad PT; & colores ad PT perinde apparebunt, atque ad $\pi\tau$ apparerent, si modò radii F*p*, F*t*, &c. per duplum Prisma ABC, i. e. per Prisma, cujus angulus verticalis AC*b* sit duplo major hujus angulo verticali ACB, rectâ fluxissent ad *mn*, & inde versus $\pi\tau$ refringerentur. Nam pares sunt omnes utrobique anguli, sive à plano BC per AC versus PT resiliant radii, sive longiùs per BC pergant ad $\pi\tau$; utpote angulus C*t*N (=B*t*F) = C*tn*; & inde CN*t*=C*nt*, adeoque CNT = C*n*τ. Atque idem in aliis radiis intellige. Cùm autem præcipuæ Colorum ad $\pi\tau$ circumstantiæ in superioribus tradantur, cramben jam reponerem, si quid amplius de persimilibus phænomenis ad PT instituerem dicere.

SECTIO QUINTA.

De phænomenis Lucis per Media Sphæricè terminata transmissæ, deque Iride.

159. Hactenus Colores refractionibus planarum superficierum generatos contemplati sumus; jam de Sphæricis superficiebus agendum est; & imprimis de lentibus, seu figuris à duabus diversarum sphærarum portionibus comprehensis. Ejusmodi autem lens esto MN (fig. 56.) per quam Lux Solaris juxta F*f* nec non undique terminata transmittitur. Sitque HK focus, ad quam postea convergat. Et, cùm radii similiter incidentes non omnes similiter refringantur, concipe, quòd radiorum secundum OF incidentium Purpuriformes refringantur ad K, Rubriformes ad H, & Viridiformes ad punctum intermedium *r*. Et pari ratione de radiis secundum O*f* incidentibus concipe, quòd Purpuriformes tendunt

Tab. IX. Pag. 424.



dunt ad H, Rubriformes ad K, ac Viridiformes ad *r*. Atque idem de radiis undique terminatis (juxta lentis peripheriam) concipe. Et patebit primò, si radii à papyro DL prius terminentur, quàm ad focum HK conveniant, quòd color Rubeus in confinio lucis & umbræ deberet undique conspici. Utpote si lineæ FH, F*r* & FK ipsam DL in punctis T, R & P secent; FH quidem in puncto T, F*r* in puncto R, & FK in puncto P: posito similiter quòd *f*H, *fr* & *f*K eandem DL in punctis π, ϱ ac ⅂ respectivè secent; & productis etiam FH & *f*K donec sibi in *t* occurrant; ut & FK & *f*H donec occurrant in *p*, constabit punctum *t* longiùs distare à lente quàm punctum *p*, quandoquidem cadit ultra focum HK, *p* verò citra. Et proinde puncta P & π interjacent punctis T & ⅂. Constabit etiam Purpuriformes radios per totum spatium Pπ solummodo dispergi, propterea quòd per integrum spatium F*f* in lentem parallèlè incidentes versus locum *p* refringantur; & sic radii Viridiformes spatium Rϱ occupabunt, ubi & Rubiformes spatium T⅂, extra quod nulli omnino ex radiis parallelè incidentibus (nisi contingenter & nulla certâ lege propter bullulas quasdam aliaque vitia in vitro latentia refracti) possint divaricare. Quare spatium, Pπ à radiis omnium colorum illuminatum, debet albescere. At cùm Purpuriformes desint à spatiis R & ϱ, cæterorum mistura debet exhibere Flavum. Atque ita, cùm soli Rubiformes extendantur ad T & ⅂, in locis T ac ⅂ Rubor apparebit, & spatium illuminatum Pπ (quod orbiculare concipe) duobus colorum circulis, Rubeo Flavoque, tingetur. Hæc equidem eveniunt, cùm charta DL inter lentem & punctum *p* collocatur. Et colores tanto perfectiores evadunt, quo charta sit puncto *p* propinquior. Et, cùm statuitur ad ipsum *p*, Albor è medio penitus evanescere deberet, si modò radii à diversis partibus solaris disci ad lentem manantes inciderent paralleli. Quòd si charta paulo longiùs amoveatur, uti ad *r*, ubi Viridiformes radii concurrunt, adversi colores ubique ad illam distantiam miscebuntur, & se invicem ita delebunt, ut vix alius quàm albor apparebit. Si charta deinceps adhuc longiùs transferretur, puta ad *dl*, invertetur radiorum ordo, & puncta ⅂ ac T interjacebunt punctis P & π, adeoque spatium T⅂ ab omnibus coloribus illuminabitur, & proinde albescet; & in spatiis circa R & ϱ, ad quæ Rubor non extenditur, Cæruleus componetur; & Violaceus

ALENTIBUS.

Violaceus apparebit in extremitate summâ P & π. Qui quidem Colores non tantùm manifestiores sunt, quàm Rubor & Flavus per interpositionem chartæ inter lentem & focum ut priùs emergentes; sed perpetuò manifestiores evadunt, quo charta adhuc longiùs amovetur.

160. Latitudo spatii sic tincti coloribus ex præmonstratis petenda est, vel etiam sic facilè determinari potest. Cùm differentia refractionis radiorum, in refrangibilitate maximè discrepantium & similiter incidentium, sit quasi septuagesima pars totius refractionis, ut ex ostensis patet; et, cùm angulus HFK designet differentiam refractionis, angulusque $F r f$ summam refractionum utrinque ad F & f factarum, hoc est, duplum refractionis juxta alterutrum F & f: angulus HFK erit quasi septuagesima pars semissis anguli $F r f$, sive $\frac{1}{140}$ pars totius $F r f$, & proinde subtensa HK quasi $\frac{1}{140}$ pars latitudinis $F f$, per quam luci patet aditus, aut eâ fortasse paulo major. Denique, cùm sit $F r$. FR : : HK. TP vel $\rceil\pi$, dabitur intervallum TP vel $\rceil\pi$, quod quærebatur. Si quis autem cupit, ut hæc exactiùs determinantur, computatio non est adeo difficilis, quin ut ipse adhibito calamo perficiat. Quod ad lentes utrinque concavas attinet, è jam ostensis facile constabit eas lucem trajectam in ejus extremitate cum Cæruleo tingere. Quæ vero de lentibus utrinque convexis vel concavis dicuntur, de convexo-concavis æquipollentibus sunt etiam intelligenda.

161. Sunt & alia phænomena, quæ de lentibus explicare possem. Sed cùm Oculi pars interior (Humor nempe Crystallinus ac Tunica Cornea) speciem lentis radios ad retinam congregantis referat, de ipsâ maluissem nonnulla dicere. Eorum tamen, quæ de lente jam explicui, nolo aliquid enixè repetere, cùm ad oculum facilè applicentur, utut expertu satis difficilia sint; propterea quòd ægrè possimus efficere, ut oculi pars anterior & posterior ad invicem ita accedant, aut ab invicem recedant, sicut de lente & papyro lucem terminante descripsi. Quapropter radii ut plurimum eo modo in Retinam procidunt, quo posui terminatos esse in papyrum $\delta\lambda$; atque adeo, propter misturam dissimilium, quæ ab oppositis partibus pupillæ adveniunt, Colores mutuò delebuntur, & convertentur in Album; si Objectum quod intueamur sit album, aut

aut in illum quemlibet colorem, quocum Objectum tingitur, si- quidem ille tunc cæteris debet prævalere. De Oculo.

162. Cæterum ex hisce detegitur modus, quo omnia, quæ nudis oculis intueamur, possint ita tingi Coloribus, ac si Prisma interponeretur, licet multo minùs manifestò. Idque si radii per alteram partem pupillæ transituri ab interpositione digiti, vel cujuslibet obstaculi, prope oculum intercipiantur; dum radii ingressuri alteram partem liberè transire permittantur. Hujusce verò rei duos casus non pigebit explicare: alterum, cùm radios intercipimus ad partes versus Objectum lucidius; posito nempe quòd Objecta duo, album & nigrum, juxta posita intueamur; & alterum, cùm radios intercipimus ad partes versus nigrius. Sit (fig. 57.) ergo LB Objectum lucidum, & BD obscurum, quorum terminus communis sit B; à quo radii in oculum, dl, juxta oppositas partes pupillæ, $F f$, promanantes sint BF & Bf; radii autem secundum lineam BF in oculum pergentes, pro gradu refrangibilitatis, refringantur versus H, r & K. E contra verò, qui pergunt in lineâ Bf, refringentur versus K, r & H, cæteraque gradatim intermedia loca, prout de lente modò explicui. Ponamus jam, quod $\varepsilon\zeta$ sit obstaculum, quo omnes radii prope f lapsuri intercipiuntur, prætermissis Bg, & ejusmodi aliis, per F solummodo tendentibus; & constabit primò, quòd ex radiis à diversis partibus Objecti LB manantibus, qui veniunt à partibus versus L in retinam incidunt propius ad l, quàm qui veniunt à partibus versus B, siquidem in pupillâ decussant. Et sic BD deberet radios versus Hr emittere. Sed cùm illud BD, propter nigredinem, nullos pene radios in oculum jaculetur, retina ld non ultrà versus d illuminabitur, quàm ad H. Quinimo non ad H usque illuminabitur, nisi à radiis rubriformibus; Viridiformes enim terminabuntur in r, & Purpuriformes in K; spatio lK à Purpuriformibus, lr à Viridiformibus, & lH à Rubriformibus illuminato. Quamobrem spatium lK, propter omnium radiorum misturam, albescet ad instar objecti BL; sed in exiguo spatio HK, quod termino B respondet, Colores generabuntur; Rubeus quidem ad H, propter solos Rubriformes radios illuc tendentes; & Flavus ad r, propter misturam Viriditatis, Flavedinis ac Rubedinis. Jam, cùm omnia videantur pro more imaginum, in oculum receptarum, constat Objectum LB juxta

De Oculo. juxta extremitatem ejus B non distinctè cerni, sed coloribus Rubeo & Flavo tingi.

163. Ad eundem modum si transferatur obstaculum *eg*, & cæteris stantibus Objecto interponatur & oculo secundum adversas partes pupillæ, prout videre est ad EG; eo ut radii juxta F intercipiantur, radiique B*f* in oculum præter BG ingrediantur: constabit è contra, quòd ex radiis à toto BL prosilientibus Purpuriformes occupabunt spatium H*l*; Viridiformes spatium *rl*; & Rubriformes spatium K*l*. Quare spatio K*l* ut prius albescente, color Violaceus jam debet apparere in H, & Cæruleus in *r*, & eapropter Objecti LB extremitas B jam aliis tingitur coloribus, Violaceo & Cæruleo.

164. Et ad eundem modum si duo quælibet Objecta, vel ejusdem Objecti diversæ partes juxta positæ, gradu lucis differant: etsi alterum non sit omninò nigrum, tamen Colores apparebunt in eorum communi termino; Rubeus quidem & Flavus cùm obstaculum ad partes versus Objectum obscurius; Violaceus autem & Cæruleus, cùm ad partes versus Objectum lucidius interponitur. Et ut paucis rationem denuo comprehendam, necesse est, ut radii ex unaquâvis parte pupillæ Colores producant, cùm radii ex adversâ parte sistuntur, à quorum omnium misturâ oritur temperamentum Albedinis. An isthæc verò phænomena vulgò observantur, haud scio. Sane non sunt inventu nec expertu tam difficilia, nec ab iis, quæ Cartesius sub fine capitis undecimi de Meteoris edocuit, tam aliena, quin cuiquam potuissent occurrere; nisi fortè quòd Colores illi propter tenuitatem vix sint sensibiles. Experimentum itaque fiat per Objecta longinqua; quorum alterum sit nigerrimum, & alterum satis candidum ad feriendum sensum, sed non tantâ luce resplendens, ut sensum obtundat, vel pupillam constringat. Nam hujusmodi effectus sunt eo magis manifesti, quo pupilla sit latior, & majori aperturâ radiis ingredientibus pateat.

165. Sunt & alii insigniores effectus, Irides nempe vel Coronæ, quales Cartesius circa Candelam quondam observabat, & in Meteoris explicuit. Et, cùm illæ solent apparere, quando oculi figura aliquâ vi, extrinsecus illatâ, vitiatur; necesse est, ut à curvaturâ aliquâ vel plicâ in tunicis ejus de novo formatâ oriantur. Crystallino

Crystallino autem vis non imprimitur, nisi mediantibus humoribus, quibus undique cingitur; &, cùm Fluida facillimè cedent pressuris, humores illi vim quamlibet illatam ita per totam molem diffundent, ut Crystallinum vix possunt inæqualiter premere, neque ideo figuram ejus vitiare. Id enim experti sunt, qui aquis altè submerguntur; nam, etsi tota aquarum moles incumbat illis, pressuram haud sentiunt; quæ tamen foret maximè sensibilis, si corporum submersorum partes ita premerentur inæqualiter, ut figuras eorum violare conarentur. Restat ergo, ut ejusmodi Coronarum sive Iridum generatio vitiosis configurationibus Tunicæ Corneæ illatis tribuatur; idque eo magis, quòd radii maximam refractionem in exteriori ejus superficie patiantur, & proinde per leviora ejus vitia à recto tramite detorqueri possint. Utut non pernegem, quin iis, qui laborant oculis, rugæ aliquæ, propter humorum defectum aut excessum, in Crystallini superficiebus, non minùs quàm in Tunicâ Corneâ, possint efformari. Nec non aliæ etiam colorum causæ possunt evenire; sed, cùm earum infinita sit varietas, & illæ sint eminentiores, quæ à vitiosis Tunicæ Corneæ figuris petuntur, non gravabor earum aliquod specimen exhibere, unde cæterarum causæ facilè patebunt. De Iride.

166. Notissimum est, quòd mollium partes non solùm pressioni cedunt, in quas vis immediatè imprimitur, sed & aliæ etiam partes remotæ, prout vim partium immediatè pressarum sustinent. Et ipse nonnunquam observavi in laminis convexo-concavis, & ex materiâ mediocriter rigidâ confectis, quales ex coriis bubulcis in morem segmenti superficiei sphæricæ contundendo formari possunt, quòd, cùm in meditullio seu vertice premuntur, non solùm ibi cedunt tactui sed & undique; ad instar vallis annularem collem, depressæ vertici circumductum, comprehendentis, intus flectuntur; idque citius & magis manifesto, si sint paulo rigidiores juxta verticem quàm prope peripheriam. V. G. Sit *knx* (fig. 58.) lamina sphæricè convexo-concava, quæ circulari ejus extremitati tanquam basi incumbens, mole aliquâ planâ, & ad basem ejus parallelâ, AB, prematur: & manifestum erit, quòd hæc lamina maximè cedet pressioni in vertice *n*, ubi ab incumbente mole primò contingitur. Sed in aliis etiam locis, ut in λ & *l*, possit etiam intus recedere, dum in locis intermediis, ut *m* & μ, partes

De Iride.

partes aſſurgunt. Atque hâc ratione configurationem acquiret haud diſſimilem aquæ undulanti, puteolo n referente centrum undarum, & ripâ m, μ referente undarum primam valle λ, l circundatam. Et ad eundem modum poſſibile eſt, ut tres vel plures valles premendo deſcendant, quorum culmina internata ſint, pluribus undis ſe invicem ſubſequentibus conſimilia. Et hujuſmodi configurationes ceſſante preſſione poſſunt aliquamdiu conſervari, gradatim tamen evaneſcentes. Nam, ut primùm preſſio ceſſat, cavitas in n ceſſabit fortè, & partes ibi in convexitatem aſſurgent, & gradatim fient plus pluſque convexæ, donec redeat figura, quam ante preſſionem habuere; & ſic cæterarum partium figuræ ad priſtinum ſtatum gradatim redibunt. Jam, cùm Tunica Cornea ad modum præfatum convexo-concava ſit, & mediocriter rigida, & circa medietatem ejus paulo craſſior, & proinde rigidior quàm juxta peripheriam, & ſiquando figura ejus ab externâ preſſione vitietur, probabile ſit illam preſſionem circa meditullium ejus maximâ ex parte contingere; itaque poteſt aliquando forſan accidere, quòd, cùm premitur, non ſolùm in apice cedat preſſioni, ſed quòd in pluribus etiam circulis apici concentricis parum aſcendat, & alternis vicibus deſcendat. Et hujuſmodi rugæ concentricæ poſſunt etiam ex defectu humorum, quo tunicæ flacceſcunt, nec non ex aliis fortè cauſis accidere; & quantumvis exiguæ ſint, poſſunt tamen radios ad alias atque alias partes Retinæ refringere, & ſic efficere, ut alii atque alii colorum circuli appareant. Sed ut videamus, quo pacto ex hujuſmodi rugis colores generari debent; ponamus radios è longinquo manantes, ſive parallelos, in ſuperficiem $k\kappa$ (fig. 59.) ita, ut dictum eſt, intortam, & in eâ refractos ſiſti deinde ab aliâ opacâ ſuperficie EF. Et, cùm hujus ſuperficiei partes depreſſiores radios ad puncta remotiora congregent, quàm partes aſcendentes ſive magis acclives; ponamus, quòd radii circa meditullium ejus $mn\mu$, ubi maximè deprimitur, congregantur ad G; quòd à partibus l & λ maximâ acclivitate ſurgentibus congregantur ad I; & ſic quòd à partibus k & κ, ubi rurſus deprimitur, congregantur ad H, & quòd ab intermediis partibus congregantur ad intermedia puncta. Ductis ergo mG & μG, lI & λI, kH & κH, occurrentibus ſuperficiei, ſeu obſtaculo, EF in punctis r & ϱ, ϖ & p, R & P;

nec

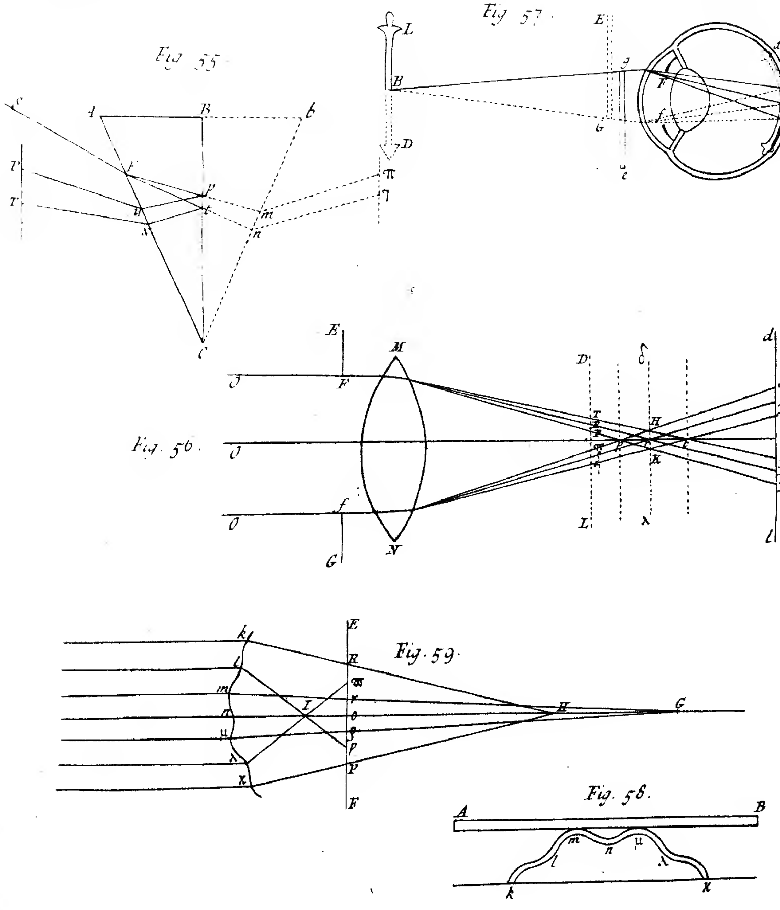
nec non axe GHI occurrente eidem EF in puncto o, ut & refringenti ſuperficiei $k\kappa$ in puncto n; & poſito quòd iſta EF interjaceat punctis H & I; manifeſtum erit perpendenti refractiones hujus $k\kappa$, in ſingulis ejus punctis à centro n ſucceſſivè ad extremitates k vel κ, quòd radii, prout longiùs ab n verſus m per refringentem ſuperficiem trajiciuntur, incidant in obſtaculum EF longiùs ab o verſus r aduſque certum terminum; puta dum ad radium mr deventum eſt: deinde quòd, facto regreſſu, incidant propius ad o, & poſtea ad alteras ejus partes pergant, donec iterum fiat elongatio maxima; velut in p, cùm deventum eſt ad radium lp: tum denuo revertuntur radiorum concurſus, idque continuo, prout ab l verſus k procedit refractio; donec tertio terminentur quemadmodum in R, occurſu radii kR. Ad eundem modum lux inter n & κ refracta terminabitur in punctis ϱ, ϖ, & P. Atque etiam, ſi plures eſſent rugæ, plures forent lucis terminationes. Cæterùm de luce per ſpatium $r\varrho$ diffuſâ, cùm cauſa, quòd extra vagatur punctum o uſque ad terminos r & ϱ, ſit ejus parva refractio prope m & μ; ſequitur, quòd radii minùs refrangibiles, hoc eſt Rubriformes, debent magis extravagari, & proinde terminus lucis r vel ϱ debet Rubedine tingi. Et ſic de luce per ſpatium ϖp diffuſâ, cùm cauſa, quòd extravagatur punctum o uſque ad terminos p & ϖ, ſit ejus nimia refractio prope l & λ; ſequitur, quòd radii magis refrangibiles, hoc eſt Purpureum & Cæruleum pingentes, debent longiùs deviare, & colores eorum in exteriori parte termini p & π depingere; unde in interiori ejuſdem termini parte Rubriformes radii ad ſuos etiam colores depingendos debent prævalere. Et ſimili ratione radii circa k & κ refracti, ſi ſint Rubriformes, tendent ad exteriorem partem termini R & P, & ad interiorem, ſi ſint Cæruliformes. Et ſic tres habebuntur irides; RP extra Rubea & intra Cærulea; $p\varpi$, extra Cærulea & intra Rubea; $r\varrho$, extra Rubea, quæ etiam debet eſſe intra Cærulea; niſi fortè, quòd color ille à rubeo propter parvitatem refractionis in μ & m, haud ſatis cernitur, ut fiat ſenſibilis; & propterea quòd multum obſcuratur à copiâ lucis undique per $ro\varrho$, locum imaginis lucidæ, quam cingunt Irides ſparſæ. Harum verò Iridum formæ & relationes inter ſe poſſunt variis modis mutari, idque non tantum è variis formis, quas ſuperficies $k\kappa$ poſſit induere, ſed etiam

è variis

DE IRIDE. è variis distantiis inter hanc kκ & obstaculum EF. Ut, si statuantur paulo magis distantes, quàm designavi, circuli RP & ϖp possunt coincidere, & mutuos colores delere, coeuntes in albicantem circulum. Sin magis adhuc distent, Iris ϖp cadet extra iridem RP. Quòd si EF statuatur ad locum I, hæc Iris pϖ evanescet, & potest etiam coincidere cum Iride rρ, si EF paulo ultra vel citra locum I statuatur. Jam verò horum omnium ad oculum facilis est applicatio, posito quòd obstaculum EF fundum ejus referat, & kκ Tunicam Corneam ab externâ vi, aut interno aliquo vitio, perperam curvatam. Quinetiam ex his non modò generalis causa harum Iridum declaratur, sed pro quibuslibet ejusmodi particularibus apparentiis causæ etiam particulares assignari posse videntur. Quemadmodum, si cui fax appareat unicâ tantum Iride cincta, cujus pars exterior rubet, interior verò vel alba, vel fortè nonnihil cærulea appareat; exinde concludi posse videtur, quòd cornea circa medietatem ejus sit paulo depressior, quàm solet esse sine aliquâ rugâ, qualem ad lλ descripsi. Efficit enim illa depressio, ut radii ab eodem puncto Objecti venientes ad puncta longè post retinam conveniunt; & qui proinde in retinâ spatium aliquod, quale est roρ, occupabunt, cujus peripheria (ut modo ostendi) Rubeo colore ad exteriorem ejus partem tingetur, & Albo vel dilutè Cæruleo ad interiorem. Et quo major hujusmodi Iris appareat, eo magis ad interiorem ejus partem debet Cæruleo tingi. Potest etiam hujusmodi Iris propter annularem rugam accidere, modò Tunicæ Corneæ figura in meditullio non simul vitietur.

167. Quod si duæ Irides appareant, illud ex utrâque causâ conjunctâ petendum est; corneâ nempe tum in medio, tum juxta peripheriam pupillæ, depressâ. In cujus rei illustrationem adhibeamus casum, quem Cartesius de se ipso in Meteoris Cap. IX. ad hunc modum describit. " Cùm noctu, inquit, navigarem, & totâ
" illâ vesperâ caput cubito innisus, manu oculum dextrum clau-
" sissem, altero interim versus cœlum respiciens, candela ubi
" eram allata est; & tunc aperto utroque oculo, duos circulos flam-
" mam coronantes aspexi, colore tam acri & florido, quàm un-
" quam in arcu cœlesti me vidisse memini. AB (fig. 60.) est
" maximus, qui ruber erat in A, & cæruleus in B: CD mini-
" mus, qui etiam ruber in C, sed albus versus D, ubi ad flam-
" mam

Tab. X. Pag. 432.



De Iride.

" mam usque extendebatur. Oculo dextro postea iterum clauso, " notavi has coronas evanescere; & contrà illo operto & sinistro " clauso permanere. Unde certo cognovi illas non aliunde oriri, " quàm ex novâ conformatione vel qualitate, quam dexter ocu- " lus acquisiverat, dum ipsum ita clausum tenueram; & propter " quam non modò maxima pars radiorum, quos ex flammâ ad- " mittebat, ipsius imaginem in o, ubi congregabantur, pinge- " bant: sed etiam nonnulli ex iis ita detorquebantur, ut per to- " tum spatium *rρ* spargerentur, ubi pingebant coronam CD, & " nonnulli alii per totum spatium RP, ubi coronam AB etiam pin- " gebant." Cùm itaque Cartesius hæc viderit, postquam per to- tam vesperam cubito innixus erat, rugæ, quales explicui, potue- runt imprimi; unde necesse erat ejusmodi coronas apparere: & quòd tres coronæ non apparebant, illâ scilicet non apparente cu- jus partem exteriorem cæruleam esse descripsi, & partem interio- rem rubeam, id ex eo venire debuit, quod radii in *l* & λ refracti, ex quibus hanc coronam generari deberet, haud citius quàm ad retinam convergebant, aut potius non tam cito. Non enim pro- babile videtur, quòd Tunicæ Corneæ pars aliqua ab externâ pres- sione possit fieri solito convexior; & nisi hoc eveniat, radii illi non possunt citiùs quàm ad retinam convenire. Illa verò tertia co- rona non potest apparere, nisi citius (ut ad I) conveniant. Si longè ultra convergant, coronam tunc quidem deberent efficere, sed cujus pars exterior rubesceret, & tunc tres coronæ in exte- riore eorum parte rubeæ conspicerentur. Sed in hisce videar ni- mius, præsertim cùm tanta causarum varietas non solum à Tu- nicâ Corneâ, sed Humore Crystallino, & aliunde etiam peti pos- sunt; ut haud sit difficile plures assignare, quæ eosdem quoslibet effectus diversis temporibus producant. Nescio tamen, an operæ pretium sit annotare causam radiorum à lucidis corporibus hinc inde, ad instar trabium in longum protensarum, cùm oculis pænè clausis aspicimus. Nempe humiditas, quæ inter cilia & Tuni- cam Corneam versatur, secundum extremitates ciliorum parum assurgit. Sicut aqua vasi imposita altius assurgit, ubi à vase ter- minatur, quàm alibi; quo pacto fit, ut aliqui radii ab hâc humi- ditate prius refringantur, quàm attingant Tunicam Corneam, & sursum

De Arcu ſurſum detorqueantur in confinio ſuperioris cilii, ac deorſum in confinio inferioris.

168. Supereſt jam mirum illud Cæleſtis Arcûs ſpectaculum, ad cujus explicationem Carteſius viam ſtravit. Huic enim debetur, quòd in guttis aquæ pluvialis decidentibus efformari cognoſcimus. Quemadmodum ex eo conſtat, quòd nunquam videtur niſi cœlo pluente; quòd Sole pluviam decidentem illuſtrante in vicis nonnunquam apparuit, quaſi non in cœlo collocatus, ſed in Aere vicino, ſuper oppoſitarum domuum parietibus affixus, vel potius interjectus; quòd aqua per artificium aliquod ſparſim ejaculata Iridem oſtendit; & quòd gramen rore matutino, quaſi guttulis minutiſſimis, conſperſum colores etiam Iridis exhibet. Huic etiam debetur ingenioſiſſima de Refractionibus guttæ & earum limitibus inventio, ſed cauſam phyſicam minus feliciter aggreſſus eſt. Hanc itaque ut intelligatis, concipite radium AN (fig. 61.) in globum NFG ad N incidere, & inde verſus F refringi, ubi rurſus vel refringetur verſus V, vel forte reflectitur ad G. Et ſi poſterius eveniat, tunc iterum in G vel refringitur ad R, vel reflectitur ad H, & ſic deinceps; ita ut radiis globum ingredientibus aliqui, ut NFV, ſtatim egredientur, nullam reflexionem paſſi; alii, ut FGR, poſt unam reflectionem; & alii, ut GHS, poſt duas; aliique poſt tres vel etiam plures. Jam verò, cùm guttæ pluviales reſpectu diſtantiæ ab oculo ſpectatoris, ſint admodum exiguæ, ut phyſicè pro punctis haberi poſſint, non opus eſt, ut earum magnitudines omnino conſideremus, ſed angulos tantùm, quos incidentes cum emergentibus radiis comprehendunt: nam, ubi anguli illi ſunt maximi vel minimi, emergentes radii ſunt ſolito confertiores; &, quia diverſis radiorum generibus diverſi competunt anguli maximi vel minimi, ſingula ad diverſas plagas confertiſſimè tendentia in iiſdem prævalebunt ad colores proprios exhibendos. Anguli itaque maximi vel minimi, quos ſingulorum generum emergentes radii cum incidentibus poſſunt conſtituere, determinandi ſunt, ut horum phænomenon rationes rectè percipiamus.

169. Scilicet in Corol. I & 2. Prop. XXXV. oſtenſum eſt emergentem radium GR ad incidentem AN maximè inclinari, cùm ſit 3RR. II − RR : : CNq. NDq; et I. 2R : : ND. NE : poſito nempe I ad R ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis; & ex hinc inventis ND & NE, dabitur poſitione GR. Cælesti.

170. Sit, exempli gratiâ, pro radiis maximè refrangibilibus ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſive I ad R, ut 185 ad 138, prout in aquâ pluviali proximè comperi; & erit 57132. 15181 : : (3RR. II − RR : :) CNq. NDq; adeoque DN $= \sqrt{\frac{15181}{57132}} \times$ CN $= \frac{5155}{10000}$ CN. Unde per Tabulam Sinuum datur arcus NL 62 grad. 4 min. Præterea, cùm ſit I. 2R : : ND. NE : : 185. 276 : : $\frac{5155}{10000}$ CN. NE; erit NE $= \frac{7691}{10000}$ CN. Et inde etiam per Tabulam Sinuum datur arcus NF, 100 grad. 32. min. Subduc jam duplum arcûs NF ex aggregato arcûs NL & 180 grad. ſive ſemicirculi, & reſtabit 41 grad. 0 min. pro inclinatione radii RG ad radium AN, ſive pro angulo AXR; productis nempe AN & NG donec in X conveniant. Et hic angulus eſt, ſub quo intimus ſive cæruleus limbus Iridis hujus apparere debet, ſive minima ejus ſemidiameter.

171. Ad eundem modum pro radiis minimè refrangibilibus, poſito ſinu incidentiæ ad ſinum refractionis ut 182 ad 138, uti dimenſus ſum, invenietur ND $= \frac{5028}{10000}$ CN, & NE $= \frac{7533}{10000}$ CN; indeque per Tabulam ſinuum arcus NL erit 60 grad. 22 min. & arcus NF 98 grad. 38 min. Adeoque angulus AXR 43 grad. 6 min. ſub quo extimus ſive Rubeus hujus Iridis limbus apparebit. Itaque maxima ejus ſemidiameter eſt 43 grad. 6 min. A quâ ſi auferatur minima ſemidiameter, 41 grad. 0 min. emergit iridis craſſities 2 grad. 6 min. circiter, vel potius 2 grad. 37 min. additâ diametro ſolis 31 min. Sed cùm colores in extremitatibus ad utrumque limbum debiliores ſint, quàm quo propter nubium conterminarum ſplendorem videri poſſunt, ſenſibilis ejus craſſities duos gradus vix excedet.

172. Haud ſecus determinantur exterioris Iridis dimenſiones. Nam oſtenſum eſt in Corol. I & 2. Prop. XXXVI. emergentem radium HS ad incidentem AN minimè inclinari, cùm ſit 8RR. II − RR : : NCq. NDq; et I. 3R : : ND. NE. Quamobrem pro radiorum maximè refrangibilium ſinibus, I & R, ſubſtitutis numeris 185 & 138 ut ſuprà, obtinebuntur ND $= \frac{7315}{10000}$ CN, & NE $= \frac{7064}{10000}$ CN: & inde per Tabulam Sinuum arcus NL, 36 grad. 48 min. & arcus NF, 89 grad. 53 min. Atque adeo angulus AYS = 52 grad. 51 min. qui erit maxima ſemidiameter Iridis hujus. Et ſimiliter pro

De Arcu pro radiorum minimè refrangibilium finibus, I & R, fubftituendo numeros fuprà pofitos, 183, 138, emergent ND = $\frac{3079}{10000}$ CN, & NE = $\frac{6965}{10000}$ CN. Unde per Tabulam Sinuum eliciuntur arcus NL, 35 grad. 52 min. & arcus NF, 88 grad. 18 min. Adeoque angulus AYS erit 49 grad. 2 min. Iridis nempe minima femidiameter. Quamobrem fi à maximâ femidiametro 52 grad. 51 min. auferatur minima 49 grad. 2 min. & refiduo addatur diameter folis 31 min. emerget hujus Iridis craffities, 4 grad. 20 min. Sed propter majorem hujus quam interioris Iridis obfcuritatem, colores vix ultra craffitiem trium graduum, vel trium & femiffis, videri poffe conjicio.

173. Jam verò, ut harum Iridum rationes confpectui diftinctè exhibeam, funto E, F & G guttæ per aerem utcunque fparfæ; SE, SF, SG radii folares parallelè incidentes in guttas; EM, EN & EO radii, diverfè refrangibiles, è guttâ E poft unam reflectionem emergentes; atque FN, FO, FP, & GO, GP, GQ confimiles radii emergentes è guttis F ac G; nempe EO, FP, GQ maximè refrangibiles, & EM, FN, GO minimè refrangibiles, &c. Jam fi fpectantis oculus ad O confiftat, ex hypothefi manifeftum eft, quòd è radiis, quos gutta E poft unam reflexionem emittit, foli maximè refrangibiles, feu cæruliformes, quales EO, impingant in oculum; reliquis ut in EN & EM, propter minorem refractionem, præterlabentibus. Et proinde Cæruleus color ad E confpicietur. E radiis autem, quos gutta G poft unam reflectionem emittit, maximè refrangibiles, quales GQ, præteribunt oculum, propterea quòd radio EO paralleli funt, & alterius generis radii, puta minimè refrangibiles, feu Rubriformes, quales GO, in eum impingent; unde Rubor apparebit in G; & fimili difcurfu gutta F, in medio inter E ac G pofita, radios mediocriter refrangibiles, ut FO, in oculum immittet, reliquis ut FN, FP utrinque præterlabentibus: indeque Viriditas cernetur ad F. Eadem eft ratio guttarum omnium ad eafdem cum his guttis apparentes diftantias ab axe OR, qui per Solem & oculum tranfit, pofitarum; & proinde ad diftantias illas colores undique apparebunt; hoc eft, arcus variegatus, cujus interior limbus Cæruleo, exterior Rubro, & mediæ partes mediis coloribus tingantur; exiftente angulo OGQ, five GOE, hoc eft, latitudine arcûs, duorum circiter graduum, juxta ea, quæ jam antè

oftendi; eftque fimilis difcurfus de arcu exteriori, nifi quòd ordo Cælesti. colorum, propter contrariam radiorum inflexionem, contrarius evadat. Guttæ autem, quæ extra hos arcus ex unâ parte fitæ funt, radios omnino nullos poft unam vel duas reflexiones, duafque refractiones, in oculum immittent; ex alterâ autem parte, omnigenos permiftos; eofque ferè infenfibiles, & proinde nulla hujufmodi phænomena exhibere poffunt, fed cœlum in illis locis colore folito apparebit.

174. Præter phænomena Colorum, de quibus egimus, funt adhuc alia haud pauca (præfertim circa Colores pertenuium lamellarum pellucidarum, quales funt bullarum aquofi orbes, & aer intra vitra duo compreffus, multarumque rerum cuticulæ pertinues) quorum caufa & menfura abfque ratiociniis mathematicis vix poffunt accuratè determinari: fed in hifce videor nimius fuiffe, & proinde jam ad partes Mathefeos magis abftractas me convertere decrevi.

FINIS LECTIONUM OPTICARUM.

CORRIGENDA IN CONTEXTU.

Pag. 85, lin. 23 & 28, pro 9,0827667, lege 9,0827646.
P. 109, lin. 15, pro *diametris*, lege *semidiametris.*
P. 281, lin. 3, pro *ad fig.* 16, lege § 31.
P. 359, lin. ult. pro *&* *C*, lege *&c.*
P. 371, lin. 10, pro *ille*, lege *illi.*

IN NOTIS.

Pag. 7, lin. 1, pro *Saturni Cassino*, lege *Saturni à Cassino.*
P. 88, lin. 4, pro 9,0827667, lege 9,0827646.
lin. 5, pro 0,09917970, lege 0,09917950.
P. 89, lin. 5, pro 0,101768369: lege 0,101768349.

IN LIBRO DE VIRIBUS CENTRALIBUS.

P. 8, lin. 23, pro Ci^2 *& area*, lege Ci^2 ; *& area.*
P. 12, lin. 7, pro *veniet*, lege *veniat.*
lin. 28, pro *quàm*, lege *quam.*
P. 16, lin. 23, 25, 37, 39, pro *X*, lege *x.*
lin. 39, pro *CV major*, lege *CV (fig. 10) major.*
P. 22, ad initium lin. 13, pro *mò*, lege *angulo qla ultimè.*
P. 38, lin. 6, pro *quadratum*, lege *quadraturam.*
P. 39, lin. 3. pro *rectam CD*, lege *rectam CD (fig. 18.)*
lin. 24, dele *(ex construct.)*

Tab. XI.

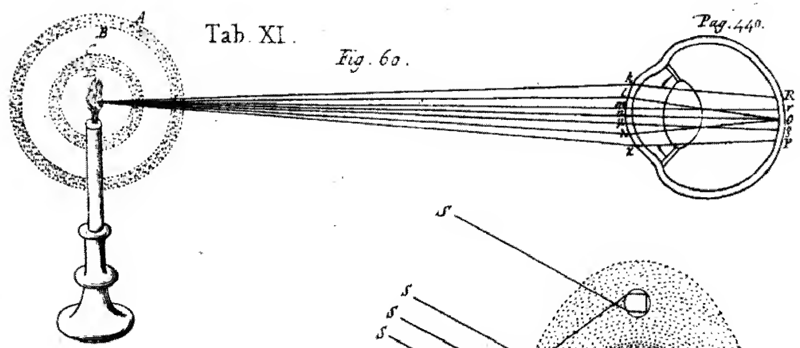


Fig. 60.

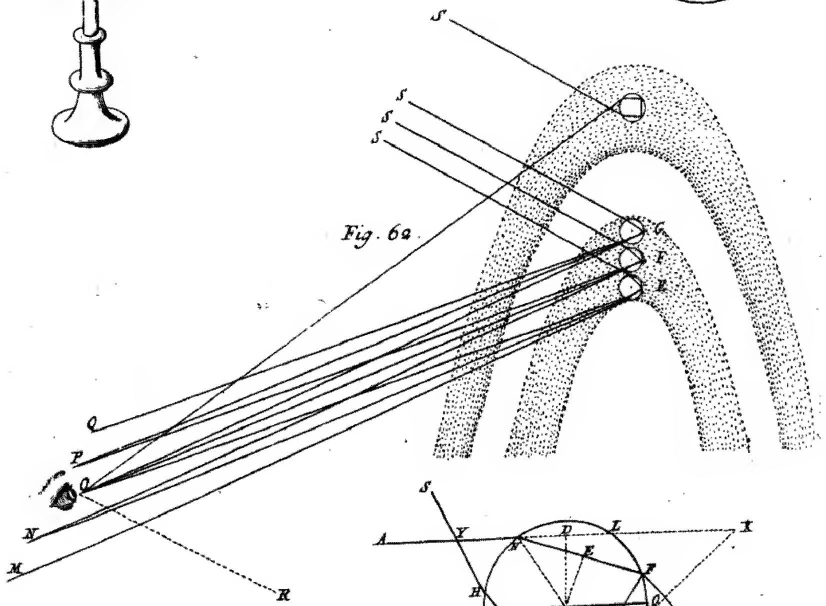


Fig. 62.

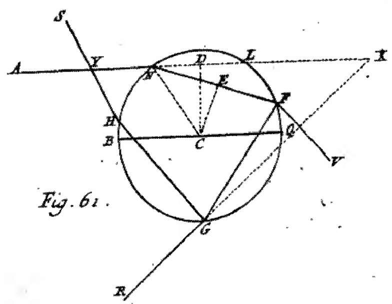


Fig. 61.

SAMUELIS HORSLEII

DE

VIRIBUS CENTRALIBUS

QUÆ

RATIONEM TRIPLICATÆ DISTANTIARUM A CENTRO

CONTRARIAM INTER SE CONSTANTER SERVANT

LIBER SINGULARIS.

PROBLEMA GENERALE.

CURVAM definire per quam corpus quodpiam deferatur, quod è dato puncto, secundam rectam positione datam, datâ cum velocitate emissum viribus deinceps incitetur, quæ datum aliquod centrum respiciant, et proportionem triplicatæ distantiarum à centro contrariam inter se constanter servent.

Hujus Problematis sunt partes duæ; prout vires centrales ex earum genere sint quæ appetentiam centri, vel ex earum quæ fugam, corporibus inducant. Harum partium prima multifariam distribuenda est, pro vario velocitatis gradu, quâcum corpus è dato loco projectum fuerit, illius utique ratione habitâ, quam corpus quodpiam aliud, iisdem viribus centralibus incitatum, casu recto à distantiis infinitis adeptum esset.

PARS PRIMA.

Primum centripetæ sint vires centrales. E dato loco v (vid. fig. 1.) secundum rectam vo positione datam, emissum puta corpus quoddam datâ cum velocitate. Oportet Curvam definire per quam corpus illud deferatur, si viribus urgeatur quæ centrum c respiciant, et proportionem inter se servent triplicatæ distantiarum à centro contrariam. Factum puta, et sit vk curva illa quam definiendam suscepimus. Velocitas quâcum corpus è loco v exierit, vel eadem erit quam corpus quodpiam aliud, urgentibus iisdem viribus centripetis, casu recto à distantiis infinitis locum usque v adeptum fuerit, vel minor illâ majorve erit.

PARTIS PRIMÆ CASUS PRIMUS.

Primùm eadem sit velocitas quâcum corpus per orbitam vk delatum è loco v exierit, quam corpus aliud casu recto, à distantiis infinitis locum usque

Pars Prima. Casus Primus.

que v, adeptum fuerit. Jungatur cv, et figura ad analyfin conftruatur, qualem ad analyfin generalem Problematis xxviii. Libri Primi Principiorum in Notâ (f) lineavimus. In hâc figurâ (fig. 1) data recta cv defignetur literâ a, indefinita cd literâ y. Rectæ autem cv, five a æqualis fit recta vl. Jam cùm ea fit natura Curvæ lf, ut vl fit ad df ut vis centralis in loco v ad vim centralem in loco d (Prop. xxix. Lib. i. Princip.) hoc eft ut cubus ex cd ad cubum ex cv, idcirco erit df $= \frac{CV^3}{CD^3}$ vl $= \frac{a^4}{y^3}$. Erit autem df $\times -\dot{y}$, fluxio areæ vldf, hoc eft $\frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y} = \dot{\overline{VLFD}}$. Quare cùm fpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ fit fluens hujus fluxionis $\frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y}$, area curvæ lf, ad ordinatam mobilem df terminata, aut æqualis erit fpatio $\frac{a^4}{2y^2}$, aut eo major minorve dato. (Geometr. Flux. Th. II.) Crefcere intelligatur infinitè recta y. Area quidem curvæ lf ultimò in nihilum abierit. Area enim illa in nihilum tunc abierit, cùm punctum d ibi fitum fuerit, ubi corporis rectâ cadentis velocitas nulla fit; five ibi loci unde corpus illud rectâ cadere occepit. Illud verò à diftantiis infinitis cecidit. Rectâ igitur cd, five y, infinitè crefcente, area curvæ lf, ad ordinatam mobilem df terminata, ultimò in nihilum abierit. Sed et fpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ (datâ utique a) ultimò in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt area curvæ lf et fpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$. Differant enim, fi fieri poffit, dato; quod nota d^2 defignet; ut fit area curvæ lf $\pm d^2 = \frac{a^4}{2y^2}$. Jam rectâ y infinitè crefcente, et areâ curvæ lf ultimò in nihilum abeunte, fpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$ dato d^2 vel æquale erit ultimò, vel dato d^2 auctum nihilo ultimo æquale fiet. Si primum, fiet ultimo $d^2 : a^2 = a^2 : 2y^2$, et $d : \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a : y$. Data igitur a ad rectam y datam ultimò rationem habet. Dabitur igitur rectæ y ultima quædam magnitudo, neque ultimò ea infinita erit, quam tamen infinitè crefcere pofuimus: quod eft abfurdum. Non igitur primum illud obtinet, fpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ dato effe ultimò æquale. Sin verò alterum, ut fit ultimò $\frac{a^4}{2y^2} + d^2 = 0$, erit ultimò $a^4 + 2y^2d^2 = 0$, atque rurfum $y^2 + \frac{a^4}{2d^2} = 0$. Hoc eft, quadratum ex infinitâ y, fpatio dato $\frac{a^4}{2d^2}$ auctum, nihilo æquale erit: quod eft abfurdum. Neutrum igitur eorum obtinebit, quorum alterum, ex eo quòd area curvæ lf à fpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ dato abeffet, neceffariò effici oftendimus. Non igitur dato differunt area curvæ lf fpatiumque $\frac{a^4}{2y^2}$. Erunt igitur inter fe æqualia.

Hinc efficietur $UQ^2 = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}CV^2$.

Et $RS^2 = \frac{a^4}{4y^2} = \frac{CV^4}{4y^2}$.

Sed

Analysis.

Sed $ST = \frac{q^2}{y}$ (Princip. Lib. I. Sect. viii. (Not. f.) Ergo $ST^2 = \frac{q^4}{y^2} = \frac{2CV^2 \times QW^2}{2y^2}$.

Hinc $RT^2 = RS^2 - ST^2 = \frac{CV^4 - 2CV^2 \times QW^2}{2y^2} = CV^2 \times \frac{CV^2 - 2QW^2}{2y^2}$.

Hoc eft, propter $CV^2 = 2UQ^2$ (id enim oftenfum) $RT^2 = CV^2 \times \frac{UQ^2 - QW^2}{y^2} = CV^2 \times \frac{UW^2}{y^2}$. Quare $RT = \frac{CV \times UW}{y}$.

Sed $Db = \frac{q^2}{2RT}$. Et $Dc = \frac{CV^2}{y^2} \times \frac{q^2}{2RT}$ (per formulas generales Not. f, Sect. viii. Lib. I. Princip.) Quare $Db = \frac{q^2 \times y}{2CV \times UW}$ et $Dc = \frac{CV \times q^2}{2UW \times y}$. Hoc eft, fi pro q^2 fcribatur $CV \times QW$, $Db = \frac{QW \times y}{2UW}$. $Dc = \frac{CV^2 \times QW}{2UW \times y}$. Vel denique fi capiatur recta Q, cujus quadratum ad quadratum ex cv rationem habeat eam quam qw ad 2uw, efficietur $Dc = \frac{Q^2}{CD}$, five $CD \times Dc = Q^2$. Sed, propter rectas uw, qw, cv magnitudine datas, dabitur illa Q magnitudine; ac propterea quadratum ex Q magnitudine datum eft. Rectangulum igitur $CD \times Dc$ magnitudine datum. Recta autem cd pofitione data, punctumque c datum. Ea enim pofuimus. Curva igitur acx ad quam eft punctum c Hyperbola erit æquilatera, cujus centrum erit c, Afymptotos recta cd, axes verò eâ magnitudine præditi, ut quadrata ex dimidiis duplo quadrati ex Q fingulatim æqualia fint. Datâ igitur vd, dabitur area vDc, atque huic æqualis fector vcx, per quadraturam hyperbolæ. Datus igitur angulus vcx. Quare recta cx pofitione data. Datâ autem vd, dabitur magnitudine cd, et illi æqualis ci. Punctum igitur i dabitur in tramite corporis curvo; affumptifque diftantiis aliis alia lineæ vik definiantur puncta. Q. E. I.

COMPOSITIO CASUS I. PARTIS I.

Compositio.

A centro c in rectam vg (fig. 2) demittatur ad perpendiculum recta ch. Capiatur cm, quæ fit ad cv ut ch ad hv. Duarum cv, cm, capiatur cn proportione media. Centro c, femiaxe tranfverfo cn, fcribatur Hyperbola æquilatera eNf, cujus Afymptotæ fint rectæ co, cp. In harum alterutrâ, puta co, capiatur ca rectæ cv æqualis, & à puncto a educatur ad perpendiculum recta ab, quæ hyperbolæ in b occurrat. In eâdem Afymptotâ, Co, capiatur quævis Cd illâ Ca minor, et à d ad perpendiculum educatur dc, quæ hyperbolæ in c occurrat, junganturque Cb, Cc. Jam centro C, radio Cv, fcribatur circulus vxa, cujus capiatur fector, vCx, fectori hyperbolico bCc æqualis. Et in rectâ cx capiatur ci æqualis rectæ Cd. Curva, ad quam pofitum eft perpetuò punctum i, ea erit per quam, urgentibus viribus quales pofuimus centripetas, corpus quodpiam deferetur, quod è dato loco v, fecundum rectam vg, eâ cum velocitate fuerit emiffum, quam

corpus

Pars Prima. Casus Primus.

corpus aliud iisdem viribus centripetis incitatum, rectâ cadendo à distantiis infinitis, in loco V adeptum fuerit.

DEMONSTRATIO.

In figurâ primâ capiatur recta CD æqualis rectæ cd in figurâ secundâ; CD igitur minor erit quàm CV, et circulus centro C, radio CD, descriptus curvam VK secabit. Secet in I, et maneant omnia, in figurâ illâ primâ, quæ jam antè lineavimus. Sector hyperbolicus cCb (fig. 2) trapezio hyperbolico badc æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV.) Sectori autem hyperbolico cCb sector circularis VC*x* factus est æqualis. Quamobrem sector circularis VC*x* trapezio hyperbolico badc æqualis erit. Sed et sector circularis VCX (fig. 1) trapezio hyperbolico *a*VD*c* æqualis erat. Trapezia autem hyperbolica badc (fig. 2), *a*VD*c* (fig. 1) sunt inter se æqualia. Id enim sic ostendo. In triangulis CVH, QUW, anguli CVH, QUW sunt inter se æquales. Anguli etiam CHV, QWU inter se æquales, quippe qui sunt recti. Triangula igitur inter se similia erunt, et VH erit ad HC, ut UW ad WQ. Est autem 2UW ad WQ ut quadratum ex CV ad quadratum ex Q. Ita enim factum est. Quare UW erit ad WQ ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex Q. Rursum (fig. 2) CV est ad CM ut VH ad HC; ita enim factum est. Sed cùm CN duarum CM, CV proportione sit media, erit quadratum ex CV ad quadratum ex CN ut CV ad CM. Quare quadratum ex CV est ad quadratum ex CN ut VH ad HC. Sed ostensum est quadratum ex CV esse ad duplum quadrati ex Q ut UW ad WQ; necnon UW esse ad WQ ut VH ad HC. Quadratum igitur ex CV ad quadratum ex CN eandem quam ad duplum quadratum ex Q proportionem habet. (El. V. 11.) Quadratum igitur ex CN duplo quadrato ex Q æquale erit. (El. V. 9) Sed quadratum ex semiaxe hyperbolæ æquilateræ *a*D*c* (fig. 1) duplo quadrati ex Q ostensum est æquale. Est autem CN (fig. 2) semiaxis hyperbolæ æquilateræ fN*e*. Hyperbolarum igitur fN*e*, *a*D*c*, quarum utraque est æquilatera, harum semiaxes, cùm quadrata habeant æqualia, ipsi quidem inter se æquales erunt. Quamobrem, cùm in asymptotâ hujus, *a*D*c*, acceptæ sunt CV, CD illis ca, cd in asymptotâ alterius, fN*e*, singulatim æquales, idcirco trapezia hyperbolica, badc, *a*VD*c*, sicut modò asseveravimus, erunt inter se æqualia. Sectores igitur circulares VC*x*, VCX, qui trapeziis illis singulatim sunt æquales, etiam inter se æquales erunt. Anguli igitur VC*x*, VCX inter se æquales. Rectæ autem C*i*, CI inter se æquales: nempe cùm illa rectæ cd, hæc verò rectæ CD æqualis; & illæ cd, CD inter se factæ fuerint æquales. Simili argumentatione Curvarum, V*i*, VI, radii omnes, qui cum primariis illis, CV, angulos æquales faciant, ostendentur inter se æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter se similes et æquales erunt, et in hoc Casu Primo Partis Primæ compositio nostra rectè se habet. Q. E. D.

De Naturâ Curvæ V*i, perfectâque ejus Figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus spatia corpora absolvant.*

Sector hyperbolicus bCc logarithmus est rationis rectæ Ca ad rectam Cd. (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. XV. Cor.) Quare sector circularis VC*x*, cùm

I cùm

cùm illi hyperbolico æqualis sit, ejusdem rationis logarithmus erit; sive ejus quam recta CV habet ad rectam C*i*; nimirum cùm rectæ CV, C*i* illis ca, cd æquales sint. Hinc liquet curvam V*i*C Spiram esse quam vocant logarithmicam. Quòd si in Hyperbolæ asymptotâ co capiatur Cδ illâ ca major, eductâque à puncto δ ad perpendiculum rectâ δ*n*, quæ hyperbolæ in *n* occurrat, si C*n* jungatur, tum si sectori hyperbolico bC*n* æqualis fiat sector circularis VCχ, eâ vero lege, ut sector ille VCχ ad partes rectæ VC constituatur earum contrarias, ad quas positus est sector VC*x* sectori hyperbolico bCc æqualis, ideo scilicet quia puncta asymptotæ *d*, δ ad contrarias partes sunt puncti a, punctaque item hyperbolæ c, χ ad contrarias partes puncti b; denique si in rectâ Cχ capiatur C*ι* rectæ Cδ æqualis, punctum *ι* erit ad Spiram C*ι*V, ad distantiam utique majorem, quàm est CV, à centro C productam. Atque rectam Cδ perpetim augendo, Spiram vel infinitè producere licebit; quæ centrum suum C gyris innumeris cinget, quorum extimi longiùs ab illo discedunt, arctissimi propiùs idem accedunt, quàm pro datâ quâlibet distantiâ.

Spiræ Logarithmicæ Figura.

2. Scriptâ quo diximus modo Spirâ C*i*V*ι*, si in radiis ejus *i*C, VC, *ι*C producantur, ad contrarias centri partes, rectæ C*h*, C*v*, C*k*, illis *i*C, VC, *ι*C æquales, atque idem semper fiat; nova efformabitur Spira, priori per omnia similis et æqualis, sed contrariè sinuata; nempe ut in æqualibus à communi centro C distantiis plagas contrarias respiciant. Atque hæ *Spiræ oppositæ* haud immeritò nominentur; quippe quibus similes prorsus cognationes cum oppositis hyperbolis intercedant. Quo enim modo Spira prior, C*i*V*ι*, ex hyperbolâ *e*NF, asymptotâ co, circuloque *a*V*x* efformata est, eodem planè modo hæc alia, C*hvk*, ex hyperbolâ oppositâ, eâdem asymptotâ co, eodemque circulo efformari poterit.

3. Spiræ oppositæ unam tantummodò figuram constituere censendæ sunt, sicut Hyperbolæ oppositæ, à quibus illæ efformatæ sunt, unam.

4. Cùm harum Spirarum ea sit natura, ut radii omnes à centro exeuntes æqualibus angulis ad curvam inclinentur, nullam eæ apsidem habebunt.

5. Si è puncto V, in alterâ Spirarum oppositarum dato, corpus aliquod secundum rectam VG, quæ spiram ibi loci contingat, emissum fuerit, eâ cum velocitate, quam casu recto versus centrum C à distantiis infinitis adeptum esset, urgentibus utique viribus centripetis quæ rationem inter se triplicatam distantiarum à centro contrariam constanter servent; corpus illud per spiram V*i*C delatum gyris innumeris circum centrum C circumagetur, atque intra certum quoddam temporis spatium, quod quantum erit definire mox instituam, centrum illud propiùs quidem accesserit quàm pro datâ qualibet distantiâ; ipsum verò nunquam attinget; scilicet ne extra orbitam suam evagetur, cujus orbes infimi quidem et arctissimi centrum tamen intùs habent. At verò elapso tempore illo, corpus, centrum quod transire ei non licuit, mirè prætergressum, Spiram quidem oppositam *hvk* invaserit, cujus ductus sequens, gyrisque innumeris circumactum, infinitè usque à centro abscedet; neque in alteram illam, quâ delatum est, unquam ei reverti concedetur.

De Motu in Spirâ Logarithmicâ.

6. Si manente velocitate quâcum corpus è loco V exeat, angulus acutus CVG sensim augeatur; ultimò, cùm in rectum ille increverit, Spiræ oppositæ

Velocitas.

oppositæ

Pars Prima. Casus Primus.

positæ in circulum $vxva$ migraverint; per quem utique deferetur corpus viribus, quales diximus centripetas, sollicitatum, si è loco v cum velocitate illâ, quam casus infinitus generâsset, emissum fuerit, secundum rectam CG super radio CV ad perpendiculum erectam.

7. Corporis per Spiram logarithmicam lati eadem erit in loco quovis, i, velocitas, quæ corporis, quod, urgentibus iisdem viribus centripetis, per circulum ferretur centro C, radio ci, scriptum.

8. Ad Tempora definienda, quibus corpora viribus, quales posuimus, centripetis sollicitata datarum spirarum oppositarum, $ivic$, $cbvk$, partes datas absolvant, opus erit, quadrare figuras quas spirarum illarum datæ partes claudant. Id autem hâc ratione perficio.

Quadratura Spiræ Logarithmicæ.

Jam antè obtinuimus $Db = \frac{QW \times y}{2UW}$. Cujus quidem notæ hæc est interpretatio. Recta Db ad rectam y (fig. 1) datam eam rationem habet quam QW ad 2UW. Linea igitur abz, ad quam est punctum b, recta erit positione data, et per centrum C transibit; & Spiræ sector VCI æqualis erit quadrilatero rectilineo $aVDb$, sive differentiæ triangulorum similium CVa, CDb, quæ angulos ad V et D rectos habent. Horum autem illud CVa ad quadratum ex CV rationem eam habebit quam QW ad 4UW. Alterum autem ad quadratum ex CD, vel CI, similem rationem geret. Duorum igitur differentia, sive spatium $aVDb$, sive Spiræ sector VIC ad differentiam quadratorum ex CV, CI eandem illam rationem geret quam QW ad 4UW, sive eam quam HC ad 4VH; nempe cùm sit QW : UW = HC : VH (id enim jam antè ostensum). Hinc (in fig. 2) sector quilibet $vic = \frac{HC}{4VH} cv^2 - ci^2$ & area tota Spiræ, à loco v centrum usque, $= \frac{HC}{4VH} cv^2$. Et area $vicb$, hoc est area tota spiræ vic, à loco quovis v centrum usque cum areâ oppositæ à centro locum usque quemvis b, $= \frac{HC}{4VH} cv^2 + cb^2$. Areæ vero oppositæ, inter loca, v, v, à centro hinc inde æqualiter remota, hæ areæ inquam simul sumptæ $= \frac{HC}{2VH} cv^2$.

Tempora movendi in Spiris Logarithmicis definiuntur.

9. Hinc Tempora, quibus absolvuntur areæ, quæ à punctis v, i initium sumentes circa centrum desinunt, erunt inter se ut quadrata è radiis VC, ic, à quibus areæ illæ initium sumant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cùm à communi radio VC initium sumpserint, ad radios ejusdem Spiræ diversos, ci, cl, desinunt, erunt inter se sicut spatia quibus quadratum à radio VC, à quo areæ illæ communiter initium sumant, superat quadrata à radiis ci, cl, ad quos illæ singulatim desinant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cum à communi radio VC initium sumserint, ad radios, ci, cb, spirarum oppositarum desinunt, erunt inter se ut spatia $vcq - ciq$, $vcq + cbq$.

Conferuntur cum Temporibus in Circulis.

10. E loco v (fig. 3) exeant corpora duo, quorum alterum per Circulum centro C, radio CV, scriptum feratur, alterum per Spiras logarithmicas oppositas vic, cbv, urgentibus utique viribus quæ centrum C respiciant, et rationem triplicatæ

triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servent. Spirarum alteram recta VG in puncto V contingat. Tempus, quo corpus per spiras latum à puncto V ad punctum v spiræ oppositæ, æquali distantiâ à centro atque alterum V remotum, pervenerit, hoc inquam tempus ad tempus conversionis integræ corporis in circulo circumacti rationem habebit, quæ componetur è rationibus quas radius circuli ad circuitum ejus, atque ad sinum complementi anguli CVG habet.

Tempora in Spiris Logarithmicis.

A centro C in rectam VG demittatur ad perpendiculum recta VH. Exponatur recta T datæ cujusvis longitudinis. Sit alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus conversionis integræ in Circulo ad tempus translationis de loco V in locum v per Spiras. Dico illam T ad hanc Θ rationem habere eam, quæ componitur è rationibus rectæ CV ad circuitum circuli XVV, qui rectam illam radium habet, ejusdemque CV ad rectam VH. Vel quod perinde est, posito circuitum circuli XVV rectæ P æqualem esse, dico T esse ad Θ ut quadratum ex CV ad rectangulum VH × P.

Sint enim vcb, vca sectores circuli spiræque motûs initio simul confecti; & habeat recta t, ad rectam T rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores illi ad tempus translationis de loco V in v per spiras. Habebit itaque eadem t ad Θ rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores, vcb, vca ad tempus conversionis integræ in circulo. Habeat autem illa t ad aliam rectam ν proportionem eam quam sector spiræ vca, ad sectorem circuli vcb. Designet litera A spatium illud, quod spiræ oppositæ inter loca, V, v, intùs habent. Jam spatium A ad aream totam circuli VVX rationem habet, quæ componitur è rationibus spatii illius A ad sectorem vca, sectoris vca ad sectorem vcb, sectorisque vcb ad aream circuli. Quæ verò spatii A ad sectorem vca ratio, ea est temporis quo conficitur spatium A, motu corporis per spiras, ad tempus quo conficitur sector vca; sive rectæ T ad rectam t. Quæque sectoris vca ad sectorem vcb est ratio, ea est rectæ t ad rectam ν. Quæque sectoris vcb ad aream circuli, ea est temporis quo conficitur sector vcb ad tempus conversionis integræ in circulo; sive rectæ t ad rectam Θ. Spatium igitur A ad aream totam circuli rationem habet compositam è rationibus rectæ T ad t, rectæque t ad ν, rectæque t ad Θ; sive compositam è rationibus rectæ T ad ν rectæque t ad Θ; sive eam quæ est rectanguli T × t ad rectangulum Θ × ν. Spatium inquam A est ad aream circuli VVX ut rectangulum T × t ad rectangulum Θ × ν.

Jam verò t ad ν rationem habet quam sector spiræ vca ad sectorem circuli vcb; quæ eadem est, quam CH ad CV. Nam velocitates quibus corpora duo, quorum alterum per circulum, alterum per spiras feratur, è loco V exeant, hæ necessariò inter se æquales erunt; cùm ea utraque esse debeat, quam, urgentibus quales posuimus viribus centripetis, corpora casu recto à distantiis infinitis, locum usque V, adepta fuerint. Sed propter velocitates illas inter se æquales, arcus nascentes spiræ circulique va, vb, primò quidem inter se æquales erunt. Sectoribus igitur nascentibus vca, vcb prima ratio, cùm ea sit illa quæ rectangulis etiam nascentibus $va \times$ CH, $vb \times$ CV prima est, ea erit quæ rectis datis CH, CV inter ipsas intercedat. Quæ verò sectoribus vca, vcb nascentibus prima fuerit ratio,

ratio, ea quidem, dummodo ſimul conficiantur, ſemper inter eos manet. Nam utcunque alterum illorum augeri velis, tempus, quo confectus fuerit, ſimili ratione augebitur. Et pro temporis ratione alter etiam augebitur. Manet igitur ſectoribus illis quæ naſcentium prima fuit ratio, ſive rectæ CH ad rectam CV. Habet igitur, ſicut modò aſſeveravimus, recta t ad ν rationem illam quam CH ad CV. Rectangulum igitur $T \times t$ ad rectangulum $\Theta \times \nu$, ſive ſpatium A ad circulum $\mathrm{V}v\mathrm{X}$, rationem habet eam, quam rectangulum $T \times CH$ ad rectangulum $\Theta \times CV$ (per El. V. 11.) Atqui ſpatium A ad dimidium quadrati ex CV rationem habet eam, quam CH ad VH (ſecundum ea quæ ſuprà oſtendimus § 8.) Et dimidium quadratum ex CV ad aream circuli $\mathrm{V}v\mathrm{X}$ rationem habet eam quam CV ad P. Nimirum cùm area circuli rectangulo $\frac{1}{2}CV \times P$ æqualis ſit, ſecundum ea quæ demonſtravit Archimedes. Spatium igitur A ad aream circuli $\mathrm{V}v\mathrm{X}$ rationem habet compoſitam è rationibus rectæ CH ad VH, rectæque CV ad P; ſive eam, quæ eſt rectanguli $CH \times CV$ ad rectangulum $VH \times P$. Quare rectangulum $T \times CH$ erit ad rectangulum $\Theta \times CV$ ut rectangulum $CH \times CV$ ad rectangulum $VH \times P$ (El. V. 11.) Permutando T erit ad CV ut rectangulum $\Theta \times CV$ ad rectangulum $VH \times P$. Quare et rectangulum $T \times CV$ ad quadratum ex CV ut $\Theta \times CV$ ad $VH \times P$. Permutando $T : \Theta = CV^2 : VH \times P$. Q. E. D.

Hinc ſi tempus converſionis integræ in Circulo deſignetur literâ Θ, tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras illud erit, quod Algebra his notis deſignaverit $\frac{CV^2}{VH \times P}\,\Theta$. Atque hujus temporis dimidium illud erit, intra cujus ſpatium corpus è loco V egreſſum, ut per ſpiram $\mathrm{V}i\mathrm{C}$ deferatur, centrum propiùs acceſſerit quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ.

11. Cùm ſit T ad Θ ut CV^2 ad $VH \times P$, erit T ad $\frac{1}{2}\Theta$ ut CV^2 ad $VH \times \frac{1}{2}P$. Hinc ſi talis ſit angulus CVH, cujus coſinus rationem ad radium habeat quam radius ipſe ad dimidium circuli circuitum, nimirum ut rectangulum $VH \times \frac{1}{2}P$, quadrato ex CV æquale ſit; tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras, quarum radii eo angulo ad tangentes inclinentur, dimidio temporis converſionis in circulo æquale erit. Hoc eſt, idem erit de loco V in v tranſlationis tempus, ſive per ſpiras, quâ diximus ſpecie præditas, ſive per circulum corpus transferatur. Cæterùm in hâc ſpirarum ſpecie, anguli CVH amplitudinem calculi produnt, $71° - 26' - 21'',4$ quantum ferè numeris eam exigere liceat.

12. Corpus igitur è loco V egreſſum, ſi per hanc ſpiram delatum fuerit, eo temporis ſpatio, quo corpus aliud ex eodem loco ſimul egreſſum quadrantem circuli abſolverit, centrum ipſum C propiùs quàm pro datâ diſtantiâ acceſſerit.

Conferuntur Tempora in Spiris diverſâ Specie.

13. Intelligantur circum centrum commune C binæ ſpiræ logarithmicæ oppoſitæ, quæ in locis V, v ſe mutuo interſecent (fig. 4). Harum alteram in puncto V contingat recta VG, alteram vg: et à centro C in rectas VG, vg deducantur ad perpendiculum CH, Ch. Dico tempora tranſlationum de loco V, in v, per ſpiras diverſas, atque adeo horum temporum dimidia, ſive tempora quibus corpora è loco V ſimul egreſſa, ſi per has ſpiras deferantur, centrum C propiùs acceſſerint quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ, dico hæc tempora

tempora inter ſe rationem habere rectarum VH, vh contrariam; ſive contrariam ejus, quam angulorum, quibus radii ſpirarum ad Curvas inclinantur, coſinus inter ſe habent.

Erit enim tempus tranſlationis per ſpiras quas recta VG contingit, ad tempus converſionis integræ in circulo cujus radius CV, ut quadratum ex CV ad rectangulum $VH \times P$ (§ 10. hujus). Tempus item converſionis integræ in illo circulo erit ad tempus tranſlationis per ſpiras alteras, quas recta vg contingit, ſicut rectangulum $vh \times P$ ad quadratum ex CV. Ex æquo perturbatè, tempus tranſlationis per ſpiras primas ad tempus tranſlationis per alteras ut $vh \times P$ ad $VH \times P$; hoc eſt ut vh ad VH. Q. E. D.

Tempora Caſûs recti.

14. Manente jam angulo CVH, ille alter CVb quovis modo fluat. Ut ſpiræ, quæ per locum V eâ lege ductæ fuerint, ut rectam mobilem Vb in loco V contingentem ſemper habeant, ſpeciem uſque mutent. Jam cùm in omni magnitudine anguli CVb maneat illa temporum ratio, ut ſit tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras ſtabiles, quas recta poſitione data VH contingit, ad tempus tranſlationis per ſpiras mutabiles, quas contingit ſemper recta mobilis Vg, ſicut Vb ad datam VH, etiam evaneſcente angulo CVb, ratio temporis tranſlationis per ſpiras ſtabiles ad tempus tranſlationis per ſpiras mutabiles, figuram ultimam induentes, ea erit, quæ eſt ultima rectæ mutabilis Vb ad datam VH. Evaneſcente autem angulo CVb ſpiræ mutabiles, quas recta Vb ſemper contingit, ultimò quidem in ipſam rectam Vv abeunt. Et tempus tranſlationis per has ſpiras fit ultimò tempus tranſlationis per illam rectam. Recta autem Vb ipſi VC fit ultimò æqualis. Tempus igitur quo corpus, caſu recto à diſtantiis infinitis centrum petens, à loco V centrum uſque deferretur, indeque rurſum motu continuato locum V ad contrarias centri partes æqualiter remotum attingeret, hoc inquam tempus ad tempus tranſlationis de loco V in v per ſpiras ſtabiles, quas recta poſitione data VG contingit, rationem habebit eam quam VH ad CV.

Conferuntur cum Temporibus in Circulis.

15. Ponatur angulus CVH talis eſſe, qualis eſſe debet, ut tempus tranſlationis de loco V in v, per ſpiras quas recta VH contingit, idem ſit quod tempus dimidiæ converſionis in Circulo, cujus radius CV. Tempus igitur trajectionis rectæ de loco V in v, corpori utique quod à diſtantiis infinitis caſu recto centrum petierit, erit ad tempus dimidiæ converſionis in circulo illo ut coſinus anguli cujus amplitudo eſt $71° - 26' - 21'',4$, ad radium. Temporis item caſûs recti de loco V in centrum, nempe poſt caſum rectum à diſtantiis infinitis locum uſque V, ad tempus, quo corpus in illo circulo quadrantem circuitûs abſolveret, eadem erit ratio: nimirum coſinûs anguli $71° - 26' - 21'',4$ ad radium, ſive radii ad dimidium circuli ambitum.

Conſenſus doctrinæ noſtræ cum Newtonianâ.

16. Tempora quibus corpus à locis ejuſdem ſpiræ diverſis, V, i, ad diſtantiam à centro delatum fuerit omni datâ propiorem, erunt inter ſe ſicut quadrata è radiis CV, Ci per loca illa ductis (per. § 9). Tempora autem illa cum temporibus converſionum in circulis, quorum radii ſunt CV, Ci, proportione convenient (id quod ex § 10. ſatis patet). Converſionum igitur in circulis inæqualibus, circum centrum commune, Tempora rationem inter ſe ſervant radiorum duplicatam; quod cum iis conſentaneum eſt, quæ in Corollario 7. Propoſitionis IV. Libri Primi Principiorum, de Temporibus converſionum in Circulis, Newtonus generatim tradidit.

17. Tempora

Tempora casûs recti in centrum duplicatam distantiarum à centro rationem servant.

17. Tempora casûs recti centrum usque è locis diversis (post casum rectum ab infinitis utique distantiis locum usque superiorem) cùm ad Tempora conversionis in Circulis, circum centrum commune per loca illa ductis, datam rationem gerant (per § 15.) duplicatam distantiarum rationem inter se servabunt.

ΨΕΥΔΑΡΙΟΝ.

18. Quid autem? Temporis casûs recti, è loco puta v centrum usque c, si ex eo justa æstimatio veniet, quòd evanescente contactûs angulo *b*vc linea recta vc spirarum, species usque mutantium, ultima sit figura; quidni Tempus etiam conversionis in Circulo simili ratione æstimare liceat? Nimirum ex eo quòd si angulus ille *b*vc contrario modo fluat, ut jam crescat qui ante evanescere ponebatur, Spiræ, quas recta mobilis v*b* in puncto v semper contingit, quæque speciem usque mutant, hæ ultimò quidem, cum angulus ille in rectum increverit, figuram circularem induant; ejus nempe circuli, qui centrum c, radium cv habet. Num igitur tempus, quo corpus de loco v in *v* per circulum illum transferatur, ad tempus translationis de loco v in *v* per spiras positione datas, quas in dato puncto v recta vH positione data contingat, rationem habebit, quæ datæ vH ad rectam v*b* mutabilem ultima erit? At verò recta v*b*, cùm angulus cv*b* rectus fuerit factus, in nihilum planè abierit. Tempus igitur translationis de loco v in *v* per circulum, si hoc modo verè æstimatum sit, ad Tempus translationis per spiras majus erit quàm ut datam aliquam rationem gerat. Sint igitur spiræ eâ specie præditæ, quam in § 11. definivimus. Jam tempus translationis de loco v in *v* per circulum tempori translationis per spiras æquale fit, secundum ea quæ in § 11. demonstravimus. Tempus igitur translationis de loco v in *v* per circulum ei æquale erit, quod magis quàm pro datâ quâvis ratione exsuperare debet. Quo nihil quidem absurdius excogitari potest. Quid igitur? An nos in temporum per circulum spirasque comparatione falsi sumus, quàm antè in § 10. facere instituimus, an tunc potius in lubrico sumus versati, cùm tempus casûs recti definire inciperemus, ex figuræ illius consideratione, quam, evanescente angulo contactûs, Spiræ, speciem usque mutantes, ultimò quasi induerent, quamque rectam esse pronuntiavimus? Neutrum horum quidem. Sed in § 10. comparatio temporum rectè instituta est, rationumque conclusiones verissimè sunt subductæ; et spiras, evanescente contactûs angulo, in rectam ultimò abire verissimè pronuntiatum est; et ex eo quòd in rectam eæ ultimò abierint, haud temerè nobis est incepta Temporis casûs recti æstimatio. Ille verò temerè & imperitè fecerit, qui ex eo quòd increscente contactûs angulo spiræ ultimò, cùm rectus ille fiat, in Circuli figuram quodammodo abeant, Tempus conversionis in circulo similiter æstimare velit. Is enim similitudinem sibi finxerit, ubi reverâ nulla est. Licet enim increscente angulo contactûs cv*b*, ultimò quidem, cùm in recti amplitudinem ille increverit, pro omni Spirarum figurâ sola Circuli, radio cv scripti, figura remanebit, ut nos ipsi supra § 6. monuimus, haud tamen eodem modo Spiræ in Circulum abeunt, atque angulo cv*b* evanescente in Rectam. Etenim in Rectam abeuntes in simplicem rectam abeunt, nimirum spiræ vc in rectam simplicem vc; spiræ alteræ c*v* in simplicem c*v*; totaque adeo oppositarum spirarum figura in rectam simplicem v c *v*; cui innumeri spiræ utriusque orbes, qui loca illa v, *v* interjacent, ultimò æquales fiunt. Licet enim utraque spirarum oppositarum, qualiscunque sit anguli cv*b* amplitudo, gyris innumeris centrum cingat, atque adeo punctis innumeris radium cv secet; angulo tamen illo infinitè imminuto, orbes omnes utriusque interiores infinitè quidem angusti fiunt; adeo ut radii interiores c*i*, c*b* (fig. 2) omni datâ rectâ minores uterque fiant. Orbes igitur utriusque spiræ interiores in ipsum quasi centrum sese contrahunt, et ex punctis innumeris in quibus spira utraque radiis occurrat, ne unum quidem inveniatur, quod non propiùs quàm pro datâ quâvis distantia à centro absit. Sinus igitur curvarum v*i*, *vb*, Curvis totis (inter loca v, *v*) ultimò fiunt æquales. Angulo autem contactûs infinitè decrescente, sinûs utriusque latitudo in omni parte infinitè imminuitur. Rectæ scilicet, quæ ab hoc vel illo in rectam v*v* ad perpendiculum deducantur, datis quibuslibet minores fiunt. Fieri igitur nequit, quin sinus v*i* ad rectam vc, sinus alter, *bv* ad rectam c*v* ultimò se applicet, & sinus illi simul sumti, hoc est, spirarum oppositarum orbes innumeri, qui locis v, *v* interjacent, in rectam vc*v* abeant, atque illi æquales fiant.

Jam verò crescente angulo cv*b*, spirisque contrario, atque antè fecerunt, modo speciem usque mutantibus, videamus quid ultimò illis accidat, cùm angulus ille rectus fiat. Diximus eas in figuram Circulorum abiisse. Abierint verò. Haud verò in Circulum simplicem; sed in innumeros, circum centrum commune c scribendos, eâ quidem orbium spissitudine, ut circuli v*vx*, qui omnium extimus erit, aream circuitus interiorum planè compleant. Etenim angulo contactûs infinitè aucto, spirarum oppositarum, è locis v, *v* egredientium, orbes omnes interiores ampliores fiunt, adeo ut radius quisque interior v*i* datâ quâlibet rectâ major evadat, quæ ipsa radio primo cv, vel c*v*, minor sit; & in rectâ cv nequeat dari punctum infra ipsum v, quo punctum illud ubi primâ vice, ubi secundâ, ubi tertiâ, ubi quotâcunque denique, Curva ex v egressa radium primum, cv, redux transierit, non propiùs tandem à puncto v remotum sit. Neque innumeris modò gyris Spira utraque centrum cinget, atque adeo punctis innumeris radios cv, c*v* secabit, sed innumera tandem erunt intersectionum puncta, quæ datam quamlibet radii utriusque, cv vel c*v*, portionem occupabunt; gyri pariter erunt innumeri, qui spatia ampliora, quàm est area cujusvis circuli, qui ipso *vvx* minor sit, singulatim intùs continebunt. Gyri autem illi innumeri ultimò in circulos abibunt innumeros, quorum omnium ambitus integri simul sumti, infinitam quandam efficient longitudinem, cui spiræ oppositæ ultimò æquales fiunt. Crescente igitur angulo cv*b* ut rectus fiat, Spiræ, quas in puncto v recta mobilis v*b* contingit, speciem usque mutantes, in figuram circularem longè alio modo abeunt, atque illæ in rectam abierunt, quæ species suas contrario modo usque mutavere, dum angulus ille sensim evanesceret. Siquidem illæ in Rectam abiere simplicem, longitudine finitâ præditæ. Hæ verò in Circulos abeunt innumeros, immensam planè longitudinem affectantes. Jam verò tempus quod attinet translationis de loco v in *v* per Spiras, cùm in omni id spirarum specie ex temporibus conversionum omnium in innumeris spirarum oppositarum orbibus conflatum

tum ſit, ſiquidem corpus per ſpiras de loco V in locum v non aliter transferatur, niſi cùm orbes innumeros locis V, v interſcriptos emenſum ſit; cùm præterea, angulo CVb in rectum aucto, ex ſpirarum orbibus innumeri tandem ſint, qui circulum quemvis exſuperent ipſo Vvx minorem; cùm converſionibus ſingulis, per orbes circulo Vvx non minores, tempora etiam tribuenda ſint tempore converſionis integræ per circulum Vvx non minora; cùm denique tempora illa innumera, quæ dato ſingulatim non minora ſint, ſimul ſumpta infinitam quandam durationem conficiant: hæc inquam cùm ita ſint, certè tempus tranſlationis de loco V in v, per ſpiras figuram ſuam ultimam circularem induentes, quod innumeris illis converſionum in dato circulo temporibus minus eſſe nequit, id dato quovis tempore neceſſariò majus erit. Neque magis nos rationes illæ fefellerunt, quæ ex eo quòd, creſcente ſenſim contactûs angulo, ſpirarum figura ultimò, cùm rectus ille factus fuerit, in circularem abierit, tempus tranſlationis ultimum infinitum prodiderunt; quàm illæ, quæ tranſlationi per ſpiras, evaneſcente contactûs angulo & ad nihilum redacto, in rectam abeuntes, tempus ultimum finitum aſſignârunt. Næ ille verò graviter erraverit, qui ultimum illud tranſlationis tempus, per ſpiras in circulos tranſeuntes, tempori dimidiæ converſionis in circulo extimo æquandum judicaverit; cùm revera illud innumera converſionum integrarum tempora in ſe uno contineat. Quod ſi cui videar, dum hæc fuſius diſputarem, longiùs à propoſito divertiſſe, is velim meminerit, me errori arguendo operam dediſſe, qui ex eorum genere eſt, qui incautos facilè irretitos teneant; ſimulque in eam opinionem eos inducant, ut omne id genus argumenti, quod rationibus primis ultimiſque nititur, ſuſpectum habeant. Simul illud oſtendere volui, quod hujus ſeculi hominibus ſatis profecto inculcari nequit, quàm periculoſum ei futurum ſit iter, quàm tenebris caligineque merſum, cui, Phyſicam ingredienti, Geometria facem non prætulerit: quàm claro contrà colluſtrentur omnia lumine, quando ducem viæ atque comitem illa ſe præbuerit. Profecto qui errores, unde ortum ducant, quibus in rebus conſiſtant, optimè expedierit, quâ ratione vitari poſſint certiſſimè monſtrârit, is optimus erit ac certiſſimus, me judice, veritatis magiſter. Ad propoſitum redeo.

PARTIS PRIMÆ CASUS SECUNDUS. (Vid. fig. 10.)

JAM verò è loco V ſecundum rectam VG minore cum velocitate corpus intelligatur emitti, quàm caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum eſſet. Junctâque CV, in rectâ CV productâ detur punctum A, unde ſi corpus rectâ cecidiſſet, velocitatem in loco V adeptum eſſet æqualem ei, quâcum è loco V ſecundum rectam VG exire geſſit. Et manentibus quæ ad analyſin generalem Problematis XXVIII. Libri I. Principiorum in Notâ (f) lineavimus, intelligatur jam AB rectæ AC æqualis. Dataque CA vel AB deſignetur literâ a; data CV, literâ c; indefinita CD, literâ y. Jam cùm è naturâ Curvæ BF, AB ſit ad DF ut vis centralis in loco A ad vim centralem in loco D, hoc eſt, ut cubus ex CD ad cubum ex CA vel AB, erit $\mathrm{DF} = \frac{\mathrm{AB}^3}{\mathrm{CD}^3}\mathrm{AB} = \frac{a^4}{y^3}$. Ergo $\mathrm{DF} \times -\dot{y} = -\frac{a^4}{y^3}\dot{y}$. Harum verò fluxionum

fluxionum fluentes ſunt, alterius quidem area Curvæ BF ad ordinatam DF terminata, alterius ſpatium his notis deſignatum $\frac{a^4}{2y^2}$. Spatium igitur Curvæ BF ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ aut æquale erit, aut alterum altero majus dato. Cùm verò rectæ, quæ poſſint ſpatia BADF, ſint ſemper ut velocitates corporis caſu recto centrum C petentis; quando ordinata DF eum ſitum obtineat, ut corporis ad punctum D, unde illa educta ſit, velocitas ad nullam fuerit redacta, tum profecto recta quæ poterit aream BADF, atque area adeo ipſa, in nihilum abierit. Fluat igitur recta CD, uſquedum punctum mobile D in locum A perveniat, ordinataque DF cum ipſâ AB congruat. Tum demum velocitate corporis ad nullam redactâ, quippe cùm corpus ex ipſo loco A caſum rectum occeperit, area BADF in nihilum abierit. At verò in eo ſitu puncti D ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ dimidio quadrati ex a, vel AC, ſit æquale; nempe cùm y, vel CD, ipſi CA æqualis facta fuerit. Spatium igitur $\frac{a^4}{2y^2}$ areâ BADF dato $\frac{1}{2}a^2$ ſemper majus erit. Ut ſit area $\mathrm{BADF} = \frac{a^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$. Hinc efficietur $\mathrm{UQ}^2 = \frac{a^4}{2\mathrm{CV}^2} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{CV}^2}\mathrm{CA}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{CA}^2$. Et $\mathrm{RS}^2 = \frac{a^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$.

Sed $\mathrm{ST} = \frac{q^2}{y}$ (Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. [f]). Ergo $\mathrm{ST}^2 = \frac{2q^4}{2y^2} = \frac{2\mathrm{CV}^2 \times \mathrm{QW}^2}{2y^2}$. Hinc $\mathrm{RT}^2 = \frac{a^4 - 2q^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$.

Deſignet b rectam, quæ datarum illarum CV, $\sqrt{2\mathrm{UW}^2 + \mathrm{CA}^2}$ proportione media ſit. Erit igitur quadratum ex b rectangulo $\mathrm{CV} \times \sqrt{2\mathrm{UW}^2 + \mathrm{CA}^2}$ æquale. Sive algebraicè $b^2 = \mathrm{CV} \times \sqrt{2\mathrm{UW}^2 + \mathrm{CA}^2}$; et $b^4 = \mathrm{CV}^2 \times \overline{2\mathrm{UW}^2 + \mathrm{CA}^2} = \mathrm{CV}^2 \times \overline{2\mathrm{UQ}^2 - 2\mathrm{QW}^2 + \mathrm{CA}^2}$. At verò ex eo quòd inventum eſt $\mathrm{UQ}^2 = \frac{\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{CV}^2}\mathrm{CA}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{CA}^2$, efficitur $2\mathrm{CV}^2 \times \mathrm{UQ}^2 = \mathrm{CA}^4 - \mathrm{CV}^2 \times \mathrm{CA}^2$. Atque hinc rurſum $b^4 = \mathrm{CA}^4 - 2\mathrm{CV}^2 \times \mathrm{QW}^2 = a^4 - 2q^4$. Cùm igitur inventum eſt $\mathrm{RT}^2 = \frac{a^4 - 2q^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$, erit idem $\mathrm{RT}^2 = \frac{b^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{b^4 - a^2y^2}{2y^2}$. Quare $2\mathrm{RT} = \frac{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}{y}$. Sed $\mathrm{D}b = \frac{q^2}{2\mathrm{RT}}$. Et $\mathrm{D}c = \frac{\mathrm{CV}^2}{y^2} \times \frac{q^2}{2\mathrm{RT}}$ (per formulas generales Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. [f], traditas.)

Quare $\mathrm{D}b = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Et $\mathrm{D}c = \frac{\mathrm{CV}^2 \times q^2}{y\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Hâc ultimâ formulâ definitur Curva acx; atque hæc eſt illa, cujus facilem quadraturam in Corollario tertio Propoſitionis quadrageſimæ primæ Libri Primi Principiorum Newtonus prædicavit. Reverâ ex earum genere eſt, quas in formam primam Claſſis quartæ Tabulæ ſecundæ Libri ſui de Quadraturâ Curvarum Newtonus concluſit. Datâ igitur VD, ope illius Tabulæ dabitur area $\mathrm{AVD}c$, ex relatione quæ illi cum datâ quâdam areâ conicâ intercedat. Datâ autem areâ $\mathrm{AVD}c$, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut in caſu ſuperiori,

Pars Prima. Casus Secundus. riori, dabitur; aſſumptiſque diſtantiis aliis, alia definientur Curvæ VIK puncta. Q. E. I.

COMPOSITIO CASUS II. PARTIS I.

In rectâ CV, infinitè producendâ (fig. 5), capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam AB, ſeu CA, proportionem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB, & à puncto C ad perpendiculum cum rectâ CA educatur ce, quæ junctæ CB fiat æqualis. Centro C ſemiaxe tranſverſo ca, ſecundo ce, ſcribatur hyperbola asr. Punctum V non erit extra hanc hyperbolam. Cùm enim ca ſit recta *b*, cujus quadratum rectangulo $CV \times \sqrt{2UW^2 + CA^2}$ æquale ſit, certè non minus erit quadratum ex illâ *b* quàm rectangulum $CV \times CA$. Haud minus igitur erit quadratum ex *b*, quàm ut habeat ad quadratum ex CV rationem eam, quam rectangulum $CV \times CA$ ad quadratum ex CV; ſive eam, quam recta CA ad rectam CV. Sed talis ſumpta eſt recta ca, ad quam illa CA haberet proportionem eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex CV. Habet igitur CA ad ca rationem quam b^2 ad CV^2. Non minor igitur erit illa CA quàm ut habeat ad ca proportionem eam quam CA ad CV. Invertendo, ca non erit major quàm quæ habeat ad CA proportionem quam CV ad eandem CA. Quare ca non major erit quàm CV. Sed major eſſe deberet, ſi punctum V extra hyperbolam eſſet. Non eſt igitur extra hyperbolam punctum V. Recta igitur ab illo V ordinatim ad axem tranſverſum educta hyperbolæ occurret. Educatur, & hyperbolæ in S occurrat.

Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum X intra ſectionem, quod à vertice ſectionis conicæ a longius ſit remotum, quàm eſt punctum V. Educatur Xr ad axem ca ordinatim, quæ hyperbolæ in r occurrat. Jungantur cs, cr. Centro c, radio cv, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector Vcp, qui habeat ad ſectorem hyperbolicum acr rationem eam quam q^2, ſive rectangulum $CV \times QW$, ad quadratum ex CA. Ducatur recta rt, quæ hyperbolam in r contingens, axi ca in t occurrat. In rectâ cp capiatur cP quæ ad ct eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex ca. Si è loco V (fig. 10) ſecundum rectam VG corpus quodpiam emiſſum fuerit, eâ cum velocitate quam in loco V adeptum eſſet, ſi à loco A, nullâ vi inſitâ præditum, caſum rectum, centrum verſus, occepiſſet, hoc corpus feretur per Curvam, ejus quam punctum P (in fig. 5) perpetuò tangit per omnia ſimilem & æqualem.

DEMONSTRATIO.

In figura 10ª capiatur CD, duarum CX, CV in figurâ 5ª proportione tertiâ, exiſtentibus illis CV, necnon illis CA, illiſque AB, utriuſque figuræ inter ſe æqualibus. Et cùm CX (fig. 5) major ſit quàm CV, erit CV major quàm CD. Quare circulus centro C radio CD ſcriptus in figurâ 10ª curvum corporis tramitem ſecabit. Secet in I, reliqua verò omnia maneant quæ ad Problematis in hoc caſu reſolutionem lineavimus. Jam cùm ſit ca ad CA ut

Compositio ut quadratum ex CV ad quadratum ex *b* (ita enim factum eſt) capiatur β (fig. 10) duarum CV, *b* proportione tertia. Erit igitur ca ad CA ut CV ad β. Quare quadratum ex ca erit ad quadratum ex CA ut quadratum ex CV ad quadratum ex β. Et permutando $ca^2 : CV^2 = CA^2 : \beta^2$. Quare $ca^2 : CV^2 = 2CA^2 : 2\beta^2$. Atque rurſum permutando $ca^2 : 2CA^2 = CV^2 : 2\beta^2$. Sed propter æquales CA, AB & angulum ad A rectum, quadratum ex cB, ſive ejus æquali Ce (fig. 5), quadrati ex CA duplum erit. Quapropter, cùm ſit $ca^2 : 2CA^2 = CV : 2\beta^2$, erit quadratum ex ca ad quadratum ex Ce ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Quapropter in hyperbolâ as$r$, ſpatium quo quadratum ex CX exſuperat quadratum ex dimidio axe ca erit ad quadratum ex ordinatâ Xr, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β.

In figura 10ª, juncta CB occurrat rectæ Db in M. Et capiatur γ, duarum CM, *b* proportione tertia. Rectangulum igitur $CM \times \gamma$ æquale erit quadrato ex *b*, cui etiam rectangulum $CV \times \beta$ æquale erit. Rectangula igitur $CM \times \gamma$, $CV \times \beta$ inter ſe æqualia erunt. Quare γ erit ad β ut CV ad CM, & quadratum ex γ ad quadratum ex β ut quadratum ex CV ad quadratum ex CM. Eſt autem quadratum ex CD quadrati ex CM dimidium; nimirum propter æquales CD, DM, angulumque ad D rectum. Quare duplum quadratum ex γ erit ad quadratum ex β ut quadratum ex CV ad quadratum ex CD; hoc eſt, cùm tribus illis CX (fig. 5), CV, CD (fig. 10), ac proinde earum quadratis, perpetua ſit proportionis convenientia, ut quadratum ex CX ad quadratum ex CV. Quadratum igitur ex CX erit ad quadratum ex CV, ut duplum quadratum ex γ ad quadratum ex β, ſive ut quadruplum quadrati ex γ ad duplum quadratum ex β. Permutando quadratum ex CX erit ad quadruplum quadrati ex γ, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Sed oſtenſum eſt quadratum ex ca eſſe ad quadratum ex Ce, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Quare illud quo quadratum ex CX (fig. 5) exſuperat quadratum ex ca, erit ad illud quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex Ce ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Idem autem illud quo quadratum ex CX exſuperat quadratum ex ca eſt ad quadratum ex Xr, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Id enim jam oſtenſum eſt. Illud igitur quo quadratum ex CX exſuperat quadratum ex ca ad illud quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex Ce eandem, quam ad quadratum ex Xr, proportionem habet. Quadratum igitur ex Xr æquale eſt ei quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex Ce. Illud autem quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex Ce quadruplum eſt quadrati ex RT in fig 10. Nam cùm tribus illis, CM, *b*, γ (fig. 10) perpetua ſit proportionis convenientia, idcirco quadratum ex γ erit ad quadratum ex *b* ut quadratum ex *b* ad quadratum ex CM, hoc eſt ad duplum quadrati ex CD. Verùm ut quadratum ex *b* ad duplum quadrati ex CD, ſic eſt quadratum ex RT, dimidio quadrati ex CA auctum, ad quadratum ex *b*. Namque hoc ipſum declarant notæ illæ, quas analyſis nobis expromebat, $RT^2 = \frac{b^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$. Quadratum igitur ex γ ad quadratum ex *b* eandem quam quadratum ex RT, dimidio quadrati ex CA auctum, proportionem habet. Quare quadrato ex γ æquale erit quadratum ex RT dimidio quadrati ex CA auctum. Et quadruplo quadrati

PARS PRIMA. CASUS SECUNDUS.

quadrati ex γ æquale erit quadruplum quadrati ex RT duplo quadrati ex CA, hoc eſt quadrato ex Ce, auctum. Illud igitur quo quadruplum quadrati ex γ exſuperat quadratum ex Ce, quadruplum eſt quadrati ex RT. Idem verò quadrato ex Xr jam antè oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex Xr quadruplum eſt quadrati ex RT, ac proinde recta Xr dupla erit recta RT.

Jam verò propter perpetuam tribus illis CX (fig. 5) CV, CD (fig. 10) proportionis convenientiam, rectangulum $\mathrm{CX}\times\mathrm{CD}$, quadrato ex CV, hoc eſt dato ſpatio, æquale erit. Quare fluxio hujus rectanguli, $\mathrm{CX}\times\mathrm{CD}$, nihilo æqualis erit; cujus tamen latera CX, CD, modis contrariis fluunt. Rectangula igitur $\dot{\mathrm{CX}}\times\mathrm{CD}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\mathrm{CD}}$ erunt inter ſe æqualia, ut differentiam nullam habeant. Eorum enim differentia, ſi ulla eſſet, ſpatii $\mathrm{CX}\times\mathrm{CD}$ fluxio eſſet: hoc eſt, ſpatium datum flueret. Quod eſt abſurdum. Sunt igitur $\dot{\mathrm{CX}}\times\mathrm{CD}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\mathrm{CD}}$ inter ſe æqualia. Rectarum autem AX, CX fluxiones, propter datam CA, ſunt inter ſe æquales. Hoc eſt $\dot{\mathrm{AX}}$, $\dot{\mathrm{CX}}$ ſunt inter ſe æquales. Rectangulum igitur $\dot{\mathrm{AX}}\times\mathrm{CD}$ æquale erit illi $\dot{\mathrm{CX}}\times\mathrm{CD}$, cui etiam illud $\mathrm{CX}\times\dot{\mathrm{CD}}$. Quare rectangula $\dot{\mathrm{AX}}\times\mathrm{CD}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\mathrm{CD}}$ erunt inter ſe æqualia. Quare $\dot{\mathrm{AX}}$ erit ad $\dot{\mathrm{CD}}$ ut CX ad CD. Quare rectangulum $\dot{\mathrm{AX}}\times\mathrm{X}r$, ſive fluxio ſpatii hyperbolici AXr, erit ad rectangulum $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{X}r$ ut CX ad CD.

Præterea cùm ſit Xr (fig. 5) dupla recta RT (fig. 10), dimidium rectanguli $\mathrm{CX}\times\mathrm{X}r$, ſive triangulum CX$r$, æquale erit rectangulo $\mathrm{CX}\times\mathrm{RT}$. Verùm rectæ CX, RT eodem modo fluunt. Nam RT neceſſariò fluet eodem modo, quo Xr, cujus illa RT eſt ſemiſſis. Et Xr, quæ ordinatim applicata eſt ad axem tranſverſum hyperbolæ, eodem modo, quo abſciſſa CX fluet. Fluunt igitur, ſicut dixi, illæ CX, RT eodem modo. Illis autem eodem modo fluentibus, fluxio rectanguli $\mathrm{CX}\times\mathrm{RT}$, cujus eæ ſunt latera, ſummæ rectangulorum $\dot{\mathrm{CX}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\mathrm{RT}}$ æqualis erit. Erit autem $\dot{\mathrm{CX}}\times\mathrm{RT}$ ad $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$, ut $\dot{\mathrm{CX}}$ ad $\dot{\mathrm{CD}}$. Sed oſtenſa eſt $\dot{\mathrm{AX}}$, vel $\dot{\mathrm{CX}}$, eſſe ad $\dot{\mathrm{CD}}$ ut CX ad CD. Rectangulum igitur $\dot{\mathrm{CX}}\times\mathrm{RT}$ ad rectangulum $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$ rationem habet eam quam CX ad CD. Sed rectangulum etiam $\mathrm{CX}\times\dot{\mathrm{RT}}$ ad rectangulum $\mathrm{CD}\times\dot{\mathrm{RT}}$ rationem habet quam CX ad CD. Summa igitur rectangulorum $\dot{\mathrm{CX}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CX}\times\dot{\mathrm{RT}}$, ſive fluxio trianguli CXr (fig. 5), ad ſummam rectangulorum $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CD}\times\dot{\mathrm{RT}}$ rationem habebit eam quam CX ad CD. Sed oſtenſum eſt fluxionem ſpatii hyperbolici AXr ad rectangulum $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{X}r$, ſive ad duplum rectanguli $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$, rationem habere eam quam CX ad CD. Quare & illud quo fluxio ſpatii hyperbolici AXr abeſt à fluxione trianguli CXr, hoc eſt fluxio ſectoris hyperbolici CAr, ad illud quo duplum rectangulum $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$ à ſummâ rectangulorum $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$, $\mathrm{CD}\times\dot{\mathrm{RT}}$ abeſt, hoc eſt, ad differentiam rectangulorum $\mathrm{CD}\times\dot{\mathrm{RT}}$, $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$, eandem etiam rationem geret, quam CX ad CD. Fluxio inquam ſectoris hyperbolici CAr ad rectangulorum $\mathrm{CD}\times\dot{\mathrm{RT}}$, $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$ diffe-

3

COMPOSITIO

rentiam rationem habebit quam CX ad CD. Rectangulorum autem $\mathrm{CD}\times\dot{\mathrm{RT}}$, $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$ differentia fluxio eſt rectanguli $\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}$. Nempe cùm illæ CD, RT modis contrariis fluant. Fluit enim CD (fig. 10) contrario modo atque CX (fig. 5), cùm illæ CD, CX datum ſpatium contineant. Sed oſtenſa eſt illa CX eodem modo fluere quo RT. Quare CD, RT modis contrariis fluunt, rectangulorumque $\mathrm{CD}\times\dot{\mathrm{RT}}$, $\dot{\mathrm{CD}}\times\mathrm{RT}$ differentia fluxio erit rectanguli $\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}$. Erit igitur fluxio ſectoris hyperbolici CAr (fig. 5) ad fluxionem rectanguli $\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}$ (fig. 10) ut CX (fig. 5) ad CD (fig. 10).

Jam verò ex æquatione illâ, quam analyſis nobis expromebat, $\mathrm{RT}^2 = \frac{b^4 - a^2y^2}{2y^2}$, deſignante utique literâ y rectam CD, veniet $\mathrm{RT} = \frac{\sqrt{b^4 - a^2y^2}}{\sqrt{2}\times y}$; et $\mathrm{RT}\times\mathrm{CD} = \sqrt{\frac{b^4 - a^2y^2}{2}}$. Unde rurſum $\dot{\overline{\mathrm{RT}\times\mathrm{CD}}} = \frac{-a^2y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}}$. Quare $\dot{\overline{\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}}} \times \frac{q^2\mathrm{CV}^2}{a^2y^2} = \frac{q^2\mathrm{CV}^2}{y\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}} \times -\dot{y} = \mathrm{D}c \times -\dot{y}$. Notis autem $\mathrm{D}c \times -\dot{y}$ deſignatur fluxio areæ $a\mathrm{VD}c$, in figurâ 10ª. Quare $\dot{\overline{\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}}} \times \frac{q^2\mathrm{CV}^2}{a^2y^2} = \dot{\overline{a\mathrm{VD}c}}$. Hoc eſt, fluxio areæ $a\mathrm{VD}c$ ad fluxionem rectanguli $\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}$ rationem habet compoſitam è rationibus ſpatii q^2, ſive rectanguli $\mathrm{CV}\times\mathrm{QW}$, ad a^2, ſive quadratum ex CA; quadratique ex CV ad quadratum ex y, vel CD; compoſitam igitur è rationibus rectanguli $\mathrm{CV}\times\mathrm{QW}$ ad quadratum ex CA, rectæque CX (fig. 5) ad rectam CD; eam igitur quæ eſt Solidi $\mathrm{CV}\times\mathrm{QW}\times\mathrm{CX}$ ad Solidum $\mathrm{CA}^2\times\mathrm{CD}$. Sed ex ſuprà oſtenſis, fluxio rectanguli $\dot{\overline{\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}}}$ (fig. 10) erit ad fluxionem ſectoris hyperbolici CAr (fig. 5) ut CD (fig. 10) ad CX (fig. 5); ſive ut Solidum $\mathrm{CA}^2\times\mathrm{CD}$ ad Solidum $\mathrm{CA}^2\times\mathrm{CX}$. Cùm igitur fluxio areæ $a\mathrm{VD}c$ ſit ad fluxionem rectanguli $\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}$ ut Solidum $\mathrm{CV}\times\mathrm{QW}\times\mathrm{CX}$ ad Solidum $\mathrm{CA}^2\times\mathrm{CD}$, fluxio autem rectanguli $\mathrm{CD}\times\mathrm{RT}$ ad fluxionem ſectoris hyperbolici CAr ut Solidum $\mathrm{CA}^2\times\mathrm{CD}$ ad Solidum $\mathrm{CA}^2\times\mathrm{CX}$; ex æquo, fluxio areæ $a\mathrm{VD}c$ erit ad fluxionem ſectoris hyperbolici CAr, ut rectangulum $\mathrm{CV}\times\mathrm{QW}$ ad quadratum ex CA. Et cùm hæc data ſit fluxionum inter ipſas ratio, fluentibus etiam aut eadem interveniet, aut altera earum dato quodam ſpatio major erit quàm pro hâc ratione. (Geometr. Flux. Th. IV.)

Fluat igitur CD (fig. 10) donec ipſi CV æqualis evadat. Jam in fig. 5ª ſector hyperbolicus fit CAs, area autem $a\mathrm{VD}c$ (fig. 10) in nihilum abierit. Quare ſector hyperbolicus CAr dato CAs ſemper major erit, quàm ut habeat ad aream $a\mathrm{VD}c$ rationem eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum $\mathrm{CV}\times\mathrm{QW}$. Sector igitur CS$r$ ad aream $a\mathrm{VD}c$, ſive illi æqualem ſectorem ACX datam illam rationem habebit. Capiatur in fig. 5. ſector circularis VCf qui ad ſectorem hyperbolicum ACS rationem eam habeat, quam rectangulum $\mathrm{CV}\times\mathrm{QW}$ ad quadratum ex CA. Punctum ipſum f erit ad Curvam, quam punctum P perpetuò tangit. Nam ſi recta, quæ hyperbolam in s contingat, axi CA in σ occurrat, erit CV ad Cσ ut quadratum ex CV ad quadratum ex CA. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLIX.) Quare Cf, cùm æqualis ea ſit

 rectæ

PARS PRIMA. CASUS SECUNDUS. rectæ cv, erit ad cσ ut quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Punctum igitur *f* ad Curvam eſt, quam punctum P perpetuò tangit. Præterea cùm ſector hyperbolæ ac*s* ad ſectorem circuli vc*f*, ſector item hyperbolæ ac*r* ad ſectorem circuli vc*p* rationem habeat eam, quam quadratum ex cA ad rectangulum cv × QW; idcirco ſector etiam hyperbolæ *scr* ad ſectorem circuli *fcp* eandem illam rationem habebit. Hoc eſt, eandem quam ſector ille hyperbolæ *scr* ad ſectorem circularem vcx (fig. 10) oſtenſus eſt habere. Sectores igitur circulares vcx (fig. 10) *fcp* (fig. 5) inter ſe æquales. Æquales autem radii vc, *f*c. Quare anguli quoque vcx, *fcp* inter ſe æquales erunt. Rurſum cùm rectangulum CD × cx (fig. 10) æquale ſit quadrato ex cv (fig. 5) ita enim factum eſt, rectangulum autem c*t* × cx (fig. 5) æquale quadrato ex ca (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLIX.) idcirco erit CD × cx ad c*t* × cx ut cv^2 ad ca^2. Quare CD : c*t* = cv^2 : ca^2. Eſt autem CP : c*t* = cv^2 : ca^2. (Ita enim factum eſt.) Erunt igitur CP (fig. 5), CD ſeu CI (fig. 10) inter ſe æquales. Et ſimili argumentatione Curvarum VK, *f*P, radii omnes qui cum primariis illis cv, c*f* angulos æquales faciant, oſtendentur inter ſe æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter ſe ſimiles erunt & æquales. Q. E. D.

*De naturâ Curvæ f*P*; de Apſidibus ejus inveniendis, perficiendâque ejus figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus ſpatia corpora abſolvant. De Tempore converſionis integræ per Curvam perfectam, ejuſque ad tempus converſionis in Circulo, necnon ad tempus caſûs recti, ratione.*

§ I. DEFINITIO.

Puncta r & P (fig. 5), cognata dico Hyperbolæ Curvæque.

2. Curva *f*P centrum ſuum c gyris innumeris cinget, quorum arctiſſimi propiùs idem accedent quam pro datâ quâlibet diſtantiâ.

3. Capiatur cM (fig. 5) duarum ca, cv proportione tertia. Erit M punctum ubi Curva P*f*Π axi hyperbolæ ca producto occurret. Etenim fluente arcu hyperbolæ a*r*, Curvæque P*f*, arcu a*r* tandem ad nihilum redacto, radius CP congruet cum axe ca producto, punctaque *r*, x cum puncto a congruent; & ca ultima erit rectæ cx magnitudo. Jam verò cùm CD (fig. 10), ſive illi æqualis CP (fig. 5) duarum cx, cv ſemper ſit proportione tertia, cùm cx æqualis facta fuerit datæ ca, fiet CP, quam poſitione cum ca congruere oſtendimus, fiet ea duarum ca, cv proportione tertia. Rectæ igitur cM æqualis ea fiet, et punctum P cum puncto M congruet.

4. Scriptâ modo quo diximus Spirâ CP*f*M, ſi a quolibet ejus puncto Π in axem hyperbolæ ca ad perpendiculum demittatur ΠN, & in ΠN productâ, ad alteram partem axis capiatur NO ipſi ΠN æqualis, atque hoc ſemper fiat; nova efformabitur Spira MOC, prioris per omnia ſimilis & æqualis, ſed ab alterâ parte axis poſita, ſinubuſque adverſis. Hanc autem ex ſemihyperbolâ aw eodem modo efformare licet, quo alteram ex ſemihyperbolâ a*r* efformare docuimus. Jam ſi junctæ Πc, oc ultra centrum producantur,

tur, & in productis capiantur cH, cL ipſis cΠ, co æquales, atque hoc ſem- SPIRÆ HYPERBOLICÆ OPPOSITÆ.
per fiat; novæ rurſum exſiſtent Spiræ, priorum per omnia ſimiles & æquales, quæ priorum Oppoſitæ haud immeritò nominentur; quippe quibus eædem planè cum Hyperbolâ oppoſitâ, quæ prioribus cum hyperbolâ a*sr*, cognationes intercedunt. Quo enim modo priores ex hyperbolâ a*sr* efformatæ ſunt, eodem hæ ex oppoſitâ efformari poterunt.

5. Hæ Spiræ Oppoſitæ unam tantummodo figuram conſtituere cenſendæ ſunt, ſicut Hyperbolæ Oppoſitæ, ex quibus illæ ſunt efformatæ, unam.

6. Radius quiſque CP, à centro c Spiras uſque eductus, angulum cum Anguli radiorum cum Curvâ.
Curvâ faciet, qui hoc modo definietur (vid. fig. 6.)

A puncto hyperbolæ cognato *r* ad axem tranſverſum deducatur *r*x ordinatim, quæ in puncto d media dividatur. In abſciſſâ cx capiatur x*g*, quæ habeat ad cx rationem eam, quam (in fig. 10) QW ad cv. Junctâ d*g*, angulus xd*g* æqualis erit ei, quo radius CP inclinatur ad Curvam.

Nam, in fig. 10, rectangulum ST × CD rectangulo cv × QW æquale eſt. Id enim in demonſtratione noſtrâ Propoſitionis XLI. Libri primi Principiorum oſtenſum eſt. Et in fig. 6, rectangulum cx × CP quadrato ex cv æquale eſt. Quare rectangulum ST × CD (fig. 10) erit ad rectangulum cx × CP (fig. 6) ut rectangulum cv × QW ad quadratum ex cv. Quare ST (fig. 10) ad cx (fig. 6) ut QW ad cv. Eſt autem x*g* ad cx ut QW ad cv. Quare ST eandem quam x*g* ad illam cx rationem habet. Erunt igitur ST, x*g* inter ſe æquales. Sed & xd, RT inter ſe ſunt æquales. Nimirum cùm illa xd facta eſt, & illa RT oſtenſa eſt, ſemiſſis rectæ x*r*. Anguli quoque *g*x*d*, STR inter ſe æquales, rectus enim uterque. Quare & angulus x*dg* (fig. 6), angulo TRS (fig. 10) æqualis erit. Sed angulus TRS æqualis eſt ei, quo radius CI ad Curvam VIK inclinatur, ita enim factus eſt; & propter Curvarum VIK (fig. 10) *f*P (fig. 6) æqualitatem & ſimilitudinem, radii CI, CP qui æquales angulos cum primariis uterque ſuis, cv, c*f*, conſtituunt, ad Curvas item uterque ſuas æqualiter erunt inclinati. Angulus igitur x*dg* æqualis erit ei quo radius CP ad Curvam inclinatur. Q. E. D.

7. Per a verticem hyperbolæ ducatur recta a*k* quæ hyperbolam in ver- Angulus minimus.
tice a contingat, et aſymptotarum alteri in *k* occurrat. Media dividatur a*k* in puncto *l*. Capiatur a*q*, quæ ad ſemiaxem tranſverſum eam rationem habeat, quam QW ad cv; et jungatur *ql*. Angulus quo radius quilibet Spirarum CP ad Curvam inclinatur angulo *ql*a major erit: ſed radio mobili CP circum centrum c circumacto, et infinitè imminuto, angulus inclinationis ille uſque minuetur, ut ad æqualitatem cum dato *ql*a propiùs tandem redactus erit, quàm pro datâ quâvis differentiâ. Occurrat enim x*r* aſymptotæ c*k* in v. Media dividatur xv in *h* & jungatur *gh*. Propter parallelas a*k*, xv, erit cx ad xv ut ca ad a*k*. Et cx ad ſemiſſem illius xv, ut ca ad ſemiſſem ipſius a*k*, hoc eſt ad a*l*. Eſt autem x*g* ad xc, ut QW ad cv, ſive ut a*q* ad ca. Cùm igitur ſit x*g* : xc = a*q* : ac
et xc : x*h* = ac : a*l*
ex æquo erit x*g* ad x*h* ut a*q* ad a*l*. Anguli autem *g*x*h*, *q*a*l* inter ſe æquales, nempe cùm uterque rectus ſit. Triangula igitur *g*x*h*, *q*a*l* inter ſe

Pars Prima. Casus Secundus.

ſe ſimilia, angulique gbx, q/a inter ſe æquales erunt. Sed recta xr minor eſt quàm xv. Quare ſemiſſis rectæ xr minor eſt quàm ſemiſſis rectæ xv, hoc eſt xd minor eſt quàm xb. Quare angulus gdx angulo gbx, atque ejus æquali q/a major (El. I. 21.) Quare et angulus quo radius CP ad Curvam inclinatur, cùm oſtenſus ſit æqualis angulo gdx, idem angulo q/a major erit.

Jam verò radio CP infinitè imminuto, CX infinitè augebitur; propter perpetuam trium CP, CV, CX proportionis convenientiam. Infinitè autem auctâ CX, illæ xr, xv, atque earum proinde ſemiſſes, æqualitatem infinitè accedent, et triangula xdg, q/a ſimilitudinem. Angulus igitur gdx minuetur uſque, et illi q/a ultimò æqualis fiet. Quare et angulus inclinationis radii CP ad Curvam, qui eâ lege fluit ut fluenti gdx ſemper ſit æqualis, ille mò æqualis erit. Conſtat igitur propoſitum.

Spirarum Apſides.

8. Puncta a, M Hyperbolæ Spiræque ſunt cognata (per § 3. & Def.) Angulus igitur, quo radius CM ad Spiram inclinatur, æqualis erit angulo gdx, qualis tunc ille factus fuerit, cùm, radio CP in CM aucto, puncta r, x locum a, ipſum utique verticem hyperbolæ, devenerint. At verò decreſcente arcu hyperbolico ar, angulus gdx augetur uſque; et tunc cùm, arcu illo ad nihilum redacto, puncta r, x locum a devenerint, rectus ille factus erit. Radius igitur CM Curvam ad perpendiculum inſiſtit. Hoc eſt punctum M Spirarum Apſis erit. Et ſi capiatur Cm æqualis rectæ CM erit m Oppoſitarum Apſis.

Velocitas motûs in Spiris Hyperbolicis.

9. Velocitas corporis per has Spiras lati in loco quovis P erit ut recta gd. Et velocitas in Apſide erit ad velocitatem in alio quovis loco P ut qa ad gd. Namque ex iis quæ § 7. oſtendimus, liquet illam gd rectæ RS in figurâ 10 æqualem eſſe. Eſt autem RS ut velocitas in loco I illius figuræ, vel P hujus. Præterea puncto P in M tranſlato, puncta x, r transferentur in a, & gd æqualis fiet illi qa.

10. Si è loco f, in alterâ Spirarum Oppoſitarum dato, corpus aliquod ſecundum rectam, quæ ſpiram ibi loci contingat, juſtâ cum velocitate emiſſum fuerit, urgentibus utique viribus centripetis, quæ rationem inter ſe triplicatæ diſtantiarum contrariam conſtanter ſervent; corpus illud per Spiram fPC delatum gyris innumeris circum centrum C circumagetur; atque intra certum quoddam temporis ſpatium, cujus definiendi rationem mox ſumus traditurí, centrum illud propiùs quidem acceſſerit, quàm pro datâ quâvis diſtantiâ; ipſum verò nunquam attinget: at elapſo tempore illo, centrum quod tranſire ei non licuit, prætergreſſum Spiram Oppoſitam invaſerit, cujus ductum ſequens, Apſidem uſque m aſcendet. Ubi paulatim converſo rurſum, centrum verſus, itinere per Spiram mLC deferetur, centrumque ut antè prætergreſſum per ſpiram COM Apſidem uſque alteram, M, aſcendet. Inde rurſum per ſpiram AMC deferetur, eaſdemque in perpetuum ibit redibitque vias.

11. Quadraturam ſpatiorum, quæ Spirarum de quibus agimus datæ partes claudant, hâc ratione perficio.

Jam

Spirarum Hyperbolicarum Quadratura.

Jam antè per analyſin obtinuimus $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a y^2}}$. Hinc $Db \times -\dot{y} = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}} \times -\dot{y}$. Atque hæc erit fluxio areæ aVDb, ſive illi æqualis VCI, in figurâ 10, vel areæ fCP in figurâ illâ 6, quam modò lineavimus. Area igitur VCI, vel fCP $(= \boxed{Db \times -\dot{y}})$ ſpatio $\frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2b^4 - 2a^2y^2}$, ſive $\frac{q}{\sqrt{2} \times a}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} - y^2}$, vel æqualis erit, vel eo major minorve dato (Newton. Tab. Curv. I. Claſſ. IV. Form. I.) idque quæcunque aſſumpta fuerit diſtantia CV, vel Cf, modo datâ CM non ſit major, quâ utique majori eſſe non licet. Ponatur igitur Cf, ipſi CM æqualis, ut area fCP in aream MCP tranſeat, et angulus CVG (in fig. 10, & illi æqualis QUW) rectus fiat. Et in figurâ 10, capiatur CM rectæ CM in figurâ ſextâ æqualis. Tum q^2 fiet CM × UQ (fig. 10), ſive CM × qa (fig. 6), et b^2 fiet CM × CA (fig. 10, ſive CM × CA (fig. 6), rectâ utique UW ad nihilum redactâ. Notæ autem $\sqrt{2} \times a$ rectam Ce ſemper ſignificant. Area igitur MCP (fig. 6) ſpatio $\frac{CM \times qa}{Ce}\sqrt{CM^2 - CP^2}$ vel æqualis vel eo major minorve dato erit. Fluat y, vel CP, donec ipſi CM evaſerit æqualis. Tum puncto P in ipſum M tranſlato, area MCP in nihilum abierit. In nihilum etiam ſpatium illud $\frac{CM \times qa}{Ce}\sqrt{CM^2 - CP^2}$. Area igitur MCP ſpatio iſto, quod ſimul cum eâ in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur C, radio CM, ſcribatur circulus (fig. 7) qui rectæ Ce, radium CM ad perpendiculum inſiſtenti, in punctis O, o occurrat. Ad rectam Ce (= CB fig. 5) applicetur rectangulum ez rectangulo CM × qa æquale. In CM capiatur CΠ ſpiram radio CP æqualis. Educatur ad perpendiculum ΠΦ, quæ circulo in Φ occurrat, et in Oo deducatur ad perpendiculum ΦΨ. Si punctum P in eâdem ſpirâ ſit, in quâ eſt apſis M, ſector ſpiræ MCP, axe CM radioque CP interceptus, rectangulo CZ × CΨ æqualis erit: area verò quæ inter brachium ſpirarum totum MPC axemque MC eſt concluſa, rectangulo CZ × CO: pars illius areæ, à loco P centrum uſque, rectangulo CZ × ΨO. Area verò MPCπ, ab apſide M per brachium ſpiræ MPC centrum uſque atque à centro rurſum uſque punctum π brachii oppoſiti, quod à centro pari diſtantiâ cum ipſo P remotum ſit, hæc inquam area rectangulo CZ × $\overline{\text{CO} + \text{O}\Psi}$ æqualis erit: atque ſpatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ intus habent, duplum erit rectanguli CZ × Oo.

Tempora motûs in Spiris Hyperbolicis definiuntur.

12. Hinc parte quartâ temporis converſionis integræ, per Spiras quo ſuprà § 11. expoſuimus modo perficiendæ, corpus ab Apſide M, per ſpiram MPC delatum, propiùs centrum C acceſſerit quàm pro datâ quâvis diſtantiâ. Tempus autem quo conficitur area, quæ, à dato ſpirarum puncto P initium ſumens, circa centrum deſinat, erit ad tempus, quo conficitur area, quæ, ab apſide M initium ſumens, circa centrum item deſinat, hoc eſt ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut ſinus verſus arcûs ejus cujus ſinus eſt CP pro radio CM ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apſide M initium ſumens, ad radium CP ejuſdem ſpiræ in quâ eſt M terminetur, erit ad partem quartam temporis converſionis integræ, ut coſinus

Pars Prima. Casus Secundus.

sinus arcûs ejus, cujus sinus est CP pro radio CM, ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apside M initium sumens, ad punctum π spiræ oppositæ terminetur, erit ad partem quartam temporis conversionis integræ, ut summa radii et sinûs versi ejus arcûs, cujus sinus est $C\pi$ pro radio CM, ad radium. Atque horum ope facilis erit Temporum æstimatio, quibus conficiantur areæ, quæ datis quibuscunque spirarum radiis interceptæ sint.

Velocitas in Spiris Hyperbolicis confertur cum Velocitate in Circulis.

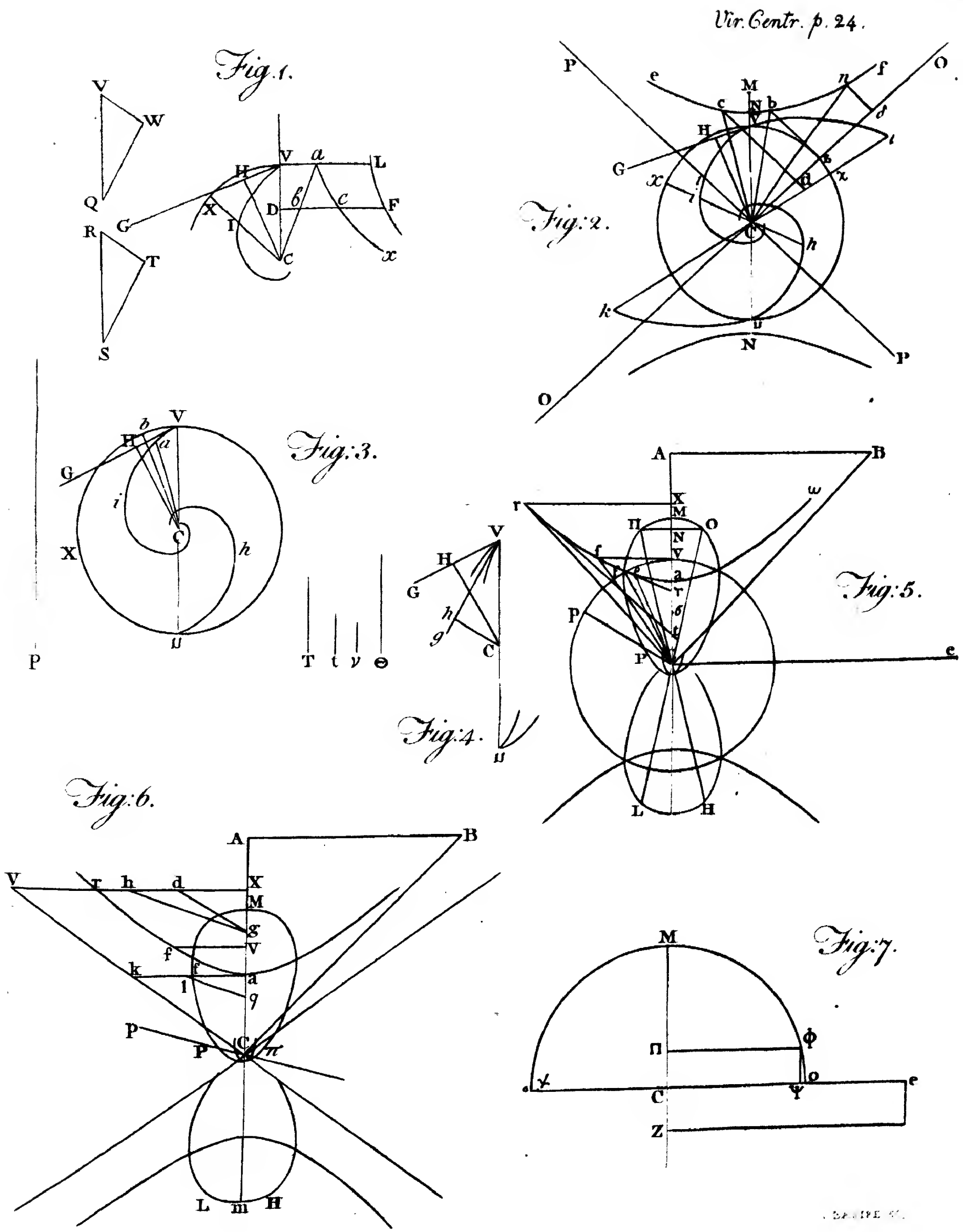
13. Velocitas corporis per Spiras lati in loco quovis V (fig. 10), est ad velocitatem corporis quod, urgentibus eisdem viribus centripetis, circumagitur in Circulo, cujus radius CV, ut recta quæ possit spatium illud, quo quadratum ex CA exsuperat quadrum ex CV ad rectam ipsam CA. Occurrat enim VA rectæ CB in μ. Recta UQ est ad rectam, quæ potest spatium illud quo quadratum ex CA exsuperat quadratum ex CV, ut CA ad $C\mu$. Nimirum hoc ipsum vult æquatio illa, quam analysis nobis expromebat, $UQ = \frac{CA}{\sqrt{2}\times CV}\sqrt{CA^2 - CV^2}$. At verò si corpus à distantiis infinitis cecidisset, ut adeptum esset in V velocitatem illam quæ est corporis in Circulo ad distantiam CV circumacti, UQ habuisset ad ipsam CA rationem eam quam CA ad $C\mu$. Id quod quivis intelliget, qui Propositionis XXXIX. Newtonianæ Doctrinam perceptam habeat, quique nostram simul casûs tum superioris tum hujusce analysin memoriâ teneat. Quare illa UQ, quæ velocitatem corporis per spiras lati in loco V repræsentat, ad rectam, quæ potest spatium quo quadratum ex CA exsuperat quadratum ex CV, eandem rationem habet quam altera UQ, quæ corporis in Circulo velocitatem refert, ad ipsam CA. (El. V. 11.) Permutando illa prior UQ erit ad hanc alteram ac proinde velocitas illa prior in puncto spirarum V, erit ad hanc alteram in circulo velocitatem, ut recta, quæ potest spatium quo quadratum ex CA exsuperat quadratum ex CV, ad ipsam CA.

Tempora conversionum integrarum in Spiris conferuntur cum Temporibus conversionum in Circulis.

14. Scriptis Spiris quarum centrum C, apsides M, m (fig. 8), si centro C, radio CM scribatur Circulus, et à puncto A agatur recta AF quæ circulum illum contingat, et si sit F punctum contactûs; velocitas corporis per Spiram lati in Apside ipsâ M, ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius CM, circumacti, rationem habebit eam quam recta AF ad CA. Namque quadratum ex AF æquale est rectangulo $mA \times AM$ (El. III. 36.) Et hoc rectangulum est illud quo quadratum ex CA exsuperat quadratum ex CM (El. II. 6.) Recta igitur AF ea est, quæ potest spatium quo quadratum ex CA exsuperat quadratum ex CM. Constat igitur propositum ex superiore.

15. E loco M exire intelligantur corpora duo, quorum alterum per Circulum, centro C, radio CM scriptum, feratur, alterum per Spiras Hyperbolicas Oppositas, quarum centrum C, Apsides M, m; urgentibus utique viribus quæ centrum C respiciant, et rationem triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servent. Tempus conversionis integræ per Spiras ad Tempus conversionis integræ in Circulo rationem habebit, quæ componetur è rationibus rectæ CA ad CM, radiique circuli ad partem quartam circuitûs. Hoc est, si circuitus circuli qui radium habet CM, rectæ p æqualis sit, erit Tempus conversionis per Spiras ad tempus conversionis in Circulo ut CA ad $\frac{1}{4}p$.

Exponatur



Exponatur recta T datæ cujusvis longitudinis. Sit alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus conversionis per Circulum ad tempus conversionis per Spiras. Dico illam T ad hanc Θ rationem habere eam quam CA ad $\frac{1}{4}p$. Sint MCE, MCD sectores Circuli Spiræque motûs initio simul confecti, et habeat recta t ad rectam T rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores illi ad tempus conversionis integræ per Spiras. Habeat autem t ad aliam rectam v, rationem eam quam sector Spiræ MCE ad sectorem Circuli MCD. Designet denique litera A spatium illud omne, quod Spiræ Oppositæ intus habent. Casus Secundus.

Jam spatium A ad aream circuli MmF rationem habet, quæ est rectanguli T × t ad rectangulum Θ × v. Id enim eisdem planè argumentis ostendi potest, quibus in § 10 casûs superioris ostendimus A esse ad aream circuli VvX ut T × t ad Θ × v. Jam verò t ad v rationem habet, quam sector spiræ MCE ad sectorem circuli MCD, hoc est, eam quam AF ad CA. Nam velocitates quibuscum corpora duo, quorum alterum per Spiras, alterum per Circulum feratur, è loco M exeant, sunt inter se sicut rectæ FA, CA (per § 14). Et arcus nascentes spiræ circulique, ME, MD, erunt primò quidem inter se sicut velocitates illæ. Sectoribus igitur MCE, MCD nascentibus prima ratio, cùm ea sit illa quæ rectangulis etiam nascentibus CM × ME, CM × MD est prima, ea erit, quæ rectis datis FA, CA intercedat. Quæ verò sectoribus MCE, MCD prima fuerit ratio, ea quidem, dummodo simul conficiantur, semper inter eos manet. Habet igitur, sicut modò asseveravimus, recta t ad v rationem illam quam FA ad AC. Rectangulum igitur T × t ad rectangulum Θ × v rationem habet, eam quam rectangulum T × FA ad rectangulum Θ × CA. Sed ostensum est spatium A ad aream circuli MQF rationem habere eam, quam T × t ad Θ × v. Habebit igitur spatium A ad aream circuli MQF rationem eam, quam rectangulum T × FA ad rectangulum Θ × CA. Atqui spatium A duplo rectangulo CZ × Oo æquale est (secundum ea quæ nos, § 12, ostendimus). Et area circuli MQF rectangulo $\frac{1}{2}p$ × CM æquale est (secundum ea quæ demonstravit Archimedes). Rectangulum igitur 2CZ × Oo erit ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × FA ad rectangulum Θ × CA. Hoc est, cùm recta Oo dupla sit rectæ CM, rectangulum 4CZ × CM erit ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, sive 8CZ × CM ad p × CM, sive denique 8CZ ad p, ut T × FA ad Θ × CA. Quare rectangulum 8CZ × Ce ad rectangulum p × Ce, sive CZ × Ce, ad $\frac{1}{8}p$ × Ce, ut T × FA ad Θ × CA. Permutando CZ × Ce ad T × FA ut $\frac{1}{8}p$ × Ce ad Θ × CA. Rectangulum autem CZ × Ce rectangulo CM × qA æquale est (§ 9 & 11). Erit igitur CM × qA ad T × FA ut $\frac{1}{8}p$ × Ce ad Θ × CA. Invertendo T × FA ad CM × qA, ut Θ × CA ad $\frac{1}{8}p$ × Ce. Erit autem CM × qA ad CM × FA ut qA ad FA, hoc est ut CA ad MO. (Secundum ea quæ ex formulâ generali, $VQ = \sqrt{\frac{a^4 - a^2c^2}{2c^2}}$, suprà disputavimus, posito jam c = CM.) Jungatur mO. Triangula CAB, mOM, cùm angulos ad A et O rectos habent, lateraque circa angulos rectos utrumque æqualia, idcirco inter se similia erunt. Et CA erit ad CB ut MO ad Mm. Permutando CA ad MO ut CB, vel Ce, ad Mm. Rectangulum igitur CM × qA erit ad rectangulum CM × FA ut Ce ad Mm (El. V. 11.) sive ut $\frac{1}{8}p$ × Ce ad $\frac{1}{8}p$ × Mm.

 Cùm

Cùm igitur ſit T × FA : CM × qa = Θ × CA : $\frac{1}{8}p$ × Ce,
Atque rurſum CM × qa : CM × FA = $\frac{1}{8}p$ × Ce : $\frac{1}{8}p$ × Mm,
ex æquo, erit T ad CM ut Θ × CA ad $\frac{1}{8}p$ × Mm. Sive cùm Mm dupla ſit rectæ CM, erit T ad CM ut Θ × CA ad $\frac{1}{4}p$ × CM. Quare T × CA erit ad CM × CA ut Θ × CA ad $\frac{1}{4}p$ × CM. Permutando T : Θ = CA : $\frac{1}{4}p$. Q. E. D.

16. Hinc ſi capiatur recta CA æqualis arcui MFO, ſive parti quartæ circuitûs circuli cujus radius eſt CM, corpus è loco M ſecundum rectam quæ ſit ad perpendiculum cum radio CM emiſſum, eâ cum velocitate quam caſu recto è loco A locum uſque M adeptum eſſet, converſionem integram eodem temporis ſpatio per Spiras ſuas abſolverit, quo corpus aliud in Circulo MQF.

17. Pars quarta converſionis integræ per Spiras, hoc eſt tempus, quo corpus per Spiras ab apſide M centrum propius fuerit delatum quàm pro datâ quâvis diſtantiâ, ad tempus converſionis in Circulo rationem habebit eam quam CA ad totum circuli MmF circuitum. Nimirum cùm ſit T : Θ = CA : $\frac{1}{4}p$, erit $\frac{1}{4}$ T : Θ = CA : p.

Tempora caſûs recti è locis datis centrum uſque conferuntur cum temporibus in circulis.

18. Cùm verò, qualiſcunque fuerit rectæ CA longitudo, ea temporibus proportio intercedat, ut ſit tempus per Spiras ab apſide M, propiorem uſque datâ quâlibet à centro C diſtantiam, ad tempus converſionis integræ in Circulo MmF, ut recta CA ad circuitum circuli MmF; ſi recta CA paulatim decreſcat, uſquedum rectæ CM æqualis fiat, quo facto velocitas etiam corporis, è loco M ſecundum rectam quæ radium CM ad perpendiculum inſiſtat emiſſi, paulatim decreſcet, punctoque A in ipſum M tranſlato ad nullam planè redigetur; tempus ultimum tranſlationis de apſide M centrum uſque, per ſpiras in ipſam rectam Mm ultimò abeuntes, hoc eſt tempus caſûs recti corporis, quod è loco M, nullâ vi inſitâ præditum, caſum occeperit, tempus inquam caſûs recti hujus corporis, è loco M centrum uſque, erit ad tempus converſionis in circulo MmF ut CM ad circuitum circuli MmO, hoc eſt ut radius circuli ad circuitum.

Tempora definiuntur quibus caſu recto data ſpatia abſolvantur.

19. Tempora denique quibus caſu recto rectæ MC partas datæ abſolventur, ſi corpus è loco M nullâ vi inſitâ præditum caſum occeperit, hâc ratione definias. A puncto quovis G in rectâ CM educatur ad perpendiculum recta GH, quæ circulo, centro C, radio CM ſcripto, in H occurrat (fig. 9). Et à puncto H in radium CO, qui illum CM ad perpendiculum inſiſtat, deducatur ad perpendiculum recta HK. Tempus caſûs recti è loco M centrum uſque C erit ad tempus caſûs recti locum uſque G ut CO ad CK; ad tempus autem caſûs reliqui à loco G centrum uſque, ut CO ad OK. Hæc autem ex eo patent, quòd ſi recta HG ſpiris quibuſlibet hyperbolicis, quarum centrum C, apſides M, Q, in puncto P occurrat; tum ſi ponatur CΠ junctæ CP æqualis, eductâque ad perpendiculum ΠΦ, quæ circulo MFQ in Φ occurrat, ſi à puncto Φ in radium CO ad perpendiculum deducatur ΦΨ: tempus, quo conficietur Spirarum area quæ ab apſide M initium ſumens circa centrum C deſinat, erit ad tempus quo conficietur area, quæ ab apſide M initium ſumens ad radium CP deſinat, ut CO ad CΨ; ad tempus autem, quo conficitur area ejuſdem ſpiræ à loco P centrum uſque, ut CO ad OΨ (per ea quæ jam ante oſtendimus § 12). Et cùm hæ ſint temporum rationes, qualicunque Spiræ ſint ſpecie præditæ, hoc eſt, qualiſcunque fuerit velocitas corporis per ſpiras lati in apſide M; puta velocitatem illam infinitè minui, ut Spiræ, latitudine ipſarum infinitè imminutâ, in rectam MQ tandem abeant. Jam ſpiris in rectam illam abeuntibus, brachium totum MPC in radium totum MC abit; pars brachii MP in radii partem MG; pars reliqua, à puncto P centrum uſque, in partem radii reliquam, GC. Tempus tranſlationis per brachium MPC abit in tempus caſûs recti è loco M centrum uſque, corporis utique quod, nullâ vi inſitâ præditum, caſum è loco M occeperit; tempus tranſlationis per MP in tempus caſûs recti locum uſque G; tempus tranſlationis per ſpiram reliquam, à loco P centrum uſque, in tempus ulterioris caſûs recti è loco G centrum uſque. Præterea, puncto Π cum puncto G conjuncto, punctum Ψ cum puncto K coibit. Ex quibus facilè conſequuntur ea, quæ de temporibus caſûs recti modò aſſeveravimus.

20. Tempus caſûs recti è loco M centrum uſque, corporis utique quod nullâ vi inſitâ præditum caſum è loco M occeperit, duplum erit temporis, quo corpus, quod à diſtantiis infinitis cecidit, ex eodem loco M centrum uſque devenerit. Deſignetur enim tempus primum literâ T, tempus alterum hâc notá \`T. Tempus autem converſionis integræ in circulo, cujus radius CM, deſignetur literâ Θ; unde tempus tranſlationis per quadrantem ejus circuli deſignabitur his notis, $\frac{1}{4}$Θ. Erit autem T : Θ = CM : $p$ (§ 18 hujus) eſt autem Θ : $\frac{1}{4}$Θ = $p$ : $\frac{1}{4}p$, et $\frac{1}{4}$Θ : \`T = $\frac{1}{2}p$: CM (§ 15 caſûs ſuperioris) ex æquo igitur T : \`T = $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$ = 4 : 2 = 2 : 1. Q. E. D.

PARTIS PRIMÆ CASUS TERTIUS.

JAM verò è loco V, ſecundum rectam VG, (fig. 10) majore cum velocitate corpus intelligatur emitti, quam ea eſſet, quâcum corpus, viribus centralibus eiſdem ſollicitatum, in Circulo ferretur, cujus radius eſſet CV. Corporis igitur, è loco V, ſecundum rectam VG exeuntis velocitas major erit, quam caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum eſſet. Unde nonnulli, magni quidem viri, ſed quibus durè loqui minùs certè quàm nobis odioſum erat, velocitatem eam vocârunt, quam in loco V corpus adeptum eſſet, quod à diſtantiis, ſi Diis placeat, plus quàm infinitis cecidiſſet. Exponatur autem recta $\varepsilon\delta$ [vid. fig. 11] datæ cujuſvis longitudinis, cujus capiatur pars $\delta\zeta$, quæ habeat ad datam $\delta\varepsilon$ rationem eam, quam velocitas corporis, circum centrum C per circulum cui radius CV lati, ad velocitatem quâcum corpus è loco V ſecundum rectam VG projectum eſt. Centro ε, radio $\varepsilon\delta$, ſcribatur circulus, cui in puncto η occurrat recta $\zeta\eta$, à puncto ζ ad perpendiculum educta. Tum junctâ CV (fig. 10) capiatur CA ejus longitudinis, quæ habeat ad CV rationem eam, quam $\zeta\eta$ ad $\varepsilon\zeta$. Et manentibus quæ ad Analyſin caſûs ſuperioris lineavimus, intelligatur AB rectæ CA æqualis. Dataque CA vel AB deſignetur literâ a, data CV literâ c, indefinita CD literâ y. Jam è naturâ Curvæ BF invenietur DF, ut antè, $= \frac{a^4}{y^3}$. Unde DF × $-\dot{y} = \frac{a^4}{y^3} \times -\dot{y}$. Quarum fluxionum fluentes ſunt, alterius quidem area Curvæ BF ad ordinatam DF terminata, alterius verò ſpatium his notis deſignandum, $\frac{a^4}{2y^2}$. Hæc

igitur

Pars Prima. Casus Tertius.

igitur ſpatia vel ſemper erunt inter ſe æqualia, vel alterum altero majus erit dato. Intelligatur recta CD fluxu continuo infinitè augeri. Jam ſpatium illud $\frac{a^4}{2y^2}$, rectâ CD, ſive y, infinite auctâ, in nihilum ultimò abibit. Haud item area Curvæ DF ad ordinatam mobilem DF terminata; ſiquidem rectæ, quæ poſſint areas Curvæ BF, ſint ut velocitates corporis caſu recto centrum C petentis; quapropter area in nihilum abire neſcit, niſi velocitate illâ ad nullam planè redactâ. Velocitas autem, quæ in dato loco V major fuit eâ, quam corpus caſu recto à diſtantiis infinitis locum uſque V adeptum eſſet, aſcenſu quidem corporis minuetur uſque; ita tamen ut ad nullam nunquam planè redigatur, ne rectâ quidem CD vel infinitè auctâ. Vires enim centrales quicquid velocitatis in corpore cadente excitaverint, illud omne in aſcendente reſtinguent. Quod vero corpus, è loco V projectum, plus habuit quàm caſus infinitus genuiſſet, id aſcenſus ne infinitus quidem abolere poterit. Rectâ igitur CD infinitè auctâ, manebit corpori aſcendenti velocitas, quæ ad illam, quam in loco V habuit, rationem habebit eam, quam $\epsilon\zeta$ ad $\epsilon\delta$. Ac propterea area DF, puncto D in infinitum abeunte, ejus permanebit magnitudinis, quæ ad Curvæ aream datæ ordinatæ VL conterminam, rationem habeat eam, quam quadratum ex $\epsilon\zeta$ ad quadratum ex $\epsilon\delta$. Hoc igitur ſpatio, quod, ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ in nihilum abeunte, areæ Curvæ remanebit; hoc, inquam, area illa ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ ſemper exſuperabit. Literâ M ſignificetur ſpatium, ſpatio illi ultimò ſuperſtiti æquale. Area igitur, ad ordinatam mobilem CD terminata, his notis deſignanda erit, $M+\frac{a^4}{2y^2}$: id eſt, partibus duabus conſtabit quarm altera dato M, altera ſpatio his notis deſignato, $\frac{a^4}{2y^2}$, æqualis erit. Quare area, quæ ad datam ordinatam VL terminata eſt, his notis deſignanda erit, $M+\frac{a^4}{2c^2}$. Hoc eſt ſi capiatur CN, duarum CV, CA proportione tertia, area Curvæ, ad ordinatam VL terminata, æqualis erit ſpatio M dimidiâ parte quadrati ex CN aucto. Habet autem ſpatium M ad aream illam, ordinatæ VL conterminam, rationem eam, quam quadratum ex $\epsilon\zeta$ ad quadratum ex $\epsilon\delta$. Invertendo et dividendo, dimidium quadrati ex CN ad ſpatium M rationem habebit eam, quam illud quo quadratum ex $\epsilon\delta$ exſuperat quadratum ex $\epsilon\zeta$ ad quadratum ex $\epsilon\zeta$. Hoc eſt, dimidium quadrati ex CN erit ad M ut quadratum ex $\zeta\eta$ ad quadratum ex $\epsilon\zeta$. Verùm ut $\zeta\eta$ ad $\epsilon\zeta$ ita facta eſt CA ad CV. Quare ut quadratum ex $\zeta\eta$ ad quadratum ex $\epsilon\zeta$ ita erit quadratum ex CA ad quadratum ex CV. Quare dimidium quadrati ex CN erit ad M ut quadratum ex CA ad quadratum ex CV. (El. V. 11.) Sive propter continuam tribus illis CN, CA, CV proportionis convenientiam, ut quadratum ex CN ad quadratum ex CA. Cùm igitur ſit $\frac{1}{2}CN^2 : M = CN^2 : CA^2$, erit ſpatium M dimidium quadrati ex CA (El. V. 15.) ſive $M=\frac{1}{2}a^2$. Unde tandem area Curvæ BF, ad ordinatam mobilem DF terminata, his notis generaliter efferenda erit, $\frac{1}{2}a^2+\frac{a^4}{2y^2}$.

Hinc

Analysis.

Hinc veniet $UQ=\sqrt{\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}}$; et $RS=\sqrt{\frac{a^4+a^2y^2}{2y^2}}$.

Sed ST ut antè $=\frac{q^2}{y}$. Unde $ST^2=\frac{2q^4}{2y^2}$. Unde $RT=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$.

Rectæ CA vel majori eſſe liceat quàm ea, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW, vel minori, vel ei denique æquale eſſe. Major erit, ſi talis ſit angulus CVG, vel QUW, ut quadratum è radio majus ſit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli coſinu rationem habeat rectæ CN+CV ad CV: Minor, ſi talis ſit angulus CVG, ut quadratum è radio minus ſit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli coſinu rationem, quam modo dixi, habeat: Æqualis, ſi talis ſit angulus, ut quadratum è radio ad quadratum ex coſinu ejus rationem illam ipſam, quam CN+CV ad CV, habeat.

Sit enim $R^2 : \overline{\text{coſin. } QUW}|^2 = CN+CV : CV = CA^2+CV^2 : CV^2$. Ex eo quòd ſit $UQ^2=\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}$, erit $2UQ^2 : CA^2 = CA^2+CV^2 : CV^2$. Quare $R^2 : \overline{\text{coſin. } QUW}|^2 = 2UQ^2 : CA^2$.

Sed $R^2 : \overline{\text{coſin. } QUW}|^2 = 2UQ^2 : 2UW^2$, propter angulum ad W rectum.

Quare $2UQ^2 : CA^2 = 2UQ^2 : 2UW^2$. Unde $CA^2=2UW^2$.

At verò ſi R^2 majus ſit, quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{coſin. } QUW}|^2 = CN+CV : CV$, erit idem R^2 majus quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{coſin. } QUW}|^2 = 2UQ^2 : CA^2$. Quare et $2UQ^2$ majus, quàm ut eſſe poſſit $2UQ^2 : 2UW^2 = 2UQ^2 : CA^2$. Quare $2UW^2$ minus erit quàm CA^2, ſive CA^2 majus quàm $2UW^2$. Et ſimili modo ſi ſit R^2 minus, quàm ut ſit $R^2 : \overline{\text{coſin. } QUW}|^2 = CN+CV : CV$, oſtendetur CA^2 minus quàm $2UW^2$.

Primùm igitur talis ſit angulus CVG, ut quadratum è radio majus ſit, quàm quod habeat ad quadratum ex ejus anguli coſinu rationem eam, quam CN+CV ad CV. Ita major erit CA quàm ea, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW, et quadratum ex CA duplo quadrati ex UW majus. Sit b recta duarum CV, $\sqrt{CA^2-2UW^2}$ proportione media.

Itaque $b^2 = CV\times\sqrt{CA^2-2UW^2}$, et $b^4 = CV^2\times\overline{CA^2-2UW^2} = CV^2\times\overline{CA^2-2UQ^2+2QW^2}$.

At verò inventa eſt $UQ=\sqrt{\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}}$. Unde veniet $2UQ^2\times CV^2 = CA^4+CA^2\times CV^2$. Atque hinc rurſum $b^4=2CV^2\times QW^2-CA^4=2q^4-a^4$.

Ergo $a^2y^2-b^4=a^4-2q^4+a^2y^2$.

Cùm igitur inventa eſt $RT=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem $RT=\sqrt{\frac{a^2y^2-b^4}{2y^2}}$.

Hinc calculis ſicut in ſuperiore caſu ſubductis, veniet $Db=\frac{q^2\times y}{\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$. Et $Dc=\frac{CV^2\times q^2}{y\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$.

Harum formularum poſteriore definitur Curva acX, quæ proinde in eodem genere eſt ac prior illa, per cujus quadraturam caſum ſuperiorem confecimus. Datâ igitur VD, dabitur area aVDc ope Tab. II. Claſſ. 4. Form. 1. è relatione nimirum quæ areæ illi cum areâ Sectionis cujuſdam Conicæ, poſitione

Pars Prima. Casus Tertius.

ſitione datæ, intercedat. Datâ autem areâ *a*VD*c*, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut antè, dabitur. Aſſumptiſque diſtantiis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvæ VIH puncta. Q. E. D.

COMPOSITIO CASUS III. PARTIS I.

[Fig. 12.]

In rectâ CV infinite producendâ capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam CA (fig. 10, lineatione eâ quam in analyſi præcepimus definiendam) proportionem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB in fig. 10, et in fig. 12, à puncto c in rectâ ca ad perpendiculum educatur c*e*, quæ junctæ CB fiat æqualis. Centro c ſemiaxibus ca, c*e* ſcribatur Ellipſis.

Punctum V non erit extra hanc Ellipſin. Nempe cùm ea ſit recta *b*, cujus quadratum rectangulo $CV \times \sqrt{CA^2 - 2UW^2}$ æquale ſit, certè non majus erit quadratum ex illâ *b*, quàm rectangulum CV × CA. Non majus igitur quàm ut habeat ad quadratum ex CV proportionem eam, quam rectangulum CV × CA ad quadratum ex CV habet; ſive eam quam recta CA ad rectam CV. Sed talis ſumpta eſt recta ca (fig. 12) ut ad eam illa CA (fig. 10) proportionem habeat eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex CV. Habet igitur CA ad *c*a rationem eam, quam quadratum ex *b* ad quadratum ex CV. Non major igitur erit illa CA, quàm quæ habeat ad ca rationem illam quam CA ad CV. Invertendo, non minor erit ca, quam ut habeat illa ad CA rationem eam, quam CV ad eandem CA. Illa ca igitur non minor erit quàm CV. Punctum igitur V non erit extra Ellipſin. Recta igitur, à puncto V ordinatim ad axem ca educta, Ellipſi occurret. Educatur V*s*, & Ellipſi in *S* occurrat. Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum X, intra Ellipſin. Educatur X*r* ad axem ca ordinatim, quæ Ellipſi in *r* occurrat. Jungantur c*S*, c*r*. Centro c, radio CV, ſcribatur circulus. Ejus circuli capiatur ſector Vc*p*, qui ad ſectorem ellipticum *a*c*r* rationem habeat eam, quam q^2, ſive rectangulum CV × QW, ad quadratum ex CA. Ducatur recta *rt*, quæ Ellipſin in *r* contingens axi ca in *t* occurrat. In recta c*p* capiatur CP, quæ ad c*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex ca. Si è loco V ſecundum rectam VG (fig. 10) corpus quodpiam emiſſum fuerit, cum velocitate quâdam, quæ velocitatem corporis, motu ſuo circum centrum C in diſtantiâ CV circulum ſcribentis, ſuperârit eâ ratione, quâ recta data *e*δ (fig. 11) ſuperet datam δζ: ſi hâc inquam velocitate corpus è loco V, ſecundum rectam VG emiſſum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam, in fig. 12, punctum P perpetuò tangit, per omnia ſimilem et æqualem.

DEMONSTRATIO.

In figurâ quam ad analyſin ornavimus, capiatur CD duarum CX, CV in figurâ modò ſcriptâ proportione tertia; exſiſtentibus illis CV utriuſque figuræ

Compositio

figuræ inter ſe æqualibus. Circulus, centro C, radio CD ſcriptus, in fig. 10, curvo corporis tramiti in puncto I occurrat; reliqua verò maneant quæ ad analyſin Problematis in hoc caſu lineavimus. Capiatur β duarum CV, *b*, proportione tertia. Erit igitur quadratum ex ca ad quadratum ex c*e* (fig. 12) ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β. Id enim eodem modo, atque in caſu ſuperiore uſi ſumus, oſtendi poſſit. Quare in Ellipſi, illud quo quadratum ex dimidio axe, ca, exſuperat quadratum ex cx erit ad quadratum ex ordinatâ x*r*, ut quadratum ex CV ad duplum quadratum ex β.

Rurſum in figurâ 10, juncta CB occurrat rectæ D*b* in M. Sumatur γ duarum CM, *b*, proportione tertia. Erit quadratum ex cx (fig. 12) ad quadruplum quadrati ex γ, ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Id enim iiſdem planè rationibus atque in caſu ſuperiore obtinebimus. Atqui oſtenſum eſt quadratum ex ca eſſe ad quadratum ex c*e* ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β. Illud igitur, quo quadratum ex ca exſuperat quadratum ex cx, erit ad illud, quo quadratum ex c*e* exſuperat quadruplum quadrati ex γ ut quadratum ex CV ad duplum quadrati ex β; hoc eſt, ut idem illud quo quadratum ex ca exſuperat quadratum ex cx ad quadratum ex x*r*. Quadratum igitur ex x*r* illud ipſum erit, quo quadratum ex c*e* exſuperat quadruplum quadrati ex γ.

At verò illud, quo quadratum ex c*e* exſuperat quadruplum quadrati ex γ, hoc quadrati ex RT (fig. 10) quadruplum eſt. Namque, propter continuam tribus illis CM, *b*, γ, proportionis convenientiam, quadratum ex γ erit ad quadratum ex *b*, ut quadratum ex *b* ad quadratum ex CM, ſive ad duplum quadrati ex CD. Ut verò quadratum ex *b* ad duplum quadrati ex CD ita eſt illud, quo dimidium quadrati ex CA exſuperat quadratum ex RT, ad quadratum ex *b*. Id enim declarant notæ illæ quas analyſis nobis expromebat, $RT^2 = \frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}$; ex quibus utique efficietur $b^4 = \overline{\tfrac{1}{2}a^2 - RT^2} \times 2y^2$. Quadratum igitur ex γ ad quadratum ex *b* eandem quam illud, quo dimidium quadrati ex CA exſuperat quadratum ex RT, rationem habet; quadratum igitur ex γ æquale eſt ei, quo dimidium quadratum ex CA exſuperat quadratum ex RT. Et quadrato ex RT communiter addito; quadrata ex γ & ex RT ſimul ſumpta dimidio quadrati ex CA æqualia erunt. Et quadrato ex γ communiter dempto, quadratum ex RT æquale erit ei, quo dimidium quadrati ex CA exſuperat quadratum ex γ. Ac proinde quadruplum quadrati ex RT æquale erit ei, quo duplum quadratum ex CA, hoc eſt, quo quadratum ex c*e* (fig. 12) exſuperat quadruplum quadrati ex γ. Eidem verò quadratum ex x*r* jam antè oſtenſum eſt æquale. Quadratum igitur ex x*r* quadruplum erit quadrati ex RT. Ex quo efficitur recta x*r*, ut in caſu ſuperiore, rectæ RT dupla.

Jam verò eſſe $\dot{c}\dot{x}$, vel $\dot{a}\dot{x}$, ad $\dot{c}\dot{d}$ ut cx ad CD, ac propterea rectangulum $\dot{a}\dot{x} \times rx$ ad CD × *rx* ut CX ad CD, ea iiſdem prorſus argumentis obtinebimus atque in caſu ſuperiore.

Porro ex eo quòd x*r* dupla ſit rectæ RT, ſequetur, ut antè, dimidium rectanguli

Pars Prima. Casus Tertius.

rectanguli $CX \times Xr$, hoc est triangulum CXr, rectangulo $CX \times RT$ æquale esse, et fluxionem trianguli fluxioni rectanguli esse æqualem. Rectanguli autem $CX \times RT$ latera CX, RT, contrà atque in casu illo superiore obtinuit, contrariè fluunt. Nempe cùm RT eodem modo fluat quo Xr, cujus est semissis; rectæ autem Xr, CX in Ellipsi contrariè fluant. Illis autem CX, RT contrariè fluentibus, fluxio rectanguli $CX \times RT$, rectangulorum $\dot{\overline{CX}} \times RT$, $CX \times \dot{\overline{RT}}$ differentiæ æqualis erit. Erit autem rectangulum $\dot{\overline{CX}} \times RT$ ad rectangulum $\dot{\overline{CD}} \times RT$ ut CX ad CD; id enim eodem modo ostendemus quo antè. Sed et rectangulum $CX \times \dot{\overline{RT}}$ erit ad rectangulum $CD \times \dot{\overline{RT}}$ ut CX ad CD. Quare $CX \times \dot{\overline{RT}} - \dot{\overline{CX}} \times RT$, sive fluxio rectanguli $CX \times RT$, hoc est, trianguli CXr, erit ad $CD \times \dot{\overline{RT}} - \dot{\overline{CD}} \times RT$ ut CX ad CD. Sed ostensum est rectangulum $\dot{\overline{aX}} \times Xr$, sive fluxionem spatii Elliptici aXr, esse ad rectangulum $\dot{\overline{CD}} \times Xr$, sive ad duplum rectanguli $\dot{\overline{CD}} \times RT$, ut CX ad CD. Fluxiones igitur trianguli CXr spatiique elliptici aXr simul sumptæ, sive fluxio sectoris elliptici car ad spatia illa $CD \times \dot{\overline{RT}} - \dot{\overline{CD}} \times RT$, $2\dot{\overline{CD}} \times RT$ simul sumpta, hoc est ad rectangula $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$ simul sumpta, erit ut CX ad CD. Fluxio inquam sectoris elliptici car ad summam rectangulorum $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$ rationem habet quam CX ad CD. Rectangulorum autem $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$ summa rectanguli $\overline{CD \times RT}$ fluxio est; nempe illis CD, RT eodem modò fluentibus. Nam CD contrario modo fluere atque CX ostensum est. Ostensum est etiam illam RT contrario modo fluere atque CX. Fluunt igitur CD, RT eodem modo, rectanguli que $CD \times RT$ fluxio summa erit rectangulorum $CD \times \dot{\overline{RT}}$, $\dot{\overline{CD}} \times RT$. Fluxio igitur sectoris elliptici car erit ad fluxionem rectanguli $CD \times RT$, ut CX (fig. 12) ad (fig. 10) CD.

Cæterùm ex æquatione illâ quam analysis nobis expromebat, $RT = \sqrt{\frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}}$, calculis ut in casu superiore subductis, veniet $\dot{\overline{CD \times RT}} \times \frac{q^2CV^2}{a^2y^2} = DC \times \dot{y} = -\dot{\overline{aVDC}}$. (Notis enim $DC \times \dot{y}$ designatur $-\dot{\overline{aVDC}}$, sive areæ $aVDC$ fig. 10 decrescentis fluxio.) Hoc est areæ $aVDC$ fluxio ad contrariam rectanguli $CD \times RT$ fluxionem rationem habebit compositam è rationibus, spatii q^2, sive rectanguli $CV \times QW$ ad a^2, sive quadratum ex CA, quadratique ex CV ad quadratum ex CD. (Contrarias autem esse areæ $aVDC$ rectangulique $CD \times RT$ fluxiones ex eo patet, quòd crescente CD rectangulum quoque crescat, area decrescat, et vicissim).

Jam verò ex eo quòd fluxio areæ $aVDC$ ad contrariam rectanguli $CD \times RT$ fluxionem rationem habeat è quibus modò diximus compositam, atque ex eo quòd fluxio rectanguli $CD \times RT$ ad similem sectoris elliptici acr fluxionem rationem habeat quam CD ad CX, sequetur fluxionem areæ $aVDc$ ad contrariam sectoris elliptici acr fluxionem rationem habere quam $CV \times QW$ ad quadratum

Casus Tertius.

quadratum ex CA. Consequetur inquam esse $-\dot{\overline{aVDC}}$ ad $\dot{\overline{acr}}$, sive $\dot{\overline{aVDC}}$ ad $-\dot{\overline{acr}}$, ut $CV \times QW$ ad quadratum ex CA. Id enim iisdem planè argumentis probabitur, quibus in casu superiore ostendimus fluxionibus similibus areæ $aVDC$ et sectoris hyperbolici car rationem eam intercedere. Jam verò sectorum acr, ecr fluxiones sunt semper æquales, sed contrariæ. Hoc est $-\dot{\overline{acr}} = \dot{\overline{ecr}}$, et vicissim. Quare fluxio areæ $aVDc$ erit ad similem sectoris elliptici ecr fluxionem ut $CV \times QW$ ad quadratum ex CA. Et cùm hæc data sit fluxionum ratio, fluentibus etiam aut eadem intercedet, aut altera dato major erit quàm pro hâc ratione. (Geom. Flux. Prop. IV.)

Fluat igitur CD, (fig. 10) donec ipsi CV evadat æqualis. Jam sector ellipticus (fig. 12) fit ecS, area autem $aVDc$ (fig. 10) in nihilum abierit. Quare sector ellipticus ecr dato ecS semper major erit, quàm ut habeat ad aream $aVDc$ rationem eam, quam quadratum ex CA ad rectangulum $CV \times QW$. Sector igitur Scr (fig. 12) ad aream $aVDc$ (fig. 10) sive illi æqualem sectorem circularem VCX rationem illam habet. Capiatur in fig. 12, sector circularis VCf, qui ad sectorem ellipticum acS rationem habeat eam, quam rectangulum $CV \times QW$ ad quadratum ex CA. Punctum ipsum f erit ad Curvam, quam punctum P perpetuò tangit: id enim eodem modo probabitur quo in casu superiore. Jam verò cùm sector ellipticus acS ad sectorem circuli VCf, rationem habeat quam item sector ellipticus acr ad sectorem circuli VCp, rationem habeat quam quadratum ex CA ad rectangulum $CV \times QW$; idcirco et sector ellipticus Scr ad sectorem circuli fCp eandem illam rationem habebit. Atque hinc efficitur, ut in casu superiore, sectores circulares VCX figuræ decimæ et FCp hujus esse inter se æquales. Quare et anguli VCX, fCp inter se æquales erunt.

Porro ostendentur CP, CI inter se æquales eodem planè modo atque in casu superiore. Et simili argumentatione Curvarum VK, fP radii omnes, qui cum primariis illis, CV, ef, angulos æquales faciant, ostendentur inter se æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter se similes et æquales. Q. E. D.

De naturâ Curvæ fP, de Asymptotis ejus et Apsidibus inveniendis; de temporibus etiam, quibus corpora data ejus spatia absolvant, definiendis, et cum temporibus conversionum in circulis conferendis.

§ I. DEFINITIO.

Puncta r et P Ellipseos Curvæque cognata dico.

Asymptotæ.

2. Capiatur sector circularis VCN, qui ad Ellipseos quadrantem acr rationem illam habeat, quam rectangulum $CV \times QW$ ad quadratum ex CA. Punctum Curvæ quod ellipseos verticis secundi e sit cognatum, in rectâ CN quærendum erit; siquidem puncto r in e translato, punctum p in N translatum erit, et radius Cp cum illo CN congruet. At verò puncto r in e translato, recta

CONCHOIDES recta ct infinitè augetur. Quapropter infinitè augebitur etiam CP, quæ ad illam ct datam rationem habet. Punctum igitur Curvæ, puncti e cognatum, in infinitum abiit; hoc est, Curva PF infinitè quidem protensa rectæ CN nullibi occurret, quam tamen propiùs accedet quàm pro datâ quâlibet distantiâ.

3. Si capiatur CM, duarum ca, CV proportione tertia, erit M punctum ubi Curva PF axi Ellipseos ca occurret. Demonstrabitur eodem modo quo § 3 casûs superioris.

Anguli Radiorum cum Curvâ.

4. Radius quisque CP, à centro C Curvam usque eductus, angulum cum curvâ faciet, qui simili lineatione, ac in casu superiore usi sumus, definiatur. Nimirum à puncto Ellipseos cognato r ad axem ca deducatur rX ordinatim, quæ in puncto d media dividatur. In abscissâ cX capiatur Xg, quæ habeat ad cX rationem eam, quam (in fig. 10) QW ad CV. Junctâ dg, angulus X dg æqualis erit ei, quo radius CP inclinatur ad Curvam. Demonstratur eodem modo atque in casu superiore (vid. § 6 superioris.)

Apsides.

5. Punctum M curvæ Apsis erit: demonstratur ad modum § 8 casûs superioris.

6. Radio mobili CP circum centrum circumacto, et infinitè aucto, angulus inclinationis radii ad Curvam infinitè imminuitur; siquidem puncto p in N translato, punctum r in ipsum verticem secundum e, punctum X in centrum Ellipseos translatum erit. Unde Xd dimidio axi secundo æqualis facta fuerit; cùm illa cX, et quæ ad cX datam rationem habeat gX, in nihilum abierit.

Conchoidum Ellipticarum Species Variæ.

7. Fiat angulus NCM' angulo NCV æqualis, et capiatur CM' æqualis rectæ CM. Rursum fiat angulus NCp' angulo NCp æqualis, et capiatur CP' = CP. Punctum 'P erit ad novum quoddam Curvæ PF brachium, quod Asymptotam habebit rectam CN, Apsidem verò punctum M'. Et si fiat angulus 'VCN' æqualis angulo 'VCN, et angulus 'VCp'' æqualis angulo 'VCp, et capiatur CP'' = CP', erit punctum ''P ad tertium Curvæ brachium, quod Apsidem habebit punctum 'M, Asymptotam rectam CN'. Curva igitur MPf, pro variâ quæ Ellipsin inter & Circulum VpM' proportio intercesserit, varias ipsa species induet; quarum hæ sunt ferè simplicissimæ.

Primùm quidem, si Ellipseos ad Circulum, adeoque quadrantis Ellipseos ad quadrantem Circuli, ea sit proportio, quæ quadrati ex CA ad rectangulum CV × QW, Curvæ figura erit qualem in 13ª scriptam vides. Quæ brachiis quatuor constat secundum communem Asymptotam NN' infinitè utrinque protensis, Apsides autem duas habet ad rectam illam constitutas, quæ brachiorum asymptotam communem ad perpendiculum decussat.

Si quadrans Ellipseos ad semicirculum proportionem habeat quam CA² ad CV × QW, Curva figuram 14 induet; brachiis utique duobus constans, quæ tam Apside quàm Asymptotâ gaudent communi, et Apsidem in ipsâ Asymptotâ constitutam habent.

Sin quadrans Ellipseos ad Circulum integrum rationem habet quam CA² ad CV × QW, Curva brachiis rursum quidem duobus constabit, quæ Apside et Asymptotâ gaudebunt communibus, atque apsidem habebunt in Asymptotâ constitutam. [Vide fig. 15.] Longè tamen diversa erit hujus figura ab illâ superiore; quippe cujus brachia nisi in Apside communi nusquam conveniant, cùm hujus brachia tribus omninò punctis. Nodorum autem unus ad ipsam Asymptotam erit, duo reliqui æqualibus ab Asymptotâ distantiis hinc inde remoti.

ELLIPTICA.

Generaliter autem si sector Circuli, VCN, qui ad quadrantem Ellipseos rationem habet quam CV × QW ad CA², si ille ad aream circuli totius rationem habeat quam numerus ad numerum; Curva brachiis constabit numero definitis, quarum duæ quælibet proximæ vel Asymptotam vel Apsidem communem habent; eâ quidem lege ut Apsidis et Asymptotæ communio alternis fiat. Nimirum si brachium primum et secundum Asymptotam communem habuerint, secundo et tertio Apsis communis erit; tertio & quarto communis rursum Asymptotos, quarto & quinto Apsis; atque sic deinceps. Brachia verò Curvæ, Apsides item et Asymptotæ quot sint, hâc ratione cognoscatur. Habeat sector circularis VCN ad aream totius circuli rationem eam, quam numerus n ad numerum m. Numeri verò n, m, minimi sint omnium, qui proportione cum ipsis conveniant. Si numerus m sit impar, Curva tot quidem Apsides habebit, Asymptotas tot, bis tot brachia, quot sint in numero $2m$ unitates, et in singulis Asymptotis Apsides singulas habebit constitutas. Si par sit numerus m, vel pariter vel impariter pari esse ei liceat. Si impariter par sit numerus m, jam Curva totidem habebit brachia quot in numero m, Apsides autem totidem, totidem item asymptotas, quot in dimidio m unitates; et Apsides singulas in singulis Asymptotis constitutas. Si pariter par sit numerus m, Curva brachia quidem, sicut antè, totidem habebit quot sunt in numero m; Apsides totidem quot in dimidio m; Asymptotas autem haud plures quàm sunt in quadrante numeri m unitates. Apsides autem in rectis constitutæ erunt, à centro ad perpendiculum cum Asymptotis eductis. Quòd si sector circularis VCN, qui ad quadrantem Ellipseos rationem habeat quam CV × QW ad CA², nullum areæ totius circuli commensum accipiat, sive ad eam nullius numeri ad numerum rationem habeat, innumera erunt Curvæ brachia, innumeræ etiam Apsides et Asymptotæ. Apsidum autem et Asymptotarum communionem brachia Curvæ alternis semper accipient.

Quadratura Conchoidum Ellipticarum.

8. Ad quadraturam partium Curvæ fP, quæ radiis positione datis interceptæ sint, analysis hanc æquationem expromebat; $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}}$. Hinc $Db \times \dot{y} = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}} \dot{y}$. Area igitur ICV (fig. 10), vel PCf (fig. 12) $(= \boxed{Db \times \dot{y}})$ spatio $\frac{q^2}{2a^2} \sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}$, sive $\frac{q^2}{\sqrt{2} \times a} \sqrt{y^2 - \frac{b^4}{a^2}}$, vel æqualis erit, vel eo major minorve dato (Newton. TAB. Curv. I. Class. IV. Form. 1.) idque qualiscunque assumpta fuerit distantia CV (fig. 10) vel Cf (fig. 12), modo datâ CM non sit minor. Ponatur igitur Cf (fig. 12) ipsi CM æqualis, ut fCP in aream MCP transeat, et angulus CVG in fig. 10 rectus fiat. Tum q^2 fiet CM × UQ, et b^2 fiet CM × CA. Notæ autem $\sqrt{2} \times a$ rectam ce semper significant.

Conchoides

nificant. Area igitur MCP ſpatio $\frac{CM \times UQ}{Ce}\sqrt{CP^2 - CM^2}$ vel æqualis, vel eo major minorve dato erit. Fluat y vel CP, donec ipſi CM evadat æqualis. Tum puncto P in ipſum M tranſlato, area MCP in nihilum abierit. In nihilum etiam ſpatium illud $\frac{CM \times UQ}{Ce}\sqrt{CP^2 - CM^2}$. Area igitur MCP ſpatio iſto, quod ſimul cum eâ in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur C radio CM (vid. fig. 16), ſcribatur circulus, qui rectæ Ce in punctis O, o occurrat. Ad rectam Ce applicetur rectangulum eZ rectangulo CM × UQ æquale. Circulum modò ſcriptum in puncto M recta MΠ contingat. In illam MΠ, à circuli centro C, deducatur CΠ radio Curvæ CP æqualis. Et à puncto Π in rectam Oo ad perpendiculum deducatur ΠΨ. Sector curvæ MCP rectangulo CZ × CΨ æqualis erit. Quæ autem brachio Curvæ MPf et Aſymptotâ ejus CN, infinitè protenſis, axeque CM intercluſa eſt area, ea quidem infinita erit.

Tempora movendi in Conchoidibus Ellipticis.

9. Tempora, quibus conficiuntur ſectores quilibet Curvæ, MCP, MCf, qui ab axe CM communiter incipientes ad radios CP, Cf terminantur, erunt inter ſe ut tangentes arcuum, quorum CP, Cf ſunt ſecantes pro radio CM. Corpus autem ab apſide M, vel alio quovis puncto f emiſſum, per brachium infinitum in ipſam aſymptotam ne infinito quidem tempore devenerit.

10. Corpus igitur, quod per harum Curvarum aliquam feratur, ad punctum unde primùm emiſſum fuerit, vel quod ſemel præterierit, nunquam redibit. Neque ex alio Curvæ brachio in aliud tranſibit, niſi forte à dato brachii alicujus puncto ita emiſſum fuerit, ut verſus apſidem curſum faciat. Ita enim apſidem illam prætergreſſum per brachium alterum deferetur, cui cum primo apſis illa communis eſt.

Velocitas motûs in Conchoidibus Ellipticis.

11. Velocitas corporis per Curvam lati, in loco quovis V (fig. 10) eſt ad velocitatem corporis, quod, urgentibus eiſdem viribus centripetis, circumagitur in circulo cujus radius CV, ut recta quæ poſſit quadrata ex CA, CV ſimul ſumpta ad rectam ipſam CA. Demonſtrabitur eodem modo quo § 13 caſus ſuperioris.

12. Si centro C, radio CM, ſcribatur circulus (fig. 17) qui rectæ Ce, quæ radium CM ad perpendiculum inſiſtat, in O occurrat; velocitas corporis per Curvam lati, in apſide M, erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius CM, circumacti, ut AO ad CA.

Tempora tranſlationum per Conchoides Ellipticas conferuntur cum Temporibus converſionum in Circulis.

13. Tempus tranſlationis ab Apſide M ad locum quemvis Curvæ P ad tempus converſionis integræ in Circulo, cujus radius CM, rationem habebit compoſitam è rationibus tangentis arcûs ejus circularis, cujus ſecans eſt CP pro radio CM, ad integrum circuli circuitum, rectæque CA ad rectam CM.

A centro C in rectam MΠ, quæ circulum in Π contingat, deducatur CΠ illi CP æqualis. Et à Π in diametrum Oo demittatur ad perpendiculum recta ΠΨ. Exponatur recta T datæ cujuſvis longitudinis. Sumatur alia Θ, quæ ad illam T rationem habeat, quam tempus converſionis integræ per circulum, cujus radius CM, ad tempus tranſlationis ab apſide M in locum P per Curvam. Circuitus autem circuli, cujus radius CM, æqualis ſit rectæ p. Dico T ad Θ rationem habere eam, quæ compoſita eſt è rationibus rectæ

Ellipticæ.

tæ CΨ ad p, rectæque CA ad CM: ſive eam, quam rectangulum CΨ × CA ad rectangulum p × CM.

Nam primùm quidem ſector curvæ MCP ad aream circuli, cujus radius eſt CM, rationem habebit eam, quam rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × AC. Id enim eiſdem planè rationibus efficiatur, quibus in caſu ſuperiore oſtendimus, aream illam omnem quam Spiræ intus habuere, eſſe ad aream circuli cujus radius CM, ut rectangulum T × AF ad rectangulum Θ × CA. Jam verò ſector Curvæ MCP æqualis eſt rectangulo CZ × CΨ (per § 8 hujus). Et area circuli, cujus radius CM, dimidium eſt rectanguli p × CM (per ea quæ demonſtravit Archimedes). Rectangulum igitur CZ × CΨ erit ad dimidium rectanguli p × CM, ſive ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Sed propter rectangulum CZ × Ce rectangulo CM × UQ æquale (ita enim factum eſt) erit CZ ad UQ ut CM ad Ce. Quare rectangulum CZ × CΨ erit ad rectangulum UQ × CΨ ut rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce. Permutando rectangulum CZ × CΨ erit ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM ut rectangulum UQ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce. At verò rectangulum CZ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × CM, ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Quare rectangulum UQ × CΨ ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce ut rectangulum T × AO ad rectangulum Θ × CA. Permutando, rectangulum UQ × CΨ erit ad rectangulum T × AO ut rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce ad rectangulum Θ × CA. Invertendo, rectangulum T × AO ad rectangulum UQ × CΨ ut rectangulum Θ × CA ad rectangulum $\frac{1}{2}p$ × Ce.

Præterea junctis OM, Om, recta UQ ad AO rationem habet quam CA ad MO; ſecundum ea quæ è formulâ generali, UQ $= \sqrt{\frac{a^4 + a^2c^2}{2c}}$, ſuprà diſputavimus, poſito utique c = CM. At verò CA ad MO rationem habet quam Ce ad Mm. Id enim eodem modo probare liceat, quo in caſu ſuperiore probavimus CA eſſe ad MF ut Ce ad Mm. Quare UQ ad AO rationem habet quam Ce ad Mm. (El. V. 11.) Quare et rectangulum UQ × CΨ ad rectangulum AO × CΨ rationem habet quam $\frac{1}{2}p$ × Ce ad $\frac{1}{2}p$ × Mm, ſive ad p × CM. Cùm igitur ſit T × AO : UQ × CΨ = Θ × CA : $\frac{1}{2}p$ × Ce, atque rurſum UQ × CΨ : CΨ × AO = $\frac{1}{2}p$ × Ce : p × CM; ex æquo erit T ad CΨ ut Θ × CA ad p × CM. Quare et rectangulum T × CA erit ad rectangulum CΨ × CA, ut rectangulum Θ × CA ad rectangulum p × CM. Permutando, erit T ad Θ ut CΨ × CA ad p × CM. Q. E. D.

PARTIS PRIMÆ CASUS QUARTUS.

JAM verò in fig. 10, reliquis ut in caſu ſuperiore permanentibus, angulus CVG talis ſit, ut quadratum è radio ad quadratum ex coſinu ejus anguli illam ipſam rationem habeat quam CN + CV ad CV. Itaque recta CA æqualis erit ei, cujus quadratum duplum ſit quadrati ex UW. Quadratum igitur ex CA duplum erit quadrati ex UW, ſive duplum ejus quo quadratum ex UQ exſuperat quadratum ex QW. Quadratum igitur ex CA, duplo quadrati ex QW auctum, duplo quadrati ex UQ æquale fiet. Hoc eſt $a^2 + 2QW^2 = \frac{a^4 + a^2c^2}{c^2}$. Unde $a^2c^2 +$

$2c^2QW^2$,

PARS PRIMA. CASUS QUARTUS.

$2c^2QW^4$, five $a^2c^2 + 2q^4 = a^4 + a^2c^2$. Unde rurfum $2q^4 = a^4$, et $a^4 - 2q^4 = 0$.

Cùm igitur inventa eft $RT = \sqrt{\frac{a^4 - 2q^4 + a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem $RT = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Unde $2RT = CB$. Quare $Db = \frac{q^2}{CB}$; hoc eft, cùm fit $q^2 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$, et $CB = \sqrt{2} \times a$, $Db = \frac{1}{2}a$. Et $Dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y^2 \times CB} = \frac{CV^2 \times a}{2y^2}$.

Datâ igitur CD, dabitur fector circularis VCX per quadratum Curvæ, cujus ordinata his notis defignatur, $\frac{CV^2}{2y^2} \times a$, exfiftente abfciffâ VD. Dato autem fectore VCX, punctum I ad curvum corporis tramitem, ut antè, dabitur. Affumptifque diftantiis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvæ VIK puncta.

COMPOSITIO CASUS QUARTI PARTIS PRIMÆ.

In rectâ CV fig. 18, capiatur diftantia quævis CD. Capiatur CM, duarum CD, CV proportione tertia. Circuli, centro C radio CV fcripti, capiatur fector VCp, dimidio rectanguli $MV \times CA$ æqualis. Quod ita fiat, fi capiatur arcus Vp, qui habeat ad rectam MV rationem eam quam data CA ad radium CV, et jungatur Cp. Denique capiatur CP rectæ CD æqualis. Si corpus è loco V fecundum rectam VG eâ cum velocitate, quam fuprà pofuimus, emiffum fuerit, per Curvam feretur ejus quam punctum P perpetuo tangit per omnia fimilem et æqualem.

DEMONSTRATIO.

Fluxio fectoris VCP rectangulo $\dot{\overline{MV}} \times \frac{1}{2}CA$ æqualis eft. Cùm verò CD fit ad CV ut CV ad CM, rectangulum $CM \times CD$ quadrato ex CV æquale erit. Sed datum eft quadratum ex CV, propter latus CV datum. Rectangulum igitur $CM \times CD$ datum; cujus tamen latera, CM, CD, fluunt. Omnino igitur contrariè illa fluunt; atque eâ quidem lege, ut rectangula $\dot{\overline{CM}} \times CD$, $CM \times -\dot{\overline{CD}}$, five $CM \times \dot{\overline{VD}}$, femper fint inter fe æqualia. Erit igitur $\dot{\overline{CM}} : \dot{\overline{VD}}$ ut $CM : CD$. Rectangulum igitur $\dot{\overline{CM}} \times \frac{1}{2}CA$ erit ad rectangulum $\dot{\overline{VD}} \times \frac{1}{2}CA$ ut CM ad CD. Sed propter datam CV, fluxiones $\dot{\overline{CM}}$, $\dot{\overline{MV}}$ erunt inter fe æquales. Rectangulum igitur $\dot{\overline{MV}} \times \frac{1}{2}CA$ rectangulo $\dot{\overline{CM}} \times \frac{1}{2}CA$ æquale erit. Quare $\dot{\overline{MV}} \times \frac{1}{2}CA$, hoc eft, fluxio fectoris VCp, erit ad $\dot{\overline{VD}} \times \frac{1}{2}CA$ ut CM ad CD. Jam in figurâ quam ad analyfin ornavimus, ponatur CD æqualis ipfi CD hujus, exfiftentibus etiam illis CV figuræ utriufque inter fe æqualibus; et manente reliquâ omni iftius figuræ lineatione, recta Dc habet ad $\frac{1}{2}CA$ rationem eam quam quadratum ex CV ad quadratum ex CD. Id enim fignificant notæ illæ, quas analyfis nobis expromebat $Dc = \frac{CV^2 \times a}{2y^2}$, hoc eft

5 $Dc =$

$Dc = \frac{VC^2}{2CD^2} CA$. Quare et rectangulum $Dc \times \dot{\overline{VD}}$, hoc eft fluxio areæ aVDc, erit ad rectangulum $\frac{1}{2}CA \times \dot{\overline{VD}}$ ut quadratum ex CV ad quadratum ex CD, five ut recta CM ad rectam CD. Atqui oftenfa eft fluxio fectoris VCp effe ad idem rectangulum $\frac{1}{2}CA \times \dot{\overline{VD}}$ ut CM ad CD. Fluxiones igitur areæ aVDc fig. 10 fectorifque VCp fig. 18 inter fe æquales erunt. Quare et fluentes vel æquales erunt inter fe, vel altera alterâ dato major. Fluat CD ut ipfi CV æqualis fiat. Jam area aVDc in nihilum abierit. Et in nihilum etiam fector VCp. Puncto enim D in V tranflato, ut æquales fint CD, CV, æquales fient etiam CM, CV; punctum igitur M cum ipfo V coierit, et recta MV in nihilum abierit. Quare et arcus Vp, qui ad illam MV datam rationem habet, in nihilum etiam abierit; et cum illo fector VCp. Area igitur aVDc fectorque VCp, cùm fimul in nihilum abierint, dato utique haud different. Erunt igitur inter fe æquales. Quare et fector VCX fig. 10 fectori VCp fig. 18 æqualis. Radii autem CV inter fe æquales. Anguli igitur VCp, VCX inter fe æquales. Sed et CP, CI inter fe æquales (ex conftructione). Et fimili argumentatione Curvarum Vp, VK radii omnes, qui inter fe fint æquales, angulos cum primariis CV æquales facient. Curvæ igitur illæ per omnia inter fe fimiles & æquales funt. Q. E. D.

COMPOSITIO.

De natura Curvæ VP, *perficiendâque ejus figurâ; de temporibus, quibus data ejus fpatia abfolvantur, definiendis, et cum temporibus converfionum per circulos conferendis.*

1\. Si capiatur arcus VI rectæ CA æqualis, et jungatur CI, recta CI Curvæ Afymptotos erit. Cùm enim, propter æquales VI, CA, fit arcus VI ad rectam CV, ut recta CA ad CV (ex conftruct.) et è naturâ Curvæ, arcus etiam Vp ad MV ut CA ad CV, erit arcus VI ad rectam CV ut arcus Ip ad rectam MC. Puncto igitur p in I tranflato, punctum M cum ipfo C ultimò coierit, rectaque CM in nihilum abierit. Et cùm in omni fitu puncti p rectangulo $CM \times CD$ fua conftet magnitudo, nempe ut quadrato ex CV æquale fit, puncto p in I tranflato, rectâque CM in nihilum abeunte, recta CD, atque huic æqualis CP, infinita fiet. Q. E. D. Afymptotos.

2\. Radii curvæ angulorum, quos cum afymptotâ ipfi faciunt, rationem inter fe contrariam gerunt. Cùm enim fit arcus IV ad CV ut arcus Vp ad MV, erit arcus Ip ad rectam CM ut arcus IV ad CV (El. v. 11.) hoc eft ut CA ad CV. Eft autem CM ad CV ut CV ad CD vel CP. Quare ex æquo erit $Ip : CV = CA : CP$. Rectangulum igitur fub radio CP arcuque Ip æquale eft dato rectangulo $CV \times CA$. Ac proinde radii CP, arcuum Ip, five angulorum ICp, contrariam inter fe rationem gerunt. Q. E. D.

3\. Curva Vp gyris innumeris centrum cingit; quorum arctiffimi, licet per centrum non tranfeant, propiùs tamen illud accedunt quàm pro datâ quâvis diftantiâ. Nimirum hæc eft Spira illa, quam, propter contrarias illas radiorum angulorumque rationes, nonnulli jure optimo Archimedeæ reciprocam vocârunt. Spira Archimedeæ Reciproca.

4\. De-

PARS PRIMA. CASUS TERTIUS.

Apſis Spirarum in Centro.

4. Decreſcente radio mobili CP, angulus, quo radius ad Curvam inclinatur ſenſim augetur. Radioque illo infinitè imminuto, angulus ille ultimò recto æqualis erit: quaſi ſcilicet Curva apſidem in ipſo centro haberet conſtitutam. Nam radius eſt ad ſinum anguli illius, quo CP ad Curvam inclinatur, ut RS ad ST; hoc eſt, ut $\sqrt{a+y^2}$ ad $\frac{\sqrt{2}\times q^2}{a}$, ſive ut $\sqrt{CA^2+CP^2}$ ad $\frac{\sqrt{2}\times q^2}{CA}$: hoc eſt, cum $\sqrt{2}\times q^2$ quadrato ex CA æquale ſit, id enim ſuprà oſtendimus, ut $\sqrt{CA^2+CP^2}$ ad CA. Decreſcente igitur CP, minor fit ratio radii ad ſinum illum, ac proinde angulus ipſe major; donec illâ CP in nihilum abeunte, ratio radii ad ſinum in ipſam æqualitatem abierit, et angulus in recti amplitudinem creverit.

Spiræ reciprocæ oppoſitæ.

5. Si in PC productâ capiatur punctum π, pari diſtantiâ atque ipſum P à centro remotum, ſed in partes contrarias, erit punctum π ad Curvam, Curvæ VPC per omnia ſimilem et æqualem ſed ſitu contrario, quæ rectam IC productam aſymptotam habet. Hæ Curvæ unius quidem figuræ brachia ſunt oppoſita; et Spiræ Reciprocæ Oppoſitæ haud ineptè dicendæ ſunt.

Motus per Spiras reciprocas.

6. Si corpus è loco V, ſecundum rectam VG, eâ cum velocitate emiſſum ſit, ut per Spiram VP deferatur; dato quodam tempore, cujus ſpatium quâ ratione definiatur mox docebo, propiùs quidem centrum acceſſerit quàm pro datâ quâvis diſtantiâ. Elapſo autem tempore illo, Spiram Oppoſitam invaſerit, cujus ductum ſequens neque infinito tempore in Aſymptotam ci deveniet; quam tamen propiùs accedet quàm pro datâ quâvis diſtantiá; neque in Spiram VPC, per quam primùm delata eſt, unquam redibit.

Quadratura Spirarum reciprocarum.

7. Quadraturam partium Spirarum, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, ope hujus æquationis abſolvimus, quam analyſis expromebat; $Db=\frac{q^2}{CB}=\frac{a^2}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}.a}=\frac{1}{2}a$. Hinc enim fluxio areæ $aVDb$ fig. 10, ſive ſectoris ſpirarum $VCP = Db\times\dot{\overline{VD}}=\frac{1}{2}a\times\dot{\overline{VD}}$. Quamobrem fluentes VCP, $\frac{1}{2}CA\times VD$ vel æquales ſunt inter ſe, vel altera alterâ dato major. Fluat CD, donec ipſi CV æqualis fiat; jam puncto D cum ipſo V coeunte, recta VD in nihilum abierit. Rectâ autem VD in nihilum abeunte, area $aVDb$, atque unà cum eâ ſector VCP, in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt quæ ſimul in nihilum abierint. Erunt igitur inter ſe æqualia. Sector inquam Spiræ VCP ſpatio $\frac{1}{2}CA\times VD$ æqualis erit.

Hinc ſpatium illud omne, quod Spiræ VPC infra locum V centrum uſque intus habent, hoc inquam ſpatium rectangulo $\frac{1}{2}CA\times CV$, ſive ſectori circulari ICV, inter punctum V & Aſymptotam Curvæ, æquale erit. Spatium illud omne, quod Spiræ Oppoſitæ VIC, $v\pi c$ intra loca V, v, quæ æqualiter à centro hinc inde ſint remota, intus habent, hoc inquam ſpatium rectangulo $CA\times CV$, ſive duplo ſectoris circularis ICV, æquale erit.

Et ſi capiatur $cd=c\pi$, ſpatium illud, quod Spiræ Oppoſitæ inter loca v, π intus habent, $=\frac{1}{2}CA\times vd$.

8. Hinc tempus, quo corpus per has Spiras latum ſectorem VCP abſolverit

Spira Archimedeæ reciproca.

verit erit ad tempus, quo è loco V diſtantias à centro devenerit datâ quâvis minores, ut VD ad CV. Idem verò tempus erit ad illud, quo è dato loco V emiſſum ad oppoſitum v corpus tranſlatum fuerit, ut VD ad 2CV.

Velocitas motus in Spiris Archimedeæ reciprocis.

9. Velocitas corporis per has Spiras lati, in loco quovis V, erit ad velocitatem corporis, viribus eiſdem circulum, radio CV, circum C ſcribentis, ut recta quæ poſſit quadrata ex CA, CV ſimul ſumpta ad rectam ipſam CA: hoc eſt, ſi circulus, centro C, radio CV ſcriptus, occurrat radio, qui illum CV ad perpendiculum inſiſtit, in puncto O, jungaturque AO, ut AO ad CA. Probanda ſunt hæc, iiſdem argumentis quibus § 11 & 12, caſûs ſuperioris.

Tempora movendi in Spiris Oppoſitis conferuntur cum temporibus convertionum in circulis.

10. Sectores Circuli VvO Spiræque Vv, qui motu corporum æquali tempore conficiuntur, erunt inter ſe æquales. Et qui ſunt æquales æquali tempore conficientur.

Sint VCN, VCP ſectores, Circuli ille, hic Spiræ, qui æquali tempore conficiuntur. Dico areas VCN, VCP eſſe inter ſe æquales. A centro C in rectam VG, quæ Spiras in puncto V contingit, deducatur ad perpendiculum recta CG. Sector VCP ad ſectorem VCN, qui æquali tempore conficitur, rationem habebit, quæ componitur è rationibus velocitatis corporis per ſpiras lati in loco V ad velocitatem corporis in circulo VvO circumacti, rectæque CG ad rectam CV. Nam hæc erit naſcentium prima ratio, et quæ naſcentium prima fuerit, ea ſemper inter illos manebit. Id enim eiſdem argumentis, quæ in § 10 caſûs primi uſurpavimus, probandum erit. Velocitas autem corporis per Spiras lati, in loco V, ad velocitatem corporis in Circulo VvO circumacti rationem habet quam AO ad CA (§ 10 hujus). Quare ſector ſpiræ VCP ad ſectorem circuli VCN rationem habet, quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CG ad CV. Sed propter angulum CVG angulo QUW (fig. 10) æqualem, anguloſque etiam ad G, W æquales, quippe quorum uterque rectus eſt; triangula CVG, QUW erunt inter ſe ſimilia, et CG erit ad CV ut QW ad QU; hoc eſt, ſecundum ea quæ in § 4 oſtendimus, ut CA ad AO. Ratio igitur quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CG ad CV, ea componetur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CA ad AO. Sector igitur ſpiræ VCP ad ſectorem circuli VCN rationem habet eam, quæ componitur è rationibus rectæ AO ad CA rectæque CA ad AO. Sed hæc non alia eſt atque ipſa quidem æqualitas. Erit igitur ſector VCP ſectori VCN æqualis.

Rurſum ſi æquales ſunt ſectores VCP, VCN, dico eos æquali tempore confici. Sit enim Vcn ſector quidam circuli VvO, qui æquali tempore conficiatur atque ſector ſpirarum VCP; cui proinde ille æqualis erit, ſecundum ea quæ modò oſtendimus. At verò ſector ſpirarum VCP ſectori circulari VCN æqualis eſt: ſic enim poſuimus. Sectores igitur circulares VCN, Vcn inter ſe æquales. Æqualibus igitur temporibus conficiuntur (Prop. I. Lib. I. Princip.) At verò Vcn tempore ejus æquali, quo ſector ſpirarum VCP, conficitur. Quare et alter VCN tempore conficietur æquali ejus, quo ſector ſpirarum VCP. Q. E. D.

11. Sint V, v Spirarum Oppoſitarum loca à centro æqualiter remota. Tempus tranſlationis de loco V in locum v per Spiras ad tempus converſionis integræ in Circulo, cujus radius CV, rationem habebit eam quam dupla CA ad totius circuli circuitum.

Spatium

Pars Prima. Casus Quintus.

Spatium illud omne quod Spiræ Oppositæ inter loca V, v intus habent, duplo sectori circulari VCI æquale est (§ 7 hujus). Tempus igitur translationis de loco V in v per Spiras æquale est ei, quo corpus, quod per circulum feratur, confecerit duplum sectorem VCI (§ 10 hujus). Ac proinde tempus translationis de loco V in v per Spiras eandem ad tempus conversionis integræ in Circulo rationem habet, quam tempus, quo corpus in circulo confecerit duplum sectorem illum VCI, ad tempus conversionis integræ; sive eam, quam duplus sector VCI ad aream totius circuli. Sed duplus sector VCI ad aream totius circuli rationem habet eam quam duplus arcus VI ad totum circuitum; hoc est, cùm arcus VI rectæ CA factus fuerit æqualis, eam, quam dupla CA ad circuitum circuli VvO. Tempus igitur translationis de loco V in v per spiras ad tempus conversionis integræ per circulum VvO rationem habet eam, quam 2CA ad circuli circuitum. Q. E. D.

CASUS QUINTUS PARTIS PRIMÆ.

Reliquis (in fig. 10) manentibus quæ priùs posita sunt, puta talem esse angulum CVG, ut quadratum è radio minus sit quàm quod ad quadratum ex cosinu ejus anguli rationem habeat, quam CN+CV ad CV. Ita CA minor erit quàm recta, cujus quadratum duplum sit quadrati ex UW. Quadratum igitur ex CA minus erit quàm duplum quadrati ex UW. Sit b recta duarum CV, $\sqrt{2UW^2-CA^2}$ proportione media. Ita erit $b^2=CV\times\sqrt{2UW^2-CA^2}$. Et $b^4=CV^2\times\overline{2UW^2-CA^2}=CV^2\times\overline{2UQ^2-2QW^2-CA^2}$.

At verò inventa est $UQ=\sqrt{\frac{a^4+a^2c^2}{2c^2}}$. Unde veniet $2UQ^2\times CV^2=CA^4+CA^2\times CV^2$. Atque hinc rursum $b^4=CA^4-2CV^2\times QW^2=a^4-2q^4$.

Cùm igitur inventa est $RT=\sqrt{\frac{a^4-2q^4+a^2y^2}{2y^2}}$, erit eadem $RT=\sqrt{\frac{b^4+a^2y^2}{2y^2}}$, et $2RT=\frac{\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}{y}$.

Hinc calculis ut antè subductis, veniet $Db=\frac{q^2\times y}{\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}$. Et $Dc=\frac{CV^2\times q^2}{y\sqrt{2b^4+2a^2y^2}}$.

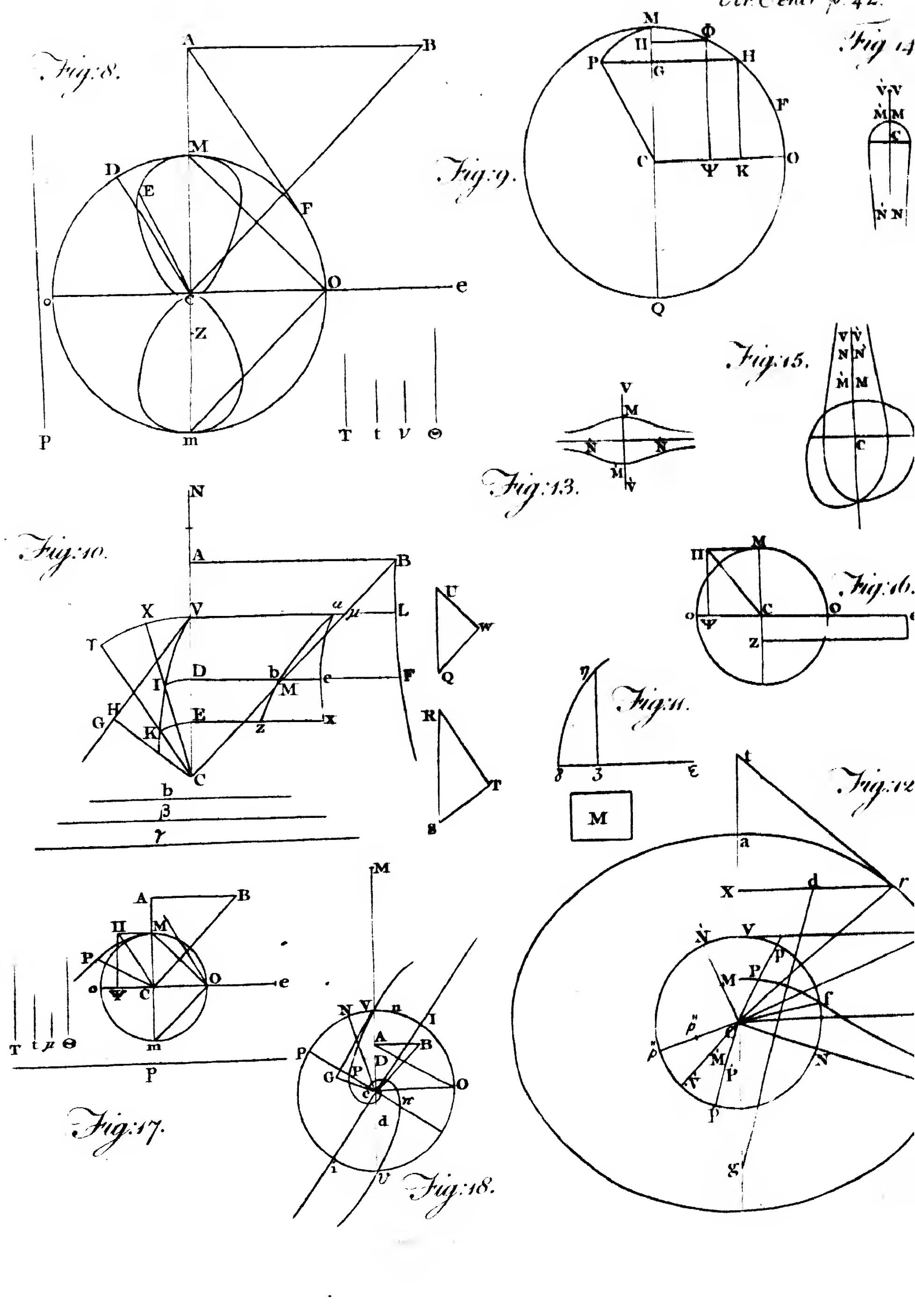
Curva igitur, cujus ordinata est Dc, in earum genere est per quarum quadraturas casum secundum et tertium absolvimus, et similem quadraturam ipsa subitura est; et per hujus quadraturam, non modò punctum I sed et alia dabuntur, quot quis voluerit, Curvæ VIK puncta.

COMPOSITIO CASUS QUINTI.

In rectâ CV infinitè, si id opus sit, producendâ (fig. 19), capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam CA (lineatione eâ quam in analysi præcepimus definiendam) rationem eam, quam quadratum è rectâ CV ad quadratum è rectâ b. Jungatur CB, fig. 10. Et à puncto c, fig. 19, ad perpendiculum cum rectâ ca educatur ce, quæ rectæ CB fiat æqualis. Centro c, semiaxibus transverso quidem ce, secundo ca, scribatur Hyperbola. Huic hyperbolæ recta, à puncto V ad axem secundum ca ordinatim educta, in S occurrat, jungaturque cS. Su-

matur

Vir. Centr. p. 42.



matur in axe CA aliud quodvis punctum X. Educatur Xr ad axem CA ordinatim, quæ hyperbolæ in r occurrat. Jungatur Cr. Centro C, radio CV, scribatur circulus. Ejus circuli capiatur sector vCp, qui ad sectorem hyperbolicum, ϵCr, rationem habeat eam quam q^2, sive rectangulum CV × QW, ad quadratum ex CA. Ducatur recta rt, quæ hyperbolam in r contingens axi CA in t occurrat. In rectâ Cp capiatur CP, quæ ad Ct eam rationem habeat, quam quadratum ex CV ad quadratum ex CA. Si è loco V secundum rectam VG (fig. 10), corpus quodpiam emissum fuerit, cum velocitate quâdam, quæ velocitatem corporis, motu suo circum centrum C ad distantiam CV circulum scribentis, eâ ratione superârit, quâ recta data $\epsilon\delta$ (in fig. 11) superat datam $\delta\zeta$: si cum hâc inquam velocitate corpus è loco V secundum rectam VG emissum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam punctum P in fig. 19 tangit, per omnia similem & æqualem. COMPOSITIO.

DEMONSTRATIO.

In figurâ 10, quam ad analysin ornavimus, capiatur distantia CD, duarum CX, CV figuræ modò scriptæ, id est, 19^{x}, proportione tertia; exsistentibus utique illis CV utriusque figuræ inter se æqualibus. Jam rectam Xr rectæ RT duplam esse, id similiter planè ac in casu secundo & tertio ostendendum. Tum etiam $\dot{\overline{\mathrm{CX}}}$ esse ad $\dot{\overline{\mathrm{CD}}}$ ut CX ad CD. Unde sequetur etiam rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{CX}}} \times \mathrm{X}r$, sive fluxionem spatii hyperbolici ϵCXr, esse ad rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}} \times \mathrm{X}r$ ut CX ad CD. Rursus fluxionem trianguli CXr fluxioni rectanguli CX × RT æqualem esse, id quoque sicut antè patet. Unde eisdem planè argumentis ac antè efficietur, fluxionem trianguli CXr esse ad rectangula $\dot{\overline{\mathrm{CD}}} \times \mathrm{RT}$, $\mathrm{CD} \times \dot{\overline{\mathrm{RT}}}$ simul sumpta ut CX ad CD. Sed fluxio spatii hyperbolici ϵCXr ad rectangulum $\dot{\overline{\mathrm{CD}}} \times \mathrm{X}r$, sive $\dot{\overline{2\mathrm{CD}}} \times \mathrm{RT}$, ostensa est rationem habere quam CX ad CD. Quare $\dot{\overline{\mathrm{CX}r}} - \dot{\overline{\epsilon\mathrm{CX}r}}$, hoc est $-\dot{\overline{\epsilon\mathrm{C}r}} : \mathrm{CD} \times \dot{\overline{\mathrm{RT}}} - \dot{\overline{\mathrm{CD}}} \times \mathrm{RT} = \mathrm{CX} : \mathrm{CD}$. Hoc est, fluxio sectoris hyperbolici ϵCr ad contrariam rectanguli CD × RT fluxionem rationem habebit eam, quam CX ad CD. Aream autem hyperbolicam ϵCr atque rectangulum CD × RT modis contrariis fluere, inde patet, quòd area hyperbolica ϵCr eodem modo fluit quo recta CX; rectangulum autem CD × RT eodem modo quo recta CD: primum enim exigit hyperbolæ natura; alterum, æquatio illa $\mathrm{RT} \times \mathrm{CD} = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$. Rectæ autem CX, CD, quæ datum spatium comprehendunt, modis inter se contrariis fluunt.

Jam verò cùm ex eo quòd sit $\mathrm{RT} = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2y^2}}$ veniat $\mathrm{RT} \times \mathrm{CD} = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$, erit $\dot{\overline{\mathrm{RT} \times \mathrm{CD}}} = \frac{a^2y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$.

Unde $\dot{\overline{\mathrm{RT} \times \mathrm{CD}}} \times \frac{q^2\mathrm{CV}^2}{a^2y^2} = \frac{q^2\mathrm{CV}^2}{y\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}\dot{y} = \mathrm{D}c \times -\dot{\overline{\mathrm{VD}}}$.

Fluxio igitur areæ αVDC (fig. 10) ad contrariam rectanguli RT × CD fluxionem rationem habebit compositam è rationibus spatii q^2 ad quadratum ex CA, quadratique ex CV ad quadratum ex CD. Jam verò ex eo quòd area αVDc ad contrariam

PARS PRIMA. CASUS QUINTUS. contrariam rectanguli RT × CD fluxionem rationem habeat ex quibus modò diximus compoſitam; atque ex eo quòd fluxio rectanguli RT × CD ad contrariam ſectoris hyperbolici *ecr* (in fig. 19) fluxionem rationem habeat, quam CD ad CX; efficietur ut antè fluxionem ſpatii *a*VD*c* ad ſimilem ſectoris hyperbolici *ecr* fluxionem rationem habere eam, quam CV × QW ad quadratum ex CA. Unde rurſum ſequetur ſectorem hyperbolicum *ecr*, dato *ecS* majorem eſſe quàm ut habeat ad *a*VD*c*, ſive ſectorem circularem VCX, rationem eam quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Habebit igitur ſector hyperbolicus *Src* (fig. 19) ad ſectorem circularem VCX (fig. 10) rationem eam quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW.

Circuli CV*p* (in fig. 19) capiatur ſector VC*f*, ad quem ſector hyperbolicus *ecS* rationem habeat quam quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW. Punctum *f* erit ad Curvam, ad quam eſt punctum P. Id enim ſicut antè oſtendetur. Et cùm ſit ſector hyperbolicus *ecr* ad ſectorem circuli VC*p*, ut quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW (ita enim factum eſt) et ſector hyperbolæ *ecS* ad ſectorem circuli VC*f* ut quadratum ex CA ad CV × QW (nam id quoque factum eſt) idcirco erit ſector hyperbolæ *Scr* ad ſectorem circuli *fcp* ut quadratum ex CA ad rectangulum CV × QW; id eſt ut ſector idem hyperbolæ *Scr* ad ſectorem circularem VCX in figurâ 10. Sectores igitur circulares VCX iſtius figuræ 10, *fcp* hujus 19, erunt inter ſe æquales. Quare propter radios *cf*, CV inter ſe æquales, anguli quoque VCX inter ſe æquales erunt. Jam verò rectas illas CP, hujus figuræ 19[æ], ipſis CI iſtius 10[æ] æquales eſſe, id eodem planè modo ac antè oſtendendum erit. Et ſimili argumentatione alii omnes Curvarum VI, *f*P radii, qui cum primariis CV, *cf* angulos æquales faciunt, oſtendentur inter ſe æquales. Curvæ igitur per omnia inter ſe ſimiles erunt & æquales. Q. E. D.

*De Naturâ Curvæ f*P *perficiendâque ejus figurâ, &c.*

DEFINITIO.

Puncta r, P *Hyperbolæ Curvæque cognata dico.*

2. Curva *f*P gyris innumeris centrum cingit, quorum arctiſſimi propiùs centrum acceſſerint quàm pro datâ quâvis diſtantiâ.

Aſymptota. 3. Curva *f*P rectam *ca*, infinitè protenſam, Aſymptotam habet. Cùm enim ſector circuli *f*CV ſit ad ſectorem hyperbolæ *Sce* ut CA² ad CV × QW, tranſlato puncto *p* in V, punctum *r* cum *e* jungetur, & radius *cp* cum radio CV. Quare punctum illud Curvæ, quod puncti *e* ſit cognatum, in rectâ CV quærendum erit. At verò puncto *r* in *e* tranſlato, punctum X cum centro C coierit, & recta CX in nihilum abierit. Quare recta CD, vel illi æqualis CP, finitam omnem longitudinem exſuperabit. Q. E. D.

4. Scribatur hyperbola *ρεμ* hyperbolæ *re*M oppoſita. Si capiatur circuli *pvυ* ſector VC*π*, ſectori VC*p* æqualis, et in radio C*π* pars C*φ*, radii C*p* parti CP æqualis; punctum *φ* ad Curvam erit, Curvæ *f*P per omnia ſimilem & æqualem, ſed ad contrariam partem axis *ca*: quæ quidem eodem modo ex ſemihyperbolâ oppoſitâ *ερ* formari poſſit, quo formata eſt *f*P ex ſemihyperbolâ *er*. Quòd ſi in diametris *pp*, *ππ* capiantur CP, C*φ* rectis CP, C*φ*

æquales,

æquales, ad contrarias partes centri C; puncta 'P, '*φ* erunt ad Curvas, earum quibus inſunt P, *φ*, per omnia ſimiles & æquales, ſed à contrariâ parte centri ſitas: quæ quidem ex ſemihyperbolis *e*M, *εμ* eodem planè modo formari poſſint, quo priores illæ ex ſemihyperbolis, *er*, *e*M. Hæ Curvæ unam quandam figuram conſtituere cenſendæ, ſicut ſemihyperbolæ, ex quibus formantur unam: et Spiræ Hyperbolicæ Secundæ haud immerito vocari poſſunt. SPIRÆ HYPERBOLICÆ SECUNDÆ.

5. Perfecta igitur figura quatuor conſtat brachiis, quorum duo, ab alterâ parte centri infinitè proſerpentia, aſymptotâ gaudent communi *ca*; ab alterâ parte duo, aſymptotâ C*α*.

6. Si rectæ CX capiatur pars X*g*, quæ ad totam CX rationem habeat quam recta QW (fig. 10) ad rectam CV, & à puncto *g* ad punctum *d*, quod rectam X*r* mediam dividat, ducatur *gd*; angulus *gd*X inclinatio erit radii CP ad Curvam, exſiſtentibus utique punctis, *r*, P, Hyperbolæ Curvæque cognatis. Probatur eodem modo quo § 6 caſûs ſecundi. Anguli Radiorum cum Curvâ.

7. Per A, ſemiaxis hyperbolæ ſecundi verticem, ducatur recta A*k* cum axe tranſverſo parallela, quæ aſymptotarum alteri in *k* occurrat. Recta A*k* media dividatur in puncto *l*. Capiatur A*q*, quæ ad ſemiaxem ſecundum CA rationem habeat eam, quam QW ad CV, et jungatur *ql*. Angulus, quo radius quilibet Spirarum CP ad Curvam inclinatur, angulo *ql*A minor erit. Sed radio mobili CP circum centrum C circumacto, & infinitè imminuto, angulus inclinationis ille uſque augebitur; ut ad æqualitatem dati *ql*A propiùs tandem accedat quàm pro datâ quâvis differentiâ. Probatur ut § 17 caſûs ſecundi. Angulus Maximus.

8. Hæ ſpiræ Apſidem nullam habent. Radio enim CP infinitè imminuto angulus inclinationis maximus evadit; recto tamen minor eſt, utpote acuto *ql*A æqualis. Radio autem CP infinitè creſcente angulus ille uſque minuetur, ut ultimò omni acuto rectilineari minor fiat.

9. Si corpus è loco *f*, in alterâ Spirarum dato, ſecundum rectam quæ Spiram ibi loci contingat, eâ cum velocitate emiſſum fuerit, ut per Spiram illam deferatur, intra certum quoddam temporis ſpatium, quod quantum ſit futurum mox definire docebo, propiùs centrum C delatum fuerit quàm pro datâ quâlibet diſtantiâ. Elapſo autem tempore illo, oppoſitum Spiræ brachium, ad contrarias axis centrique partes, invaſerit, cujus ductum ſequens infinitas uſque longinquitates à centro abibit. Motus in Spiris Hyperbolicis Secundis.

10. Ad quadraturam partium harum Spirarum, quæ radiis poſitione datis interceptæ ſint, hanc nobis æquationem analyſis expromebat. D*b* $= \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$. Hinc D*b* × $-\dot{y}$, ſive fluxio areæ *a*VD*b*, $= -\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$. Quadratura harum Spirarum.

Quare area *a*VD*b* unà cum fluente fluxionis $\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$ dato cuidam ſpatio æqualis erit.

Sed fluens fluxionis $\frac{q^2 \times y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a y^2}}$ erit $\frac{q^2}{2a^2}\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}$ (per TAB. Newton. II. Claſſ. IV. Form. I.) $= \frac{q^2}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2} = \frac{q^2}{C_e}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2}$. Quare *a*VD*b* + $\frac{q^2}{C_e}\sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2}$ dato cuidam ſpatio æquale erit. Poſitâ igitur CD ſive $y = $ CV, ut

area

Spiræ Hyperbolicæ Secundæ.

area αVDb in nihilum abeat, veniet $\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+CV^2}$ dato iſti æquale. Hinc area αVDb, ſive ſector fCP, $=\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+CV^2}-\frac{q^2}{Ce}\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+CD^2}$. Poſitâque y, ſive CD, $=0$, area fPC à loco f centrum uſque $=\frac{q^2}{Ce}\left|\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+CV^2}-\frac{b^2}{a}\right|$. Et area PC, à loco P centrum uſque, $=\frac{q^2}{Ce}\left|\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+CD^2}-\frac{b^2}{a}\right|$. Vel pro b^4 ſcripto $\gamma^2\times CM^2$, ſive $2\gamma^2\times CD^2$, area PC $=\frac{q^2}{Ce}\left|\sqrt{\frac{2\gamma^2\times CD^2+a^2CD^2}{a^2}}-\frac{\gamma\times\sqrt{2}.CD}{a}\right| = \frac{q^2\times CD}{Ce\times CA}\left|\sqrt{2\gamma^2+a^2}-\sqrt{2}\times\gamma\right|$. Cujus æquationis hæc erit conſtructio.

Conſtituatur triangulum $\Gamma\gamma\int$ angulo ad γ recto, lateribus $\Gamma\gamma$, $\int\gamma$ rectæ γ ſingulatim æqualibus (vid. fig. 20). A puncto Γ ad perpendiculum educatur $\Gamma\alpha$, rectæ CA æqualis; et jungatur $\alpha\int$, & ab $\alpha\int$ auferatur $\int\delta$ rectæ $\Gamma\int$ æqualis. Ad rectam ce (fig. 19) vel CB (fig. 10) applicetur rectangulum ſpatio dato q^2 æquale, et latus applicati ſit N. Capiatur M quæ ſit ad N ut CD ad CA. Rectangulum M $\times\,\delta\alpha$ ſpatio PC æquale erit.

Velocitas in his Spiris.

11. Si circulus, centro C, radio CV ſcriptus, rectæ ce, quæ illam CV ad perpendiculum inſiſtit, in O occurrat, & jungatur AO; velocitas corporis per Spiras lati in loco f erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius Cf, ut AO ad CA. Oſtendetur ut § 12 caſûs 3.

Tempora movendi per Spiras Hyperbolicas Secundas.

12. Hinc tempus, quo corpus è loco Spirarum f diſtantiam à centro datâ quâvis minorem delatum fuerit, ad tempus converſionis integræ in Circulo rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus radii ad integrum circuli circuitum, rectangulique UQ $\times\,\delta\alpha$ ad rectangulum AO $\times$ CB. Et ſi capiatur illius $\delta\alpha$ magnitudo illa, quam, angulo QUW infinitè imminuto, ultimò ea adepta fuerit, quando angulus ille ad nihilum redactus fuerit, ita tempus caſûs recti definieris, à loco f centrum uſque; corporis utique quod è loco f, ſecundum rectam ipſam fC, eâ cum velocitate dejectum fuerit, quâcum ſecundum rectam, Spiras in loco f contingentem, projici illud oporteat, ut per Spiras deferatur. Cæterùm ultima illa rectæ $\delta\alpha$ magnitudo hæc erit; $\sqrt{2}\times UQ-\sqrt{2UQ-CA^2}$.

PROBLEMATIS GENERALIS.

PARS SECUNDA.

Pars Secunda.

JAM verò vires centrales in earum genere ſint, quæ fugam centri corporibus inducant.

E dato loco V (fig. 21) ſecundum rectam VG poſitione datam, emiſſum puta corpus quodpiam, datâ cum velocitate. Oportet definire Curvam, per quam corpus illud deferetur, ſi viribus centrifugis urgeatur, quæ centrum C reſpiciant, & rationem triplicatæ diſtantiarum contrariam inter ſe conſtanter ſervent.

Factum puta, et ſit VK Curva illa quam definire ſuſcepimus. Detur punctum A, unde ſi corpus, nullâ vi inſitâ præditum, propellentibus viribus

Analysis.

ribus centrifugis, aſcenſum rectâ accepiſſet, velocitatem in loco V adeptum eſſet, ejus æqualem quâcum è loco illo V ſecundum rectam VG exire geſtit. Et manentibus quæ ad demonſtrationem noſtram Prop. XLI. Libri Primi Principiorum à nobis lineata ſunt, intelligatur recta AB ejus lineationis rectæ CA æqualis eſſe. Dataque recta CA vel AB deſignetur literâ a, data CV literâ c, indefinita CD literâ y. Jam cùm è natura Curvæ BF, DF ſit ad AB ut vis centralis in loco D ad vim centralem in loco A, hoc eſt, ut cubus ex CA vel AB ad cubum ex CD, erit DF $=\frac{AB^3}{CD^3}$ AB $=\frac{a^4}{y^3}$. Ergo DF $\times\dot{y}=\frac{a^4}{y^3}\dot{y}$. Harum verò fluxionum ſunt fluentes, alterius quidem area BADF; alterius, ſpatium $-\frac{a^4}{2y^2}$: ubi id ſignificat ſignum —, ſpatium $\frac{a^4}{2y^2}$ areamque BADF æqualiter quidem ſed contrariè fluere. Area igitur BADF, ſpatio $\frac{a^4}{2y^2}$ auctum dato cuidam ſpatio æquale erit. Decreſcat recta CD uſquedum illi CA æqualis fiat; coeunte puncto D cum illo A, area BADF in nihilum abierit, ſpatium autem $\frac{a^4}{2y^2}$ dimidio quadrati ex CA æquale fiet. Totum igitur illud BADF $+\frac{a^4}{2y^2}$, in hoc ſitu puncti D, dimidio quadrati ex CA æquale erit. Quare dimidium quadrati ex CA eſt datum illud, cui BADF $+\frac{a^4}{2y^2}$ ſemper eſt æquale. Quare BADF $+\frac{a^4}{2y^2}=\frac{1}{2}a^2$. Hinc BAVL, ſive UQ^2 $=\frac{1}{2}a^2-\frac{a^4}{2c^2}$, et UQ $=\sqrt{\frac{a^2c^2-a^4}{2c^2}}$. RS $=\sqrt{\frac{a^2y^2-a^4}{2y^2}}$. Sed ST $=\frac{q^2}{y}$. Quare ST $=\frac{2q^2}{2y^2}$. Et RT $=\sqrt{\frac{a^2y^2-a^4-2q^2}{2y^2}}$. Ex eo quòd inventum eſt UQ^2 $=\frac{1}{2}a^2-\frac{a^4}{2c^2}$, manifeſtum eſt quadratum ex CA majus eſſe quàm duplum quadrati ex UQ. Majus itaque quàm duplum quadrati ex UW; nempe cùm quadratum ex UW quadrato ex UQ majus eſſe neſciat. Sit igitur b datarum CV, $\sqrt{CA^2-2UW^2}$ proportione media. Erit igitur $b^2=$ CV $\times\sqrt{CA^2-2UW^2}$ et $b^4=CV^2\times\overline{CA^2-2UW^2}=CV^2\times\overline{CA^2-2UQ^2+2QW^2}$. Sed ex eo quòd ſit UQ^2 $=\frac{c^2a^2-a^4}{2c^2}$, efficitur $2CV^2\times UQ^2=CV^2\times CA^2-CA^4$. Unde rurſum $b^4=CA^4+CV^2\times QW^2=a^4+2q^2$.

Hinc RT, quæ inventa eſt $=\sqrt{\frac{a^2y^2-a^4-2q^2}{2y^2}}$, eadem inquam RT $=\sqrt{\frac{a^2y^2-b^4}{2y^2}}$. Unde, calculis ut in ſuperioribus ſubductis, veniet Db $=\frac{q^2\times y}{\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$. Et

Dc $=\frac{q^2\times CV^2}{y\sqrt{2a^2y^2-2b^4}}$.

Curva igitur, cujus ordinata Dc, in eodem genere eſt in quo priores illæ, per quarum quadraturas Caſum 2, 3 & 5 Partis Primæ abſolvimus. Et per ſimilem hujus Curvæ quadraturam, caſus ille Problematis, de quo nunc agitur, conficiatur.

COMPO-

COMPOSITIO PARTIS SECUNDÆ.

In rectâ cv (fig. 22) infinitè si id opus sit producendâ, capiatur ca, quæ habeat ad rectam AB, seu CA (fig. 21) proportionem eam quam quadratum è rectâ cv ad quadratum è rectâ *b*. Jungatur CB; et à puncto c ad perpendiculum cum rectâ CA educatur *ce*, quæ illi CB fiat æqualis. Centro c, semiaxibus ca, *ce*, scribatur Ellipsis *asr*. Punctum v non erit extra hanc Ellipsin. Id enim eodem modo ostendetur, quo ostensum est punctum v, in compositione casûs Secundi Partis Primæ, non esse extra hyperbolam cujus ope casum eum composuimus.

Recta igitur à puncto v ordinatim cum axe ca educta Ellipsi occurret. Educatur v*s*, & ellipsi in *s* occurrat.

Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum x intra sectionem. Educatur x*r* cum axe ca ordinatim, quæ ellipsi in *r* occurrat. Jungantur c*s*, c*r*. Centro c, radio cv, scribatur circulus. Ejus circuli capiatur sector vc*p*, qui ad sectorem ellipticum *acr* rationem habeat eam, quam rectangulum cv × QW ad quadratum ex CA. Ducatur recta *rt*, quæ, ellipsin in *r* contingens, cum axe ca in *t* conveniat. In rectâ c*p* capiatur cP, quæ ad c*t* eam rationem habeat, quam quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Si è loco v secundum rectam vG corpus quodpiam emissum fuerit, eâ cum velocitate quam in loco v adeptum esset, si è loco A nullâ vi insitâ præditum, propellente vi centrifugâ, ascensum rectâ occepisset: hoc corpus feretur per Curvam, ejus, quam punctum P perpetuò tangit, per omnia similem & æqualem.

Cor. Si recta x*r* media dividatur in puncto *d*, capiaturque *g*x quæ ad xc rationem eam habeat, quam QW ad cv; junctâ *gd*, angulus *gd*x ei erit æqualis, quo radius cP ad Curvam inclinatur.

2. Si in axe ca capiatur cM, duarum ca, cv proportione tertia, punctum M erit Apsis curvæ *f*P.

3. Si circuli, radio cv scripti, capiatur sector vcN, qui ad quadrantem ellipseos rationem habeat eam, quam rectangulum cv × QW ad quadratum ex CA; recta cN Curvæ M*f*P Asymptotos erit.

Curvarum autem, quæ ex Ellipsi *asr*, quo præcepimus modo, formari poterunt, sicut et earum quas ad compositionem casûs tertii Partis I^æ. formare docuimus, species sunt innumeræ, pro variâ ratione quam sector circularis vcN ad aream totius circuli habere possit. Perfecta enim Curvæ M*f*P figura brachiis constat pluribus, quorum vel certus erit numerus, vel innumera erunt, prout sector ille aliquem cum areâ totius circuli numerorum commensum habeat, neve habeat. Apsides autem & Asymptotæ, quæ brachiis proximis alternè erunt communes, simili prorsus lineatione ac in casu illo tertio partis superioris definiendæ erunt. Reverâ hisce Curvis cum illis prioribus arctissima cognatio intercedit. Nec aliâ ferè re dissimiles sunt, præterquam quòd illæ partes suas concavas, hæ convexas, centro Ellipseos obvertunt.

Tædium credo legentibus afferrem, si hisce demonstrandis immorarer: siquidem demonstrandi ratio neminem, cui superiora intellecta sunt, latere possit.

FINIS.

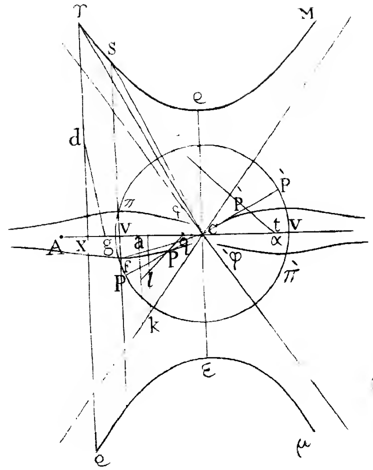


Fig: 19.

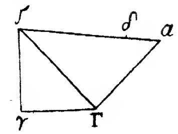


Fig: 20.

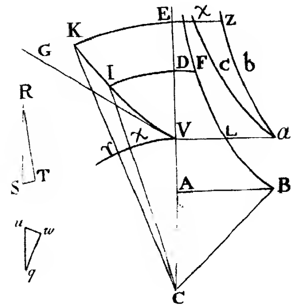


Fig: 21.

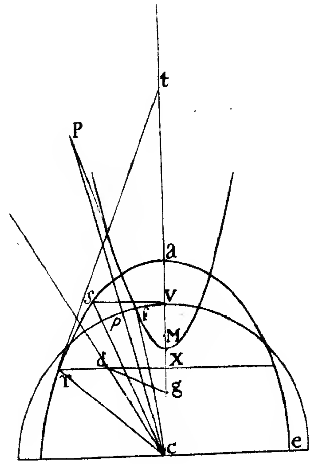


Fig: 22.